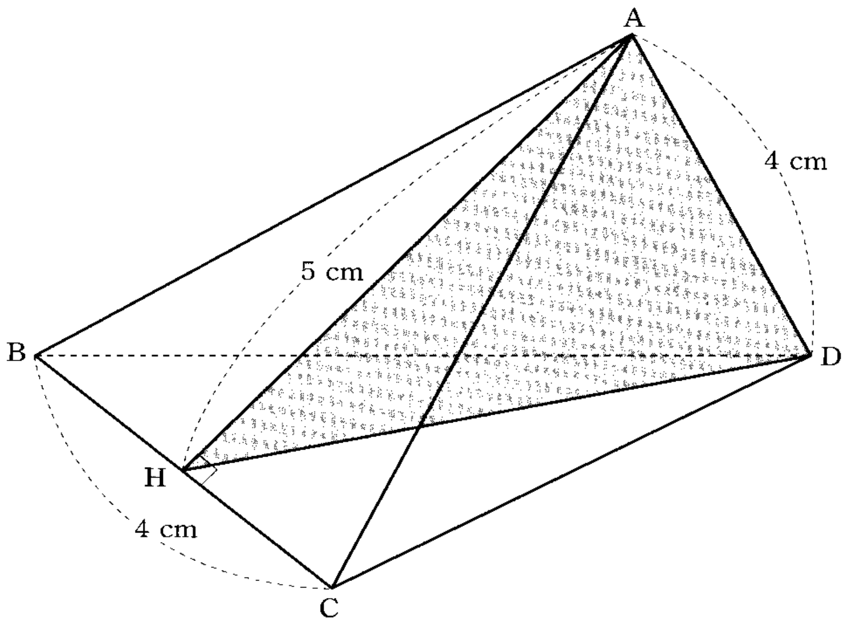
5.空間図形の複合問題 （長さ・面積・体積・角度ほか）【2004 年度出題】

【問 1】

下の図は，AB ＝ AC ＝ DB ＝ DC，AD ＝ BC ＝ 4 cm の四面体 ABCD です。頂点 A から辺 BC に垂線をひき，辺 BC との交点を H とすると，AH ＝ 5 cm となっています。



このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

（岩手県 2004 年度）

(1) 辺 BC とねじれの位置にある辺を答えなさい。

(2) 三角形 AHD の面積を求めなさい。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	辺
(2)	cm^2
(3)	cm^3

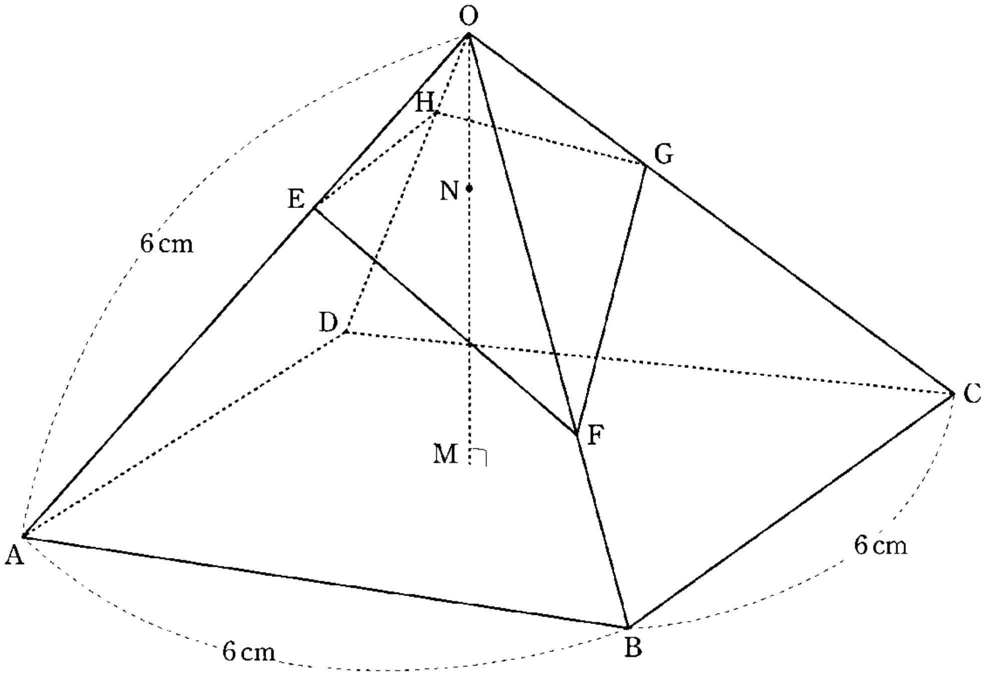
解答
(1)　辺 AD
(2)　$2\sqrt{21}$ cm^2
(3)　$\dfrac{8\sqrt{21}}{3}$ cm^3
解説
(1)
平行でなく交わらない辺をさがす。
(2)
△ABC≡△DBC より
HD＝HA＝5 cm
よって△AHD は二等辺三角形
頂点 H から底辺 AD に垂線 HM をひくと
$HM^2=5^2-2^2=25-4=21$
$HM=\sqrt{21}$
よって$\triangle AHD=\dfrac{1}{2}\times AD\times HM=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{21}=2\sqrt{21}$ cm^2
(3)
△AHD の辺 HD を底辺とすると
高さ h は $\dfrac{1}{2}\times 5\times h=2\sqrt{21}$
$h=\dfrac{4}{5}\sqrt{21}$
また$\triangle DBC=\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5=10$ だから
四面体 ABCD の体積$=\dfrac{1}{3}\times\triangle DBC\times h=\dfrac{1}{3}\times 10\times\dfrac{4}{5}\sqrt{21}=\dfrac{8}{3}\sqrt{21}$ cm^3

【問 2】

下の図のように，底面が 1 辺 6 cm の正方形で，側面が正三角形である正四角すい OABCD がある。辺 OA 上に OE:EA＝1:2 となる点 E を，辺 OB 上に OF:FB＝2:1 となる点 F を，辺 OC 上に OG:GC＝1:2 となる点 G をとる。

このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

（福島県　2004 年度）



(1) 頂点 O から底面にひいた垂線と底面との交点を M とするとき，線分 OM の長さを求めなさい。

(2) 3 点 E，F，G を通る平面と OM との交点を N とするとき，△ONF の面積を求めなさい。

(3) 3 点 E，F，G を通る平面と OD との交点を H とするとき，H と底面との距離を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2
(3)	cm

解答

(1)　$3\sqrt{2}$ cm

(2)　2 cm^2

(3)　$\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$ cm

解説

(1)

AM の長さは 1 辺が 6cm の正方形の対角線の半分の長さなので $\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$

△OAM で三平方の定理より

$AO^2=OM^2+MA^2$

よって $6^2=OM^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2$

$OM=3\sqrt{2}$ cm

(2)

直線 EG は点 N を通るので ON:NM＝1:2 となるから

$\triangle ONF=\triangle OMB\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=2$ cm^2

(3)

△ODB は

OD＝OB＝6，∠DOB＝90°の直角三角形である。

点 F から DB に平行な直線をひき OM，OD との交点をそれぞれ P，Q とする。

また点 H から DB にひいた垂線 HR と FQ との交点を S とする。

△OQF∽△ODB より

$QF=4\sqrt{2}$

△HQS は HS＝QS の直角二等辺三角形だから

HS＝QS＝x とおくと

$HS:SF=x:QF-x=x:4\sqrt{2}-x$

また△HSF∽△NPF より

$HS:SF=NP:PF=\sqrt{2}:2\sqrt{2}=1:2$

よって $x:4\sqrt{2}-x=1:2$

$4\sqrt{2}-x=2x$

$4\sqrt{2}=3x$

$x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

また $SR=PM=\sqrt{2}$ だから

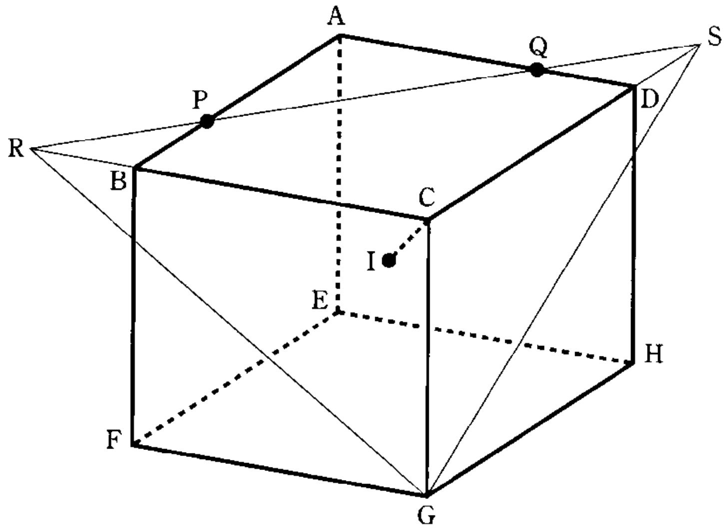
$HR=x+SR=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}=\dfrac{7}{3}\sqrt{2}$ cm

【問 3】

下の図のように，1 辺の長さが 3cm の立方体 ABCDEFGH があり，辺 AB 上に AP:PB＝2:1 となる点 P をとり，また，辺 AD 上に AQ:QD＝2:1 となる点 Q をとる。さらに，直線 PQ と CB の延長との交点を R，直線 PQ と CD の延長との交点を S とし，3 点 R，G，S を結んで△RGS をつくる。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（茨城県　2004 年度）



(1) 線分 RB の長さを求めなさい。

(2) 頂点 C から△RGS へひいた垂線と△RGS との交点を I とする。このとき，線分 CI の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm

解答

(1)　1 cm

(2)　$\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$ cm

解説

(1)

△APQ∽△BPR だから

AP：BP＝AQ：BR＝2：1 より

RB＝1 cm

(2)

RC＝SC＝3＋1＝4 cm

三角すい C－RGS の体積＝$4\times4\times\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{1}{3}=8$ cm³

点 G から RS に垂線をおろし RS との交点を J とする。

GS＝$\sqrt{3^2+4^2}=5$，GJ＝$\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$

CI を x cm とおく。

三角すい C－RGS の体積＝$4\sqrt{2}\times\sqrt{17}\times\dfrac{1}{2}\times x\times\dfrac{1}{3}=8$ より

$x=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$ cm

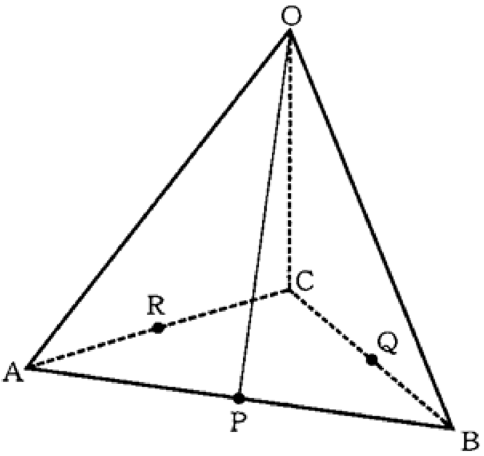
【問 4】

右の図 1 に示した立体 O－ABC は, AC＝BC＝OC＝8 cm, ∠ACB＝∠BCO＝∠OCA＝90°の三角すいである。辺 AB の中点をP, 辺 BC の中点を Q, 辺 CA の中点を R とする。頂点 O と点 P を結ぶ。

次の各問に答えよ。

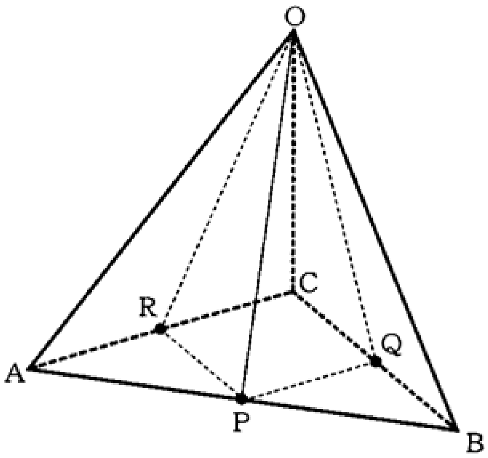
（東京都　2004 年度）

図 1



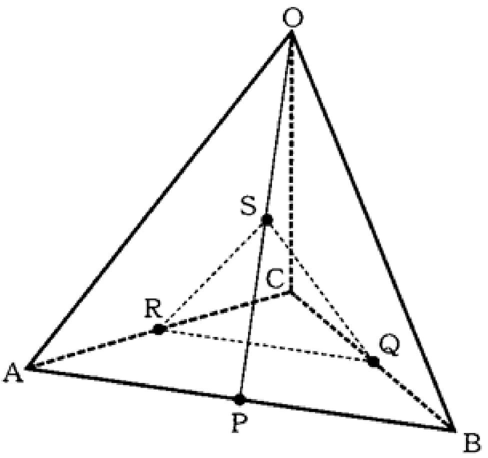
〔問 1〕右の図 2 は, 図 1 において, 頂点 O と点 R, 頂点 O と点 Q, 点 P と点 R, 点 P と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。四角すい O－PQCR の体積は, 三角すい O－ABC の体積の何分のいくつか。

図 2



〔問 2〕右の図 3 は, 図 1 において, 線分 OP 上を頂点 O から点 P まで動く点を S とし, 点 S と点 R, 点 R と点 Q, 点 Q と点 S をそれぞれ結んだ場合を表している。△SRQ の面積がもっとも小さくなるとき, △SRQ の面積は何 cm^2か。ただし, 答えに根号がふくまれるときは, 根号をつけたままで表せ。

図 3



解答欄

〔問1〕	
〔問2〕	cm^2

解答

〔問1〕 $\frac{1}{2}$

〔問2〕 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm^2

解説

〔問1〕

四角すい O－PQCR の体積は $4\times4\times8\times\frac{1}{3}=\frac{128}{3}$ cm^3

三角すい O－ABC の体積は $8\times8\times\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{3}=\frac{256}{3}$ cm^3

四角すい O－PQCR の体積:三角すい O－ABC の体積の比は 1:2

〔問2〕

対角線 CP と RQ の交点を D とする。

△SRQ の面積がもっとも小さくなるのは D から OP にひいた垂線と OP の交点が S となるときである。

PC＝$4\sqrt{2}$，OC＝8 より

OP＝$4\sqrt{6}$

また PD＝$2\sqrt{2}$

△OCP∽△DSP より

8:DS＝$4\sqrt{6}:2\sqrt{2}$

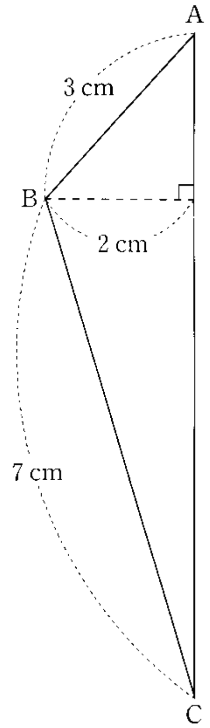
よって DS＝$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

△SRQ＝$\frac{1}{2}\times$RQ$\times$DS＝$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm^2

【問 5】

右の図は，AB＝3 cm，BC＝7 cm の三角形 ABC である。頂点 B から辺 AC に引いた垂線の長さが 2 cm のとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2004 年度）



(ア) 辺 AC の長さを求めなさい。

(イ) この三角形 ABC を，辺 AC を軸として 1 回転させたときにできる立体の表面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

(ア)	cm
(イ)	cm^2

解答

(ア)　$4\sqrt{5}$ cm

(イ)　20π　cm^2

解説

(ア)

$AC=\sqrt{3^2-2^2}+\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ cm

(イ)

点 B から AC にひいた垂線と AC との交点を D とする。

△ABD を回転させてできる円すいの側面の面積は

$3^2\times\frac{2}{3}\times\pi=6\pi$　cm^2

△CBD を回転させてできる円すいの側面の面積は

$7^2\times\frac{2}{7}\times\pi=14\pi$　cm^2

よって求める表面積は $6\pi+14\pi=20\pi$　cm^2

【問 6】

下の図 1 のような立体 ABC－DEF があり，図 2 はその展開図である。図 2 の展開図において，四角形 BEFC は長方形で，線分 GH，JI はともに線分 BE と平行である。また，2 点 J，H を結ぶと，線分 JH は線分 GC と平行になる。EF＝5 cm，FD＝3 cm，BE＝8 cm，∠EDF＝90° であるとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

（新潟県　2004 年度）

図 1

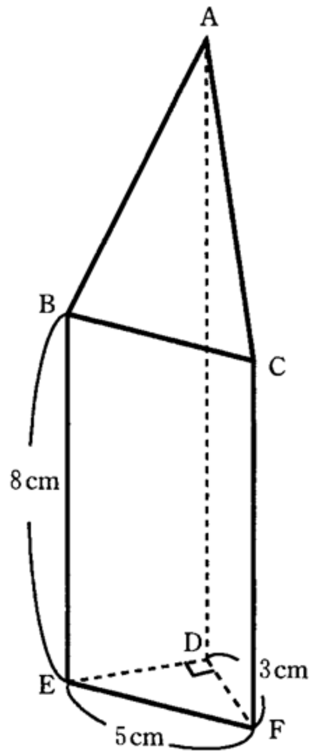
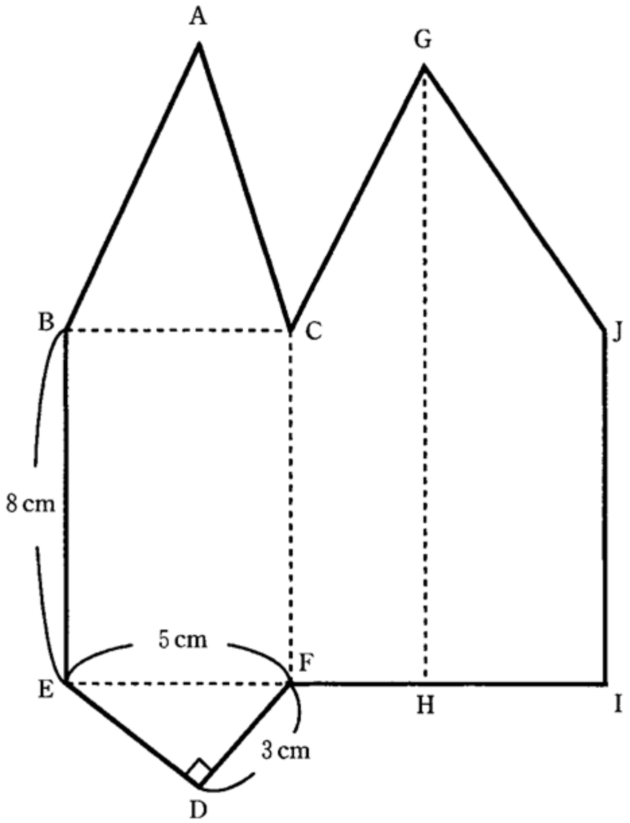


図 2



(1) 図 2 の展開図について、次の①，②の問いに答えなさい。

① 展開図を組み立てるとき，辺 AC，ED と重なる辺はそれぞれどれか，答えなさい。

② 線分 ED と線分 GH の長さを，それぞれ求めなさい。

(2) 図 1 の立体の体積を求めなさい。

(3) 図 1 の面 ABC の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="4">(1)</td><td rowspan="2">①</td><td>ACと重なる辺</td></tr>
<tr><td>EDと重なる辺</td></tr>
<tr><td rowspan="2">②</td><td>ED＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td>GH＝　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">cm^3</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

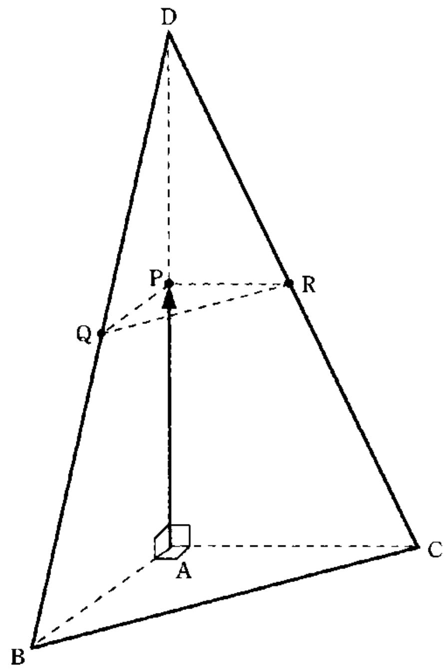
解答
(1)
①
ACと重なる辺　GC
EDと重なる辺　IH
②
ED＝4 cm
GH＝14 cm
(2)　60 cm^3
(3)　$3\sqrt{29}$ cm^2
解説
(1)
①
ACと重なる辺　GC，EDと重なる辺　IH
②
〔求め方〕
EDの長さをxとすると△EDFについて三平方の定理より
$x^2+3^2=5^2$
$x=4$ cm
また図2の点CからGHに垂線CKをひく。
CG∥HJ，∠CKG＝∠HIJ＝90°より
△CKG∽△HIJ
これよりCK＝FH＝FD＝3 cmで
3:KG＝4:8
KG＝6 cm
よってGH＝GK＋KH＝6＋8＝14 cm
ED＝4 cm
GH＝14 cm
(2)
〔求め方〕
三角柱の部分と三角すいの部分に分けて考えて
$\frac{1}{2}\times4\times3\times8+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times3\times6=48+12=60$ cm^3
60 cm^3
(3)
〔求め方〕
点Aから辺BCに垂線ALをひく。
AC＝GCより
$AC^2=6^2+3^2=45$
またAB＝GJより
$AB^2=6^2+4^2=52$
△ABLと△ACLでBL＝x cmとすると
$52-x^2=45-(5-x)^2$である。
これを整理してxについて解くと
$x=\frac{16}{5}$
よってAL＝$\sqrt{52-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{29}}{5}$
面ABCの面積は$\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{29}}{5}\times5=3\sqrt{29}$ cm^2
答　$3\sqrt{29}$ cm^2

【問 7】

右の図のように，辺 AB, AC, AD が，点 A で垂直に交わる三角錐 D−ABC がある。

AB ＝3 cm，AC ＝4 cm，AD ＝8 cm のとき，次の問いに答えなさい。

（富山県　2004 年度）

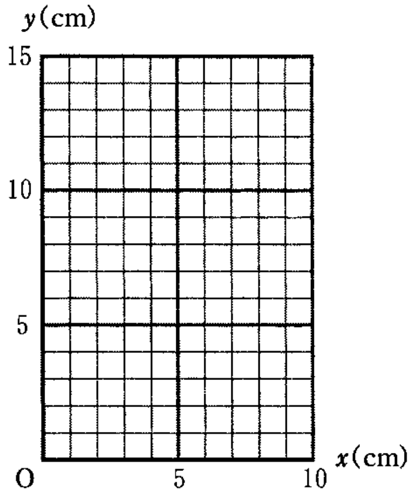


(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) 辺 AD 上を頂点 A から頂点 D まで動く点 P があり，辺 BD 上に点 Q，辺 CD 上に点 R がある。点 Q，R は，PQ //AB，PR //AC となるように動いている。

① AP＝5cm のとき，PQ，QR，RP の長さの和を求めなさい。

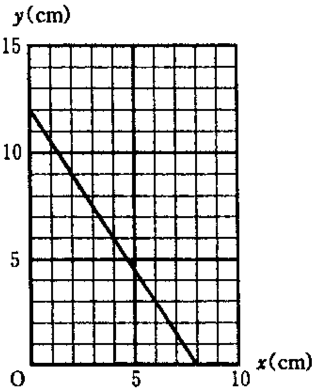
② AP の長さを x cm とし，PQ，QR，RP の長さの和を y cm とするとき，y を x の式で表しなさい。また，そのグラフをかきなさい。



解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>①</td><td>cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">②</td><td>式</td></tr>
<tr><td>問題用紙のグラフに記入</td></tr>
</table>

解答
(1) 5 cm
(2)
① $\frac{9}{2}$ cm
② $y=-\frac{3}{2}x+12$



解説
(1)
$BC^2=3^2+4^2=25$
BC＞0 より
BC＝5 cm
(2)
DP＝8－5＝3 cm
PQ : AB＝DP : DA より
PQ : 3＝3 : 8
$PQ=\frac{9}{8}$ cm
△PQR∽△ABC より
PQ : QR : RP＝3 : 5 : 4
$QR=\frac{5}{3}PQ=\frac{15}{8}$ cm
$RP=\frac{4}{3}PQ=\frac{3}{2}$ cm
よって $\frac{9}{8}+\frac{15}{8}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ cm
(3)
$PQ : 3=(8-x) : 8$
$PQ=3-\frac{3}{8}x$ cm
$QR=\frac{5}{3}(3-\frac{3}{8}x)=5-\frac{5}{8}x$ cm
$RP=\frac{4}{3}(3-\frac{3}{8}x)=4-\frac{1}{2}x$ cm
よって $y=(3-\frac{3}{8}x)+(5-\frac{5}{8}x)+(4-\frac{1}{2}x)=-\frac{3}{2}x+12$

【問 8】

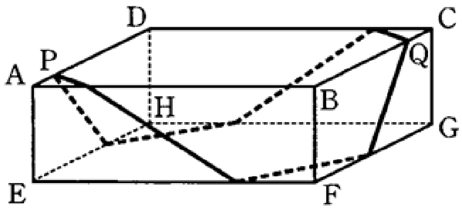
直方体の箱 ABCD－EFGH に，右の**図1**のように，辺 AD 上の点 P から始めて，辺 AB，EF，FG，BC，DC，HG，EH 上をこの順に通り，点 P にもどるようにひもをかける。辺 BC 上をひもが通る点を Q とする。

このとき，AP＝CQ となるようにし，ひもの長さは最短となるようにする。

AB＝12 cm，AD＝8 cm，AE＝4 cm とするとき，次の**1**～**3**に答えなさい。ただし，ひもの太さは考えないものとし，ひもは頂点にはかけることができないものとすること。

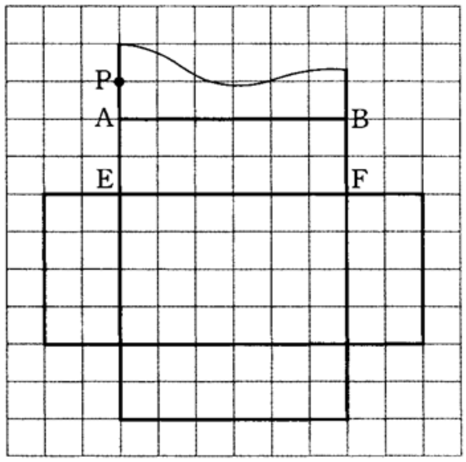
（山梨県　2004 年度）

図1



1　右の**図2**は，この直方体の展開図の一部を方眼紙にかいたものである。点 P が**図2**の位置にあるとき，P から辺 AB，EF，FG 上を通って点 Q までの部分のひものようすを，**図2**に定規を用いてかき入れなさい。ただし，Q も書き入れること。

図2



2　AP＝3 cm のとき，**全体の**ひもの長さを求めなさい。

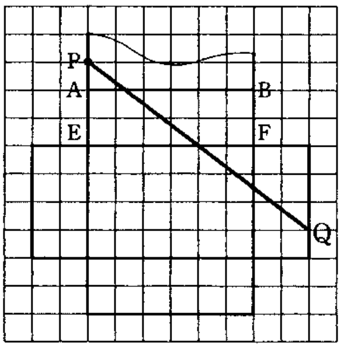
3　**2**で求めた長さのひもを使って，**図 1** のようにひもをかけようとしても，**かけることができなくなる**のは，AP の長さが何 cm 以上のときか求めなさい。

解答欄

1	問題用紙の図 2 に記入しなさい。
2	cm
3	cm 以上

解答

1



2　40 cm

3　5 cm 以上

解説

2

3＋4＋5＝12

$\sqrt{16^2+12^2}=20$

20×2＝40 cm

3

PQ と辺 FG との交点を T とする。

P が頂点 A と重なるときの FT の長さが求める長さになる。

AH：HQ＝TG：GQ

(4＋8)：(12＋4)＝TG：4

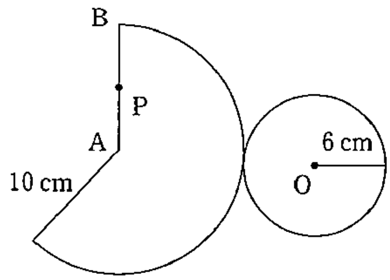
$TG=\frac{48}{16}=3$

FT＝FG－TG＝8－3＝5

【問 9】

右の図は，円錐の展開図で，側面は半径 10 cm のおうぎ形，底面は半径 6 cm の円である。

（長野県 2004 年度）



① 組み立ててできる円錐の体積を求めなさい。ただし，円周率は π を用いなさい。

② 底面の円の中心を O，母線 AB の中点を P とする。組み立ててできる円錐の表面を，点 O から点 P までたどっていくときの最短の長さを求めなさい。

解答欄

①	cm^3
②	cm

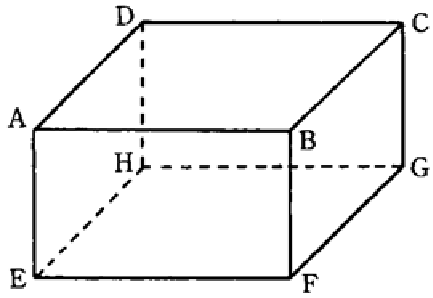
解答
① 96π cm^3
② 11 cm
解説
①
組み立ててできる円錐の高さは三平方の定理より
$\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$ cm
したがって $\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=96\pi$ cm^3
②
組み立てたときに点 B と底面の円周が接する点を Q とすると
求める最短の長さは PB＋OQ＝5＋6＝11 cm

【問 10】

図 3 の立体は，AB＝7cm，AD＝5cm，AE＝4cm の直方体である。このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

（静岡県　2004 年度）

図 3

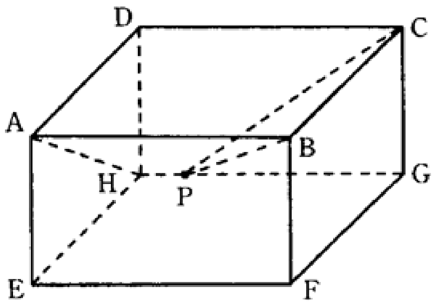


(1) この直方体において，辺 AB とねじれの位置にあり，面 BFGC と平行である辺はどれか。すべて答えなさい。

(2) 線分 EG の長さを求めなさい。

(3) この直方体において，図 4 のように，辺 GH 上に点 P をとる。∠AHE＝∠BPC となるときの，線分 CP の長さを求めなさい。

図 4



解答欄

(1)	
(2)	cm
(3)	cm

解答
(1) 辺 DH, 辺 EH
(2) $\sqrt{74}$ cm
(3) $\dfrac{25}{4}$ cm
解説
(2)
$EG = \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74}$ cm
(3)
△AEH と△BCP において
∠AHE＝∠BPC（仮定）…①
∠AEH＝∠BCP＝90°…②
①, ②より
△AEH∽△BCP
AE : EH＝BC : CP だから
4 : 5＝5 : CP
$CP = \dfrac{25}{4}$

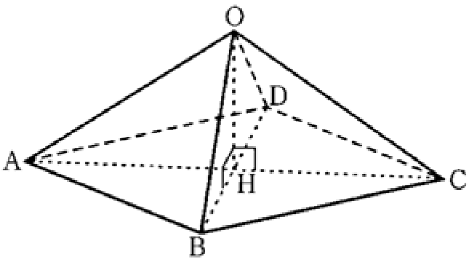
【問 11】

図Ⅰにおいて，立体 OABCD は O を頂点とする正四角すいである。H は底面の正方形 ABCD の対角線の交点である。O と H とを結ぶ。このとき，OH が正四角すい OABCD の高さになる。

OH＝3cm として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2004 年度 後期）

図Ⅰ

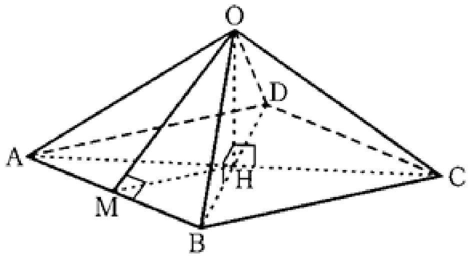


(1) AB＝$x$cm とするとき，

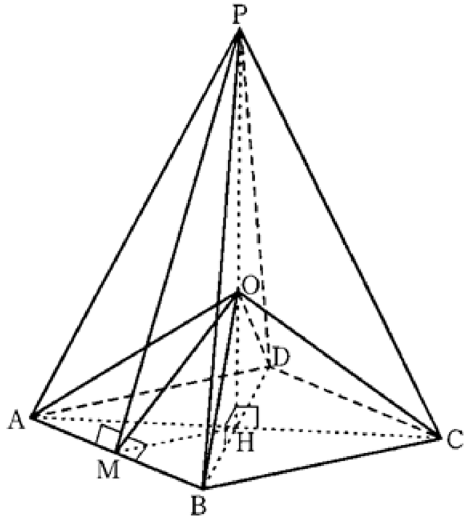
① 正四角すい OABCD の体積は何 cm^3 ですか。x を用いて表しなさい。

② 正四角すい OABCD の体積が $25cm^3$ であるときの x の値を求めなさい。

図Ⅱ



図Ⅲ



(2) 辺 AB の中点を M とし，O と M，H と M とをそれぞれ結ぶ。このとき，OM⊥AB である。図Ⅱは，図Ⅰに点 M と線分 OM，HM をかき加えたものである。

図Ⅱにおいて，AB＝6cm のとき，

① △OMH の内角∠MOH の大きさは何度ですか。

② 図Ⅱ中の点 O，A，B，H，M のうちの 3 点を結んでできる三角形のうち，△OMH と合同な三角形を△OMH を除いてすべて書きなさい。

③ 直線 OH 上に，H について O と同じ側に，点 P を PH＝3OH となるようにとる。P と A，P と B，P と C，P と D とをそれぞれ結んで正四角すい PABCD をつくる。P と M とを結ぶ。このとき，PM⊥AB である。図Ⅲは，図Ⅱに点 P と線分 PA，PB，PC，PD，PM をかき加えたものである。図Ⅲにおいて，正四角すい OABCD の側面積を S cm^2 とし，正四角すい PABCD の側面積を T cm^2 とするとき，T は S の何倍ですか。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>①</td><td>cm³</td></tr>
<tr><td>②</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>①</td><td>度</td></tr>
<tr><td>②</td><td></td></tr>
<tr><td>③</td><td>求め方

倍</td></tr>
</table>

解答
(1)
① x^2 cm^3
② 5
(2)
① 45 度
② △AHM，△BHM
③
求め方
OH＝MH＝3cm，∠OHM＝90° だから
OM＝$3\sqrt{2}$ cm
よって $S=\frac{1}{2}\times$AB$\times$OM$\times 4=36\sqrt{2}$ cm^2
PH＝9 cm，MH＝3 cm，∠PHM＝90° だから
PM＝$3\sqrt{10}$ cm
よって $T=\frac{1}{2}\times$AB$\times$PM$\times 4=36\sqrt{10}$ cm^2
したがって T は S の $\sqrt{5}$ 倍である。
答 $\sqrt{5}$ 倍
解説
(1)
① $\frac{1}{3}\times x^2\times 3=x^2$ cm^3
②
①より $x^2=25$
$x>0$ より
$x=5$
(2)
① △AMH と△ABC で
中点連結定理より
MH＝$\frac{1}{2}$BC＝$\frac{1}{2}$AB＝3 cm
よって△OHM は，OH＝MH＝3cm，∠OHM＝90° の直角二等辺三角形となる。
したがって∠MOH＝45°

【問 12】

図 1 のように，AE＝AD，AB＝2AEの直方体ABCD－EFGHがあり，面AEFB上に辺EFを直径とする半円をかき，この半円と辺ABとの接点をTとする。点Pを線分ATの両端をのぞいた部分にとり，点Pと点D，点Pと点Eをそれぞれ結び，線分EPと弧$\overset{\frown}{\mathrm{ET}}$との交点のうち，点Eと異なる点をQとする。また，点Fと点Qを結ぶ。

このとき，次の①，②では指示に従って答え，③では$\boxed{}$に適当な数を書き入れなさい。

（岡山県　2004 年度）

図 1

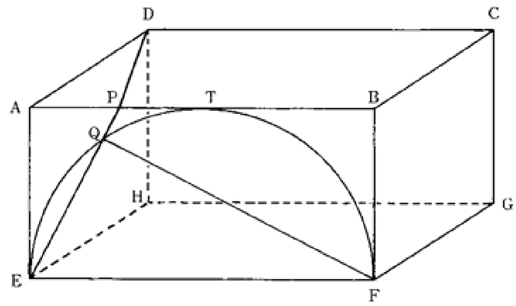
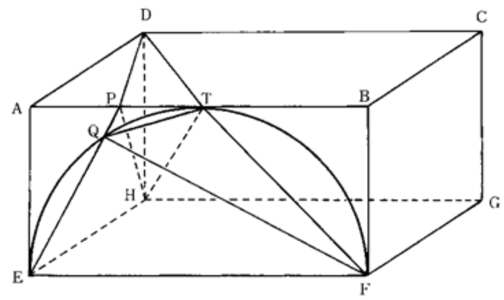


図 2



① △AEP≡△ADPとなることを，次のように証明した。

$\boxed{}$に適当な記号またはことばを書き入れなさい。

［証明］

△AEPと△ADPにおいて，四角形AEFBと四角形ABCDは長方形であるから，

∠EAP＝∠$\boxed{(ア)}$ … (1)

仮定より，AE＝AD … (2)

APは共通 … (3)

(1)，(2)，(3)より，$\boxed{\quad(イ)\quad}$がそれぞれ等しいから，△AEP≡△ADP

② △QFE∽△ADPを証明しなさい。

③ 図 2 は，さらに，点Tと点D，点Tと点F，点Tと点Q，点Tと点H，点Pと点Hをそれぞれ結んだものである。EF＝2 cm とし，EQ＝1 cm であるとき，FQ＝$\boxed{(ア)}$cm，∠TFQ＝$\boxed{(イ)}$° であり，弧$\overset{\frown}{\mathrm{QT}}$と弦QTで囲まれた部分の面積は$\boxed{(ウ)}$$\mathrm{cm}^2$である。また，三角錐HDPTの体積は$\boxed{(エ)}$$\mathrm{cm}^3$である。

解答欄

①	(ア)		
	(イ)		
②	（証明）		
③	(ア)	cm	
	(イ)	°	
	(ウ)	cm^2	
	(エ)	cm^3	

解答

①

(ア) DAP

(イ) 2 辺とその間の角

②

（証明）

△QFE と△ADP において

辺 EF が半円の直径で点 Q が弧 $\overset{\frown}{\mathrm{ET}}$ 上にあるから

∠EQF＝90°

また四角形 ABCD は長方形だから

∠PAD＝90°

よって∠EQF＝∠PAD…(1)

次に AB∥EF で錯角は等しいから

∠FEQ＝∠EPA…(2)

①より

△AEP≡△ADP であるから

∠EPA＝∠DPA…(3)

(2), (3)より

∠FEQ＝∠DPA…(4)

(1), (4)より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△QFE∽△ADP

③

(ア) $\sqrt{3}$ cm

(イ) 15 °

(ウ) $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}$ cm^2

(エ) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ cm^3

解説

③

(ア)

△QFE は直角三角形で $FQ^2+EQ^2=EF^2$ が成り立つ。

$FQ=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}\,cm$

(イ)

辺 EF の中点を O とすると

△TOF は OT＝OF の直角二等辺三角形であるから∠TFO＝45° となる。

△QFE は EF:EQ＝2:1 の直角三角形なので∠QFE＝30° である。

したがって∠TFQ＝45° −30° ＝15° となる。

(ウ)

∠TFQ＝15° より∠TOQ＝30° となる。

よって求める部分の面積は中心角が 30° のおうぎ形 OQT から△OQT の面積をひいたものである。

おうぎ形 OQT の面積$=1^2\times\pi\times\dfrac{30}{360}=\dfrac{\pi}{12}\,cm$

点 Q から OT へ垂線 QS をひくと OQ:QS＝2:1 であるから $QS=\dfrac{1}{2}\,cm$

よって$\triangle OQT=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

したがって求める面積は$\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}\,cm^2$

(エ)

△QFE は $EQ:QF=1:\sqrt{3}$ の直角三角形であるから

②より△ADP も $PA:AD=1:\sqrt{3}$

よって $PA=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,cm$ である。

よって $PT=AT-PA=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三角錐 HDPT の底面を△DPT とすると

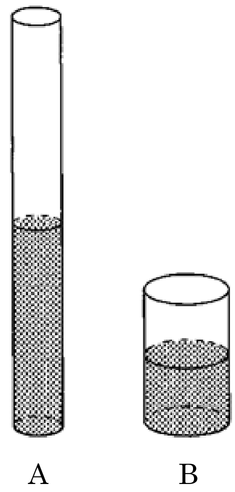
求める体積は$\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times1\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{18}\,cm^3$となる。

【問 13】

右の図のように，円柱の形をした 2 つの容器 A, B があります。容器 A は底面積が 1cm^2 で深さが 12cm，容器 B は底面積が 3cm^2 で深さが 4cm であり，それぞれに 6cm^3 ずつ水が入っています。正しくつくられた 1 つのさいころを続けて 2 回投げます。1 回目に出る目の数を x として容器 A から容器 B へ $x\text{cm}^3$ の水を，2 回目に出る目の数を y として容器 B から容器 A へ $y\text{cm}^3$ の水をピペットで移すものとします。

これについて，次の (1)・(2) に答えなさい。ただし，容器の厚さは考えないものとします。

（広島県 2004 年度）



(1) 容器 A の底から水面までの高さと，容器 B の底から水面までの高さが等しくなるとき，その高さを求めなさい。

(2) 容器 A の水の量が，容器 B の水の量の 2 倍になる確率を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	

解答

(1)　3 cm

(2)　$\dfrac{1}{9}$

解説

(1)

A の容器と B の容器の底面積の和は $1+3=4$ cm^2

A の容器と B の容器の水の量の合計は $6\times2=12$ cm^3

よって水面までの高さが等しくなるときの高さは $12\div4=3$ cm

(2)

容器 A の水の量が $12\times\dfrac{2}{3}=8$ cm^3 になるときを考える。

水を 2 回移したあとの容器 A の水の量は $6-x+y$ cm^3

これが 8 cm^3 になるのは $6-x+y=8$

つまり $y=x+2$ のときである。

よって(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)の 4 通りである。

さいころの目の出方は $6\times6=36$ 通り

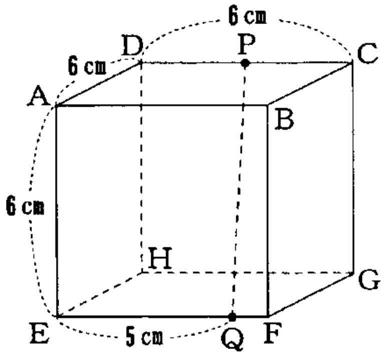
したがって確率は $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

【問 14】

右の図のような，1 辺が 6cm の立方体があり，点 P は辺 CD の中点である。辺 EF 上に点 Q をとり，点 P と点 Q を結ぶ。

EQ＝5cm であるとき，次のア，イの問いに答えよ。

（香川県　2004 年度）



ア　点 A と点 C，点 E と点 G をそれぞれ結ぶとき，四角形 AEGC の面積は何 cm^2 か。

イ　線分 PQ の長さは何 cm か。

解答欄

ア	cm^2
イ	cm

解答

ア　$36\sqrt{2}$ cm^2

イ　$2\sqrt{19}$ cm

解説

ア

$AC^2=6^2+6^2=72$

したがって $AC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$　$6\times 6\sqrt{2}=36\sqrt{2}$ cm^2

イ

点 P から EF に垂線 PI をおろす。

△PIQ は∠PIQ＝90°の直角三角形である。

$PI=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$IQ=EQ-3=5-3=2$

$PQ^2=(6\sqrt{2})^2+2^2$

$PQ=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$ cm

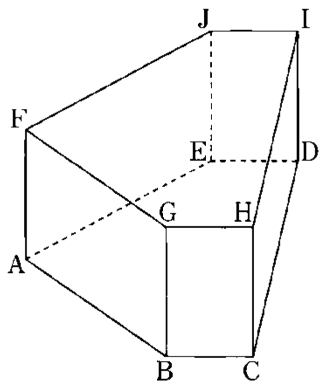
【問 15】

図は，底面ABCDEがCD＝6cm，∠BCD＝∠CDE＝90°，BC＝DE＝2cm，AB＝AE＝5cm の五角形で，側面がすべて長方形の五角柱ABCDEFGHIJを表しており，AF＝3cm である。

次の(1)～(3)の$\boxed{}$の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

ただし，根号を使う場合は$\sqrt{}$の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2004 年度）



(1) 図に示す立体で，辺ABとねじれの位置にある辺は，

全部で$\boxed{\qquad\text{本}}$ある。

(2) 図に示す立体の表面積は$\boxed{\qquad\text{cm}^2}$である。

(3) 図に示す立体において，点Fと点Cを結ぶ。このとき，線分FCの長さは$\boxed{\qquad\text{cm}}$である。

解答欄

(1)	本
(2)	cm^2
(3)	cm

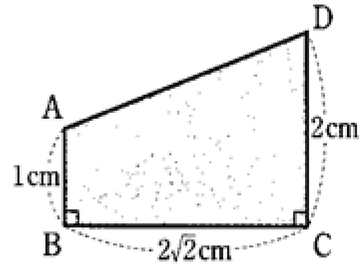
解答
(1)　7本
(2)　108 cm^2
(3)　$3\sqrt{6}$ cm
解説
(2)
頂点AからBEに垂線AKをひく。
△ABKは直角三角形なので AK＝$\sqrt{(AB)^2-(BK)^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$
よって△ABEの面積＝$\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$
長方形BCDE＝6×2＝12
表面積＝3×(6＋2＋2＋5＋5)＋2×(12＋12)＝108 cm^2
(3)
頂点Aを通り辺CDに平行な線とBCの延長上で交わる点をLとする。
△ALCは直角三角形なので
AC＝$\sqrt{3^2+(4+2)^2}=3\sqrt{5}$
よって FC＝$\sqrt{3^2+(3\sqrt{5})^2}=3\sqrt{6}$ cm

【問 16】

図 1、図 2、図 4 のように、台形 ABCD があり、AB＝1 cm、BC＝$2\sqrt{2}$ cm、CD＝2 cm、∠ABC＝∠BCD＝90° である。

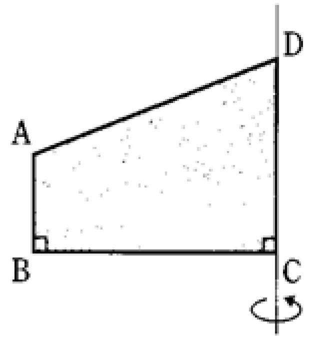
このとき、次の問いに答えなさい。

（長崎県　2004 年度）



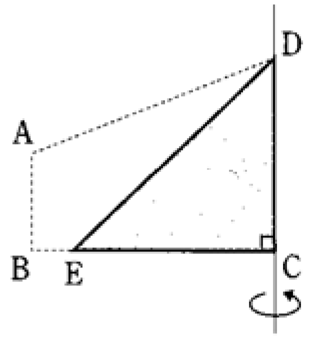
問 1　辺 AD の長さは何 cm か。

問 2　図 2 のように、台形 ABCD を、辺 CD を軸として 1 回転させてできる立体について、次の(1)、(2)に答えよ。

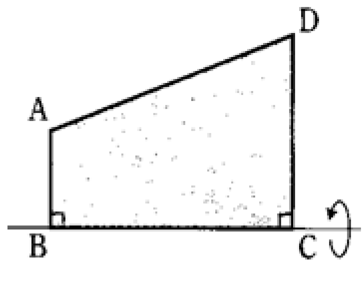


(1) この立体において、点 A が動いたあとにできた円の周の長さは何 cm か。

(2) この立体の体積は何 cm^3 か。



問 3　図 3 のように、図 1 の台形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとり、三角形 DEC をつくる。この三角形を辺 CD を軸として 1 回転させてできる立体の体積が、問 2 における立体の体積の $\frac{1}{3}$ になった。このとき、線分 EC の長さは何 cm か。



問 4　図 4 のように、台形 ABCD を、辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体の表面積は何 cm^2 か。

解答欄

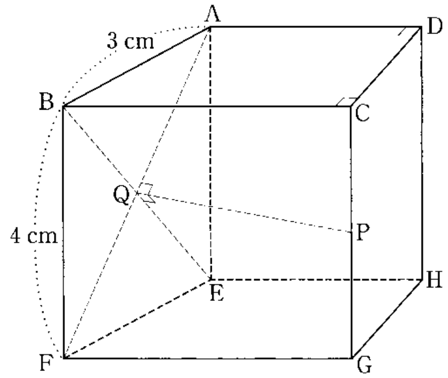
問1		cm
問2	(1)	cm
	(2)	cm^3
問3		cm
問4		cm^2

解答
問1　3 cm
問2
(1)　$4\sqrt{2}\pi$　cm
(2)　$\frac{32}{3}\pi$　cm^3
問3　$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
問4　14π　cm^2
解説
問1
$AD^2=(2\sqrt{2})^2+(2-1)^2=9$ より $AD=3$
問2
(1)
半径 $2\sqrt{2}$ の円周を描くので $2\times 2\sqrt{2}\times\pi=4\sqrt{2}\pi$
(2)
$\{(2\sqrt{2})^2\times\pi\times1\}+\{\frac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times\pi\times1\}=\frac{4}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times\pi=\frac{32}{3}\pi$
問3
$EC=x$ とすると $\frac{1}{3}\times x^2\times\pi\times2=\frac{1}{3}\times\frac{32}{3}\pi$ が成り立つ。
問4
$CD=2$ より
半径 2 の円周は 4π
$AD=3$ より
半径 6 の円周は 12π である。
したがって立体の側面は
$360^\circ\times\frac{4\pi}{12\pi}=120^\circ$ を中心角とする半径 6 の扇形から半径 3 の扇形をひいたものである。
よって $(1^2\times\pi)+(2^2\times\pi)+\frac{1}{3}\times(6^2\times\pi-3^2\times\pi)=14\pi$　cm^2 となる。

【問 17】

右の図は，四角形 ABCD を底面とし，4 つの側面がそれぞれ長方形の四角柱 ABCD－EFGH で，AB＝3cm，BF＝4cm，∠BCD＝∠CDA＝90° であり，BC は AD より 1cm 長い。また，辺 CG の中点を P，側面 ABFE の 2 つの対角線 AF，BE の交点を Q とすると，線分 PQ は平面 ABFE に垂直である。このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

（熊本県　2004 年度）



(1) 辺 CD の長さを求めなさい。

(2) 四角柱 ABCD－EFGH の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1)　$2\sqrt{2}$ cm

(2)　$32\sqrt{2}$ cm^3

解説

(1)

頂点 A から BC に垂線 AI をひく。

AI＝CD である。

△ABI で

BI＝1, AB＝3

三平方の定理より $AI=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ cm

(2)

頂点 E から FG に垂線 EJ をひく。

頂点 G から EF に垂線 GK をひく。

△EFJ∽△GFK より

EF : GF＝FJ : FK

K は EF の中点なので

$3:GF=1:\dfrac{3}{2}$

$GF=\dfrac{9}{2}$

よって $EH=\dfrac{9}{2}-1=\dfrac{7}{2}$

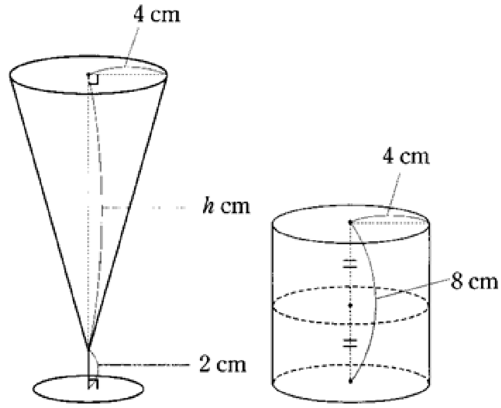
$$\frac{\left(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}\right)\times2\sqrt{2}}{2}\times4=32\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

【問 18】

図Ⅰのような 2 つのグラスがある。グラス A は，水が入る部分が円すいの形をしており，口の半径が 4cm，深さが h cm，足の高さが 2cm である。グラス B は円柱の形をしており，口の半径が 4cm，深さが 8cm である。グラス A に満たした水をすべてグラス B に移すとちょうど半分の高さまで水が入った。このとき，次の①～③の問いに答えなさい。ただし，グラスの厚さは考えないものとする。

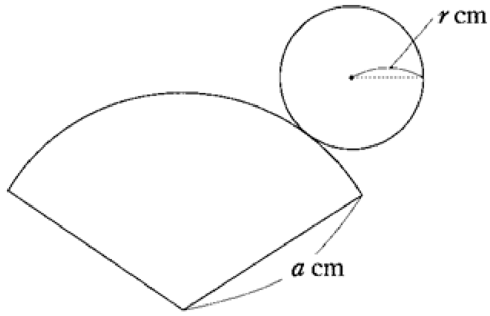
（大分県　2004 年度）

図Ⅰ



① h の値を求めなさい。

図Ⅱ



② 図Ⅱは，底面の半径が r cm で，母線の長さが a cm の円すいの展開図である。

次の（　ア　），（　イ　）に適する式を記入しなさい。ただし，円周率は π とする。

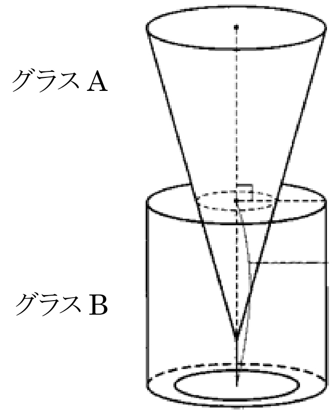
図Ⅱのおうぎ形の弧の長さは（　ア　）cm であるから，この円すいの側面積を Scm² とすると，

$S=(\ \text{イ}\ )\times\dfrac{(\ \text{ア}\ )}{2\pi a}=\pi ar$ となる。

このことから，円すいの側面積は

π ×（母線の長さ）×（底面の半径）で求められることがわかる。

図Ⅲ



③ グラス B に水を満たし，その中にグラス A を図Ⅲのように立てた。このとき，グラス A の，水面より上に出ている部分の側面積を求めなさい。ただし，グラス B には，グラスの口まで水が入っているものとする。また，円周率は π とする。

解答欄

①		cm
②	ア	cm
	イ	
③		cm^2

解答

① $h=12$ cm

②

ア $2\pi r$ cm

イ πa^2

③ $12\sqrt{10}\ \pi$ cm^2

解説

①

円すいの体積は$\frac{1}{3}\times4\times4\times\pi\times h=\frac{16}{3}\pi h$

これがグラス B の体積の半分と等しい。

グラス B の体積の半分は $4\times4\times\pi\times4=64\pi$

$\frac{16}{3}\pi h=64\pi$

$h=64\times\frac{3}{16}$

$=12$ cm

③

①より $h=12$ cm だから

円すいの母線の長さは$\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$ cm

水中部分の母線の長さは$2\sqrt{10}$ cm

したがって②の円すいの側面積の求め方より

$\pi\times4\sqrt{10}\times4-\pi\times2\sqrt{10}\times2$

$=16\sqrt{10}\pi-4\sqrt{10}\pi$

$=12\sqrt{10}\pi$ cm^2

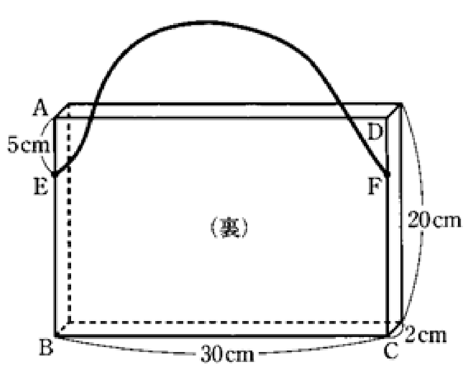
【問 19】

図Ⅰのような，縦 20 cm，横 30 cm，厚さ 2 cm の直方体の形をしたパネルがある。パネルの裏の面 ABCD の辺 AB，DC 上に，AE ＝DF ＝5 cm となるように点 E，F をとり，E と F をひもで結ぶ。

ひもを壁に固定する点をPとして，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。ただし，ひもの太さや結び目の長さは考えないものとする。

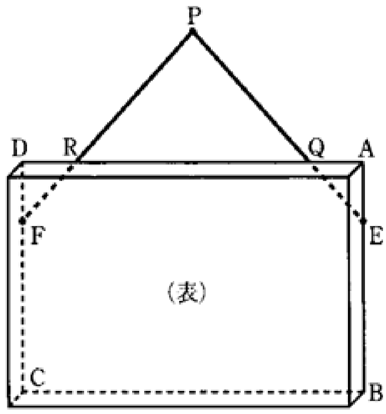
（宮崎県　2004 年度）

図Ⅰ



(1) 図Ⅰのパネルを，図Ⅱのように，表の面が正面を向くように壁につるした。辺 AD とひもとの交点を Q，R とするとき，次のア，イの問いに答えなさい。ただし，パネルの裏の面は壁にぴったりとくっついており，PE＝PF とする。

図Ⅱ

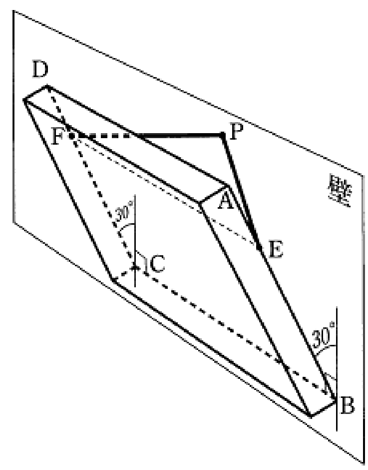


ア　ひもの長さを 60 cm にしたとき，∠RPQ の大きさを求めなさい。

イ　ひもの長さを 50 cm にしたとき，正面から見えるひもの長さ（PQ＋PR）を求めなさい。

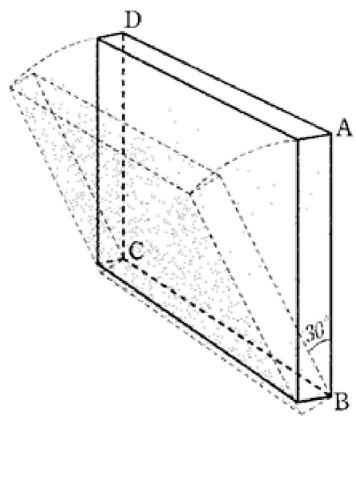
(2) 図Ⅲのように，辺 BC を壁に固定したまま，パネルを壁から 30°手前に傾け，面 ABCD と面 PEF が垂直になるように点 P の位置を決め，ひもの長さを調節して，パネルを固定した。PE＝PF として，ひもの長さを求めなさい。

図Ⅲ



(3) 図Ⅳは，図Ⅲのパネルを，辺 BC を壁に固定したまま，パネルの裏の面が壁にぴったりとくっつく位置まで動かしたものである。このとき，パネルが動いてできる立体（の部分）の体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

図Ⅳ



解答欄

(1)	ア	∠RPQ＝　　　　　度
	イ	cm
(2)		cm
(3)		cm^3

解答

(1)

ア　∠RPQ＝60 度

イ　$\frac{75}{2}$ cm

(2)　$20\sqrt{3}$ cm

(3)　$1010\pi+1200$ cm^3

解説

(1)

イ　$25\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$　$\frac{75}{4}+\frac{75}{4}=\frac{75}{2}$ cm

(2)

P からパネルにおろした垂線の長さを h cm とすると

$h:15=1:\sqrt{3}$

$h=5\sqrt{3}$

$\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2+15^2}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$　$10\sqrt{3}\times2=20\sqrt{3}$ cm

(3)

$20\times20\times\pi\times\frac{30°}{360°}\times30=1000\pi$

$2\times2\times\pi\times\frac{30°}{360°}\times30=10\pi$

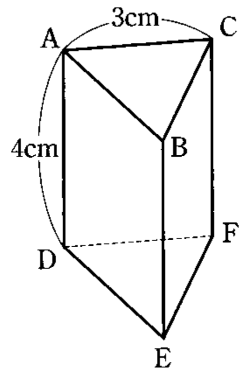
$30\times20\times2=1200$

$1000\pi+10\pi+1200=1010\pi+1200$ cm^3

【問 20】

右の図は，底面が正三角形で，側面がすべて長方形の三角柱 ABC－DEF である。AC＝3 cm，AD＝4 cm とするとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

（鹿児島県　2004 年度）



(1) 面 ABC に平行な辺を 1 つあげよ。

(2) 辺 BE 上に点 P を，AP＋PF の長さがもっとも短くなるようにとる。このとき，AP＋PF の長さは何 cm か。

解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1) DE または EF または DF

(2) $2\sqrt{13}$ cm

解説

(2)

展開図において

長方形 ADFC の対角線 AF と辺 BE との交点が P のとき最小となる。

AP＋PF＝AF＝$\sqrt{AD^2+DF^2}$

$=\sqrt{4^2+(3+3)^2}$

$=\sqrt{52}$

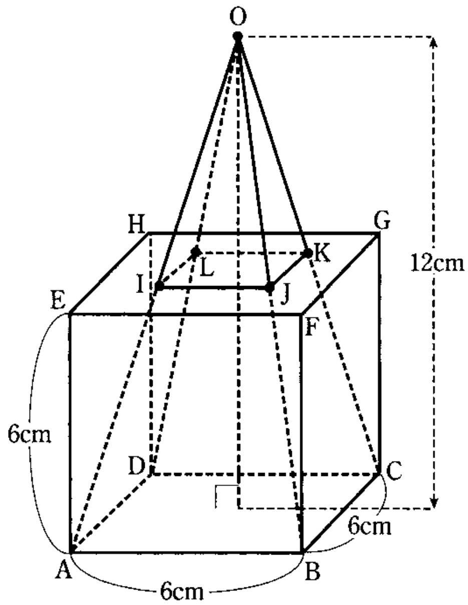
$=2\sqrt{13}$ cm

【問 21】

右の図のような 1 辺の長さが 6cm の立方体と高さが 12cm の四角すい OABCD がある。四角すいの辺 OA，OB，OC，OD と面 EFGH との交点をそれぞれ I，J，K，L とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県　2004 年度）



問 1　四角すい OABCD の体積を求めなさい。

問 2　線分 IJ の長さを求めなさい。

問 3　立体 IJKL－ABCD の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm^3
問 2	cm
問 3	cm^3

解答
問 1　144 cm^3
問 2　3 cm
問 3　126 cm^3
解説
問 1
$\frac{1}{3}\times 6^2\times 12 = 144$ cm^3
問 2
△OIJ∽△OAB で
相似比は 1:2
問 3
四角すい OABCD から四角すい OIJKL をひけばよい。
$144-(\frac{1}{3}\times 3^2\times 6)=144-18=126$ cm^3