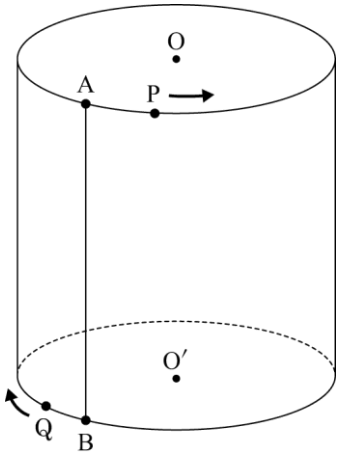


5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2019 年度出題】

【問 1】

右の図は、底面の半径が 5 cm、母線 AB の長さが 10 cm の円柱である。点 P は点 A を出発し、円 O の円周上を一定の速さで動き、1 周するのに 30 秒かかる。点 Q は点 B を出発し、円 O' の円周上を一定の速さで点 P と逆回りに動き、1 周するのに 45 秒かかる。2 点 P、Q が同時に出発するとき、次の (1)～(4) に答えなさい。

(青森県 2019 年度)



- (1) この円柱の表面積を求めなさい。
- (2) 5 秒後の $\angle AOP$ の大きさと線分 PB の長さを求めなさい。
- (3) 点 P が 1 周する間に $OP \parallel O'Q$ となるのは出発してから何秒後か、すべて求めなさい。ただし、出発時は考えないものとする。
- (4) 点 P が 1 周する間の線分 PQ の長さの変域を

㊦

 $\leq PQ \leq$

㊩

 で表すとき、

㊦

 ,

㊩

 の値を求めなさい。

解答欄

(1)	cm ²	
(2)	$\angle AOP$ 度	
	PB cm	
(3)		
(4)	㊦	
	㊩	

解答

(1) $150\pi \text{ cm}^2$

(2)

$\angle AOP$ 60 度

PB $5\sqrt{5} \text{ cm}$

(3) 9, 18, 27 (秒後)

(4)

㊦ 10

㊧ $10\sqrt{2}$

解説

(1)

底面積は、 $\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ また、側面の展開図は、縦が $AB = 10\text{cm}$ で、横が円 O の円周の長さの長方形とみることができるから、側面積は、 $10 \times (2\pi \times 5) = 100\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

よって、表面積は、 $25\pi \times 2 + 100\pi = 150\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

(2)

点 P は円 O の円周上を 1 周するのに 30 秒かかる。いいかえると、30 秒かけて点 O のまわりを 360°

回転する。よって、出発してから 5 秒後の $\angle AOP$ の大きさは、 $360^\circ \times \frac{5}{30} = 60^\circ$

また、 $\triangle OAP$ は $OA = OP$ の二等辺三角形だから、 $\angle AOP = 60^\circ$ のときは正三角形で、 $AP = OA = 5\text{cm}$

$\triangle ABP$ は $\angle BAP = 90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より、 $PB^2 = AP^2 + AB^2 = 5^2 + 10^2 = 125$

$PB > 0$ だから、 $PB = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ (cm)}$

(3)

2 点 P, Q が出発してから x 秒後の $\angle AOP$, $\angle BO'Q$ の大きさは、それぞれ $\angle AOP = 360^\circ \times \frac{x}{30} = 12x^\circ$, $\angle$

$BO'Q = 360^\circ \times \frac{x}{45} = 8x^\circ$ $OP \parallel O'Q$ となるのは、 $\angle AOP$ と $\angle BO'Q$ の和が 180° の倍数になるとき。

- ・ $\angle AOP + \angle BO'Q = 180^\circ \cdots 12x + 8x = 180$ より、 $x = 9$
- ・ $\angle AOP + \angle BO'Q = 360^\circ \cdots 12x + 8x = 360$ より、 $x = 18$
- ・ $\angle AOP + \angle BO'Q = 540^\circ \cdots 12x + 8x = 540$ より、 $x = 27$
- ・ $\angle AOP + \angle BO'Q = 720^\circ \cdots 12x + 8x = 720$ より、 $x = 36$ $x \leq 30$ だから、これはあてはまらない。

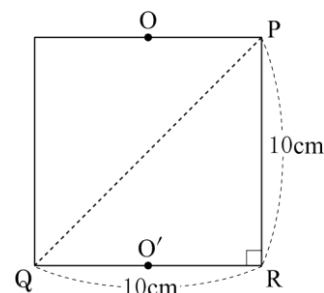
よって、出発してから 9 秒後、18 秒後、27 秒後。

(4)

PQ の長さが最小になるのは、出発時と出発してから 18 秒後。長さは母線の長さに等しく、 10cm

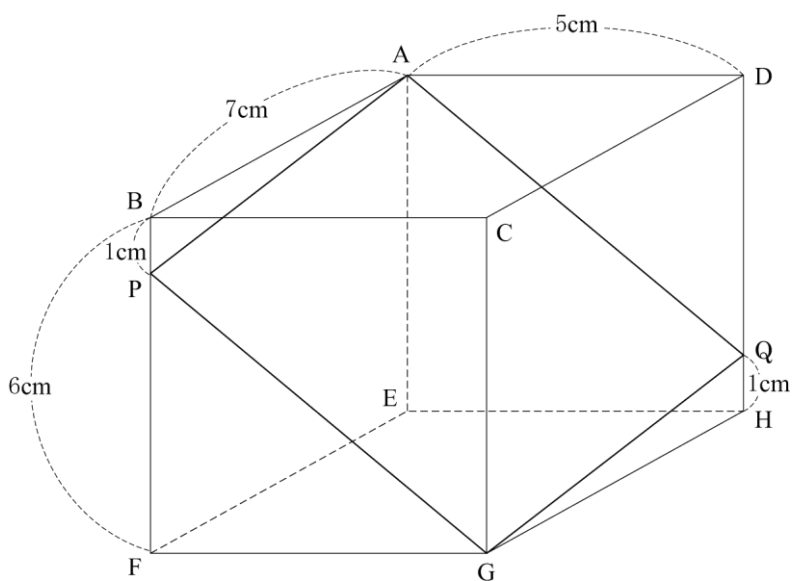
最大になるのは、出発してから 9 秒後、27 秒後で、 P を通る円柱の母線と円 O' との交点を R としたとき、線分 QR は円 O' の直径になる。よって、

$\triangle PQR$ は $PR = QR = 10\text{cm}$ の直角二等辺三角形になるから、 $PQ = \sqrt{2}PR = \sqrt{2} \times 10 = 10\sqrt{2} \text{ (cm)}$



【問 2】

下の図は、 $AB=7\text{ cm}$ 、 $AD=5\text{ cm}$ 、 $BF=6\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ です。辺 BF 、 DH 上にそれぞれ点 P 、 Q を、 $BP=HQ=1\text{ cm}$ となるようにとります。この直方体を、4 点 A 、 P 、 G 、 Q を通る平面で切ると、切り口はひし形になります。



このとき、次の問 1、問 2 に答えなさい。

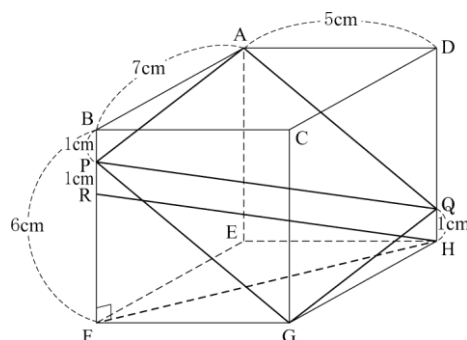
(岩手県 2019 年度)

問 1 AP の長さを求めなさい。

問 2 ひし形 $APGQ$ の面積を求めなさい。

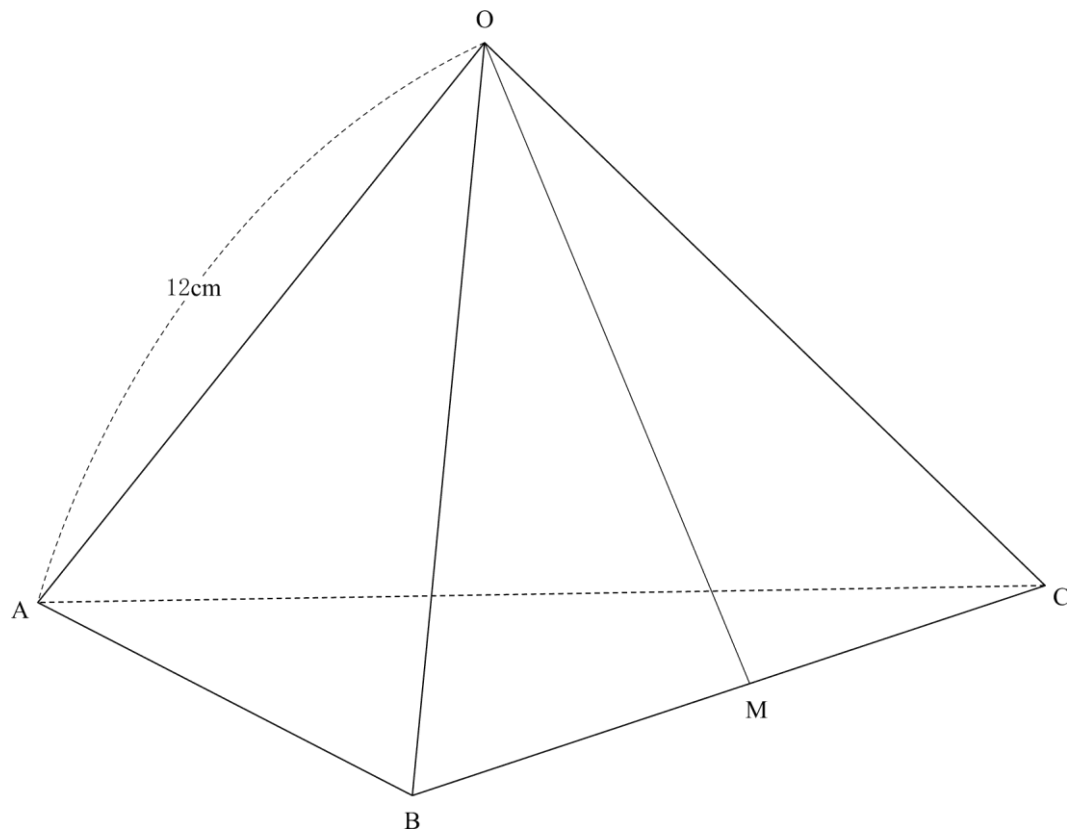
解答欄

問 1	cm
問 2	cm ²



【問 3】

下の図のような、1 辺 12 cm の正四面体 $OABC$ がある。辺 BC の中点を M とする。



このとき、次の問 1，問 2 に答えなさい。

(福島県 2019 年度)

問 1 線分 OM の長さを求めなさい。

問 2 辺 OC の中点を D とし、辺 OB 上に線分 AE と線分 ED の長さの和が最も小さくなるように点 E をとる。また、線分 AM 上に $AP : PM = 4 : 5$ となる点 P をとり、3 点 A, D, E を通る平面と線分 OP との交点を Q とする。

(1) 線分 OM と線分 DE との交点を R とするとき、線分 OR と線分 RM の長さの比を求めなさい。

(2) 三角錐^{すい} $QPBC$ の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm	
問 2	(1)	OR : RM =
	(2)	cm ³

解答

問1 $6\sqrt{3}$ cm

問2

(1) $OR : RM = 2 : 3$

(2) $32\sqrt{2}$ cm³

解説

問1

$\triangle OBM$ と $\triangle OCM$ は、 $OB=OC$, $BM=CM$, $OM=OM$ (共通)より、3辺がそれぞれ等しいから合同。よって、 $\triangle OBM$ は、 $\angle OMB=90^\circ$, $\angle OBM=60^\circ$ の直角三角形だから、 $OB : OM = 2 : \sqrt{3}$

$$OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}(\text{cm})$$

問2

(1)

$AE+ED$ の長さの和が最も小さくなるのは、右の展開図で、3点 A , E , D が一直線上に並ぶとき。このとき、点 E は辺 OB と線分 AD との交点になる。

$\angle COB = \angle OBA = 60^\circ$ より、錯角が等しいから、 $OD \parallel AB$

$$OE : EB = OD : AB = 6 : 12 = 1 : 2 \quad OE = OB \times \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}OB \text{ また、} \triangle$$

OBC で、2点 D , M はそれぞれ OC , BC の中点だから、中点連結定理より、 $DM \parallel OB$, $DM = \frac{1}{2}OB$

$$\text{よって、} OR : RM = OE : DM = \frac{1}{3}OB : \frac{1}{2}OB = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3$$

(2)

右の図は、3点 O , A , M を通る平面で正四面体 $OABC$ を切ったときの断面を表している。線分 AR は3点 A , D , E を通る平面上にあるから、線分 AR と線分 OP との交点 Q となる。

線分 AM 上に点 S を、 $RS \parallel OP$ となるようにとると、

$$PS : SM = OR : RM = 2 : 3 \quad \text{また、} AP : PM = 4 : 5$$

$$\text{よって、} AP : PS = 4 : 2 = 2 : 1$$

$$\text{さらに、} QP : RS = AP : AS = 2 : (2+1) = 2 : 3$$

$$RS : OP = RM : OM = 3 : (2+3) = 3 : 5$$

$$\text{よって、} QP = \frac{2}{3}RS = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}OP = \frac{2}{5}OP$$

O から AM にひいた垂線の長さを h cm とすると、 Q から AM にひいた垂線の長さは $\frac{2}{5}h$ cm となる。

これは、それぞれ正四面体 $OABC$, 三角錐 $QPBC$ の高さを表している。

ここで、 M から OA に垂線 MF をひく。 $\triangle OAM$ は $OA=12$ cm, $OM=AM=6\sqrt{3}$ cm の二等辺三角形だから、

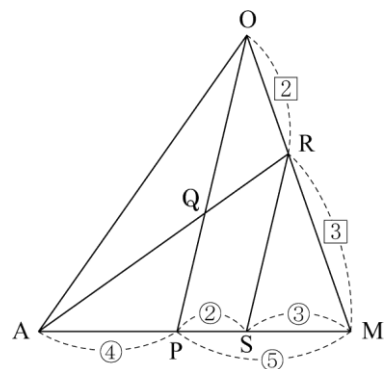
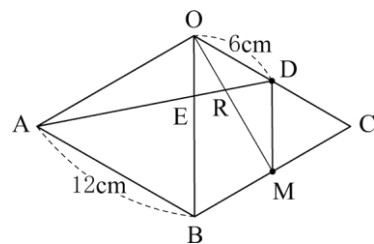
$$OF=AF=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2} \times 12=6(\text{cm}) \quad \triangle OFM \text{ で、三平方の定理より、}$$

$$MF^2 = OM^2 - OF^2 = (6\sqrt{3})^2 - 6^2 = 72 \quad MF > 0 \text{ だから、} MF = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\triangle OAM \text{ の面積について、方程式をつくると、} \frac{1}{2} \times OA \times MF = \frac{1}{2} \times AM \times h \quad \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times h$$

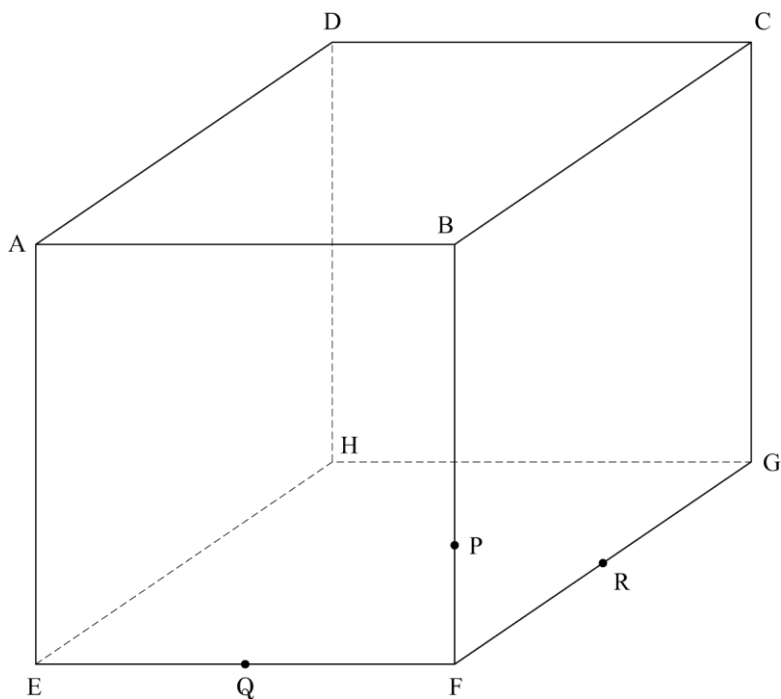
$$h = \frac{12 \times 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 4\sqrt{6} \quad \text{さらに、} \triangle PBC = \frac{1}{2} \times BC \times PM = \frac{1}{2} \times BC \times \frac{5}{9}AM = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{5}{9} \times 6\sqrt{3} = 20\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

$$\text{よって、三角錐 } QPBC \text{ の体積は、} \frac{1}{3} \times \triangle PBC \times \frac{2}{5}h = \frac{1}{3} \times 20\sqrt{3} \times \frac{2}{5} \times 4\sqrt{6} = 32\sqrt{2}(\text{cm}^3)$$



【問 4】

下の図のように、1 辺の長さが 4 cm の立方体 ABCDEFGH がある。辺 BF 上に点 P をとり、辺 EF, FG の中点をそれぞれ Q, R とする。



このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(茨城県 2019 年度)

問 1 AP+PG の長さを最も短くしたとき、AP+PG の長さを求めなさい。

問 2 3 点 A, Q, R を通る平面でこの立方体を切ったとき、切り口の図形の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm
問 2	cm ²

解答

問 1 $4\sqrt{5}$ (cm)

問 2 18 (cm²)

解説

問 1

AP+PG の長さが最も短くなるのは、立方体 ABCDEFGH を面 AEFB と面 BFGC がとなりあうようにしたときの展開図である長方形 AEGC において、点 A と点 G を線分で結んだときである。よって、そのときの線分 AG の長さは、三平方の定理より $\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}(\text{cm})$

問 2

3 点 A, Q, R を通る平面でこの立方体を切ったときの切り口の図形は台形 AQRC である。 $\triangle QFR$, $\triangle ABC$, $\triangle AEQ$ において、三平方の定理より $QR=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}(\text{cm})$, $AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}(\text{cm})$, $AQ=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}(\text{cm})$ 点 Q, R から線分 AC に垂線をひき、その交点をそれぞれ I, J とすると $IJ=QR=2\sqrt{2}\text{cm}$ である。 $AI=CJ$ だから、 $AI=(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})\div 2=\sqrt{2}(\text{cm})$ $\triangle AQI$ において、三平方の定理より $QI=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}(\text{cm})$ であるから、台形 AQRC の面積は

$$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 3\sqrt{2}=18(\text{cm}^2)$$

【問 5】

右の図 1 のような、正方形 $ABCD$ を底面とし、 $OA=OB=OC=OD$ の正四角錐 $OABCD$ があります。頂点 O から底面の正方形 $ABCD$ に垂線をひき、底面の正方形 $ABCD$ との交点を H とします。

このとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2019 年度)

問 1 $\triangle OHA$ と $\triangle OHB$ が合同であることを証明しなさい。

図 1

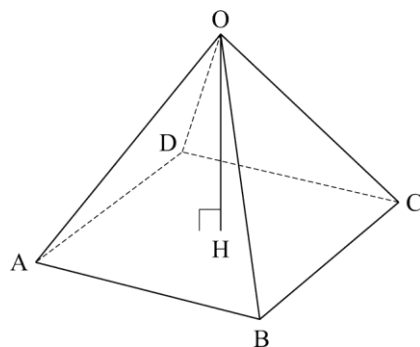
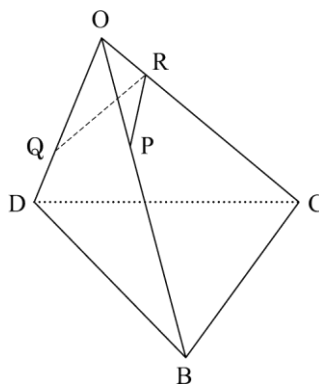


図 2



問 2 底面の正方形 $ABCD$ の 1 辺の長さが 6 cm 、 $OA=OB=OC=OD=6\text{ cm}$ のとき、次の (1)、(2) に答えなさい。

(1) 線分 OH の長さを求めなさい。

(2) 右の図 2 のように、正四角錐 $OABCD$ を 3 点 O , B , D を通る平面で切って、三角錐 $OBCD$ の辺 OB 上に $OP=2\text{ cm}$ となる点 P 、辺 OD 上に $OQ=4\text{ cm}$ となる点 Q をとります。辺 OC 上に点 R をとり、 $PR+RQ$ の長さが最も短くなるとき、三角錐 $OPRQ$ の体積を途中の説明も書いて求めなさい。その際、解答用紙の図を用いて説明してもよいものとします。

解答

問 1

〔説明〕

$\triangle OHA$ と $\triangle OHB$ において

仮定から

$$OA=OB\cdots\textcircled{1}$$

$$\angle OHA=\angle OHB=90^\circ\cdots\textcircled{2}$$

OH は共通 $\cdots\textcircled{3}$

①, ②, ③から

$\triangle OHA$ と $\triangle OHB$ は直角三角形で, 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

$$\triangle OHA\equiv\triangle OHB$$

問 2

$$(1) (OH=) \ 3\sqrt{2} \ (\text{cm})$$

(2)

〔説明〕

辺 OC 上に $OS=4 \text{ cm}$ となる点 S をとる。三角錐 $OBCD$ の展開図において

$$OR:SR=OP:SQ=1:2$$

よって

$$OR=\frac{4}{3}$$

また, 点 R から $\triangle OPQ$ にひいた垂線の長さを h とすると

$$\frac{4}{3}:h=6:3\sqrt{2}$$

$$h=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって, 三角錐 $OPRQ$ の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{9}$$

$$(\text{答え}) \ \frac{8\sqrt{2}}{9} \ (\text{cm}^3)$$

解説

問 1

OH ⊥ 面 ABCD だから、OH は面 ABCD 上の点 H を通るすべての直線に垂直になる。よって、 $\angle OHA = \angle OHB = 90^\circ$ が成り立つ。

問 2

(1)

H は正方形 ABCD の対角線 AC, BD の交点になるから、 $AH = \frac{1}{2}AC$ $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから、

$AB : AC = 1 : \sqrt{2}$ $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 6 = 6\sqrt{2}(\text{cm})$ よって、 $AH = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

$\triangle OAH$ で三平方の定理より、 $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 = 18$

$OH > 0$ だから、 $OH = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

(2)

$\triangle OBD$ は $OB = OD = 6\text{cm}$ で、 $BD = AC = 6\sqrt{2}\text{cm}$ だから

$OB : OD : BD = 6 : 6 : 6\sqrt{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

したがって、 $\triangle OBD$ は $\angle BOD = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

よって、 $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times OP \times OQ = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4(\text{cm}^2)$

これを三角錐 OPRQ の底面とすると、高さは R から $\triangle OPQ$ にひいた垂線 RI の長さになる。I は線分 OH 上にあって、 $RI \parallel CH$ となるから、

$RI : CH = OR : OC \cdots \textcircled{1}$

また、右下の展開図で、 $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ は 1 辺 6cm の正三角形だから、辺 OC 上に $OS = 4\text{cm}$ となる点 S をとると、 $\triangle OSQ$ は 1 辺 4cm の正三角形になる。 $\angle POS = \angle OSQ = 60^\circ$ で、錯角が等しいから $OP \parallel QS$ よって、 $OR : SR = OP : SQ = 2 : 4 = 1 : 2$

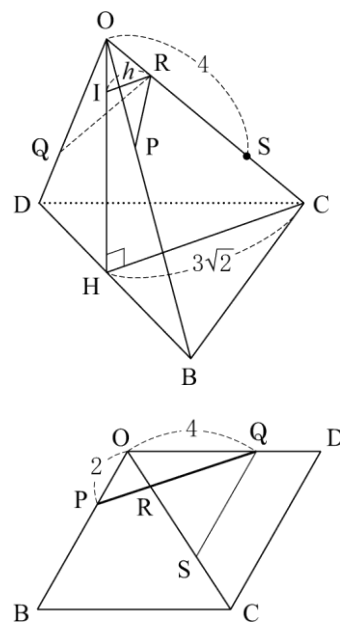
$OR : OS = 1 : (1 + 2) = 1 : 3$ $OR = \frac{1}{3}OS = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}(\text{cm})$

ここで、 $CH = AH = 3\sqrt{2}\text{cm}$ だから、 $RI = h\text{cm}$ とすると、 $\textcircled{1}$ より、

$$h : 3\sqrt{2} = \frac{4}{3} : 6 \quad 6h = 4\sqrt{2} \quad h = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

三角錐 OPRQ の体積は

$$\frac{1}{3} \times \triangle OPQ \times h = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{9}(\text{cm}^3)$$



【問 6】

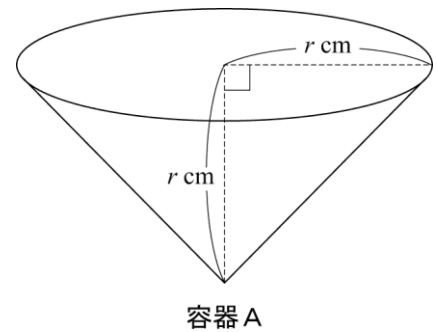
図 1 のように、底面の半径と高さがともに r cm の円錐の形をした容器 A があり、底面が水平になるように置かれている。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

ただし、円周率は π を用いることとし、容器の厚さは考えないものとする。

(千葉県 2019 年度 前期)

図 1



問 1 容器 A で $r=6$ cm のとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(1) 容器 A に水をいっぱいに入れたとき、水の体積を求めなさい。

(2) 水がいっぱいに入っている容器 A の中に、半径 2 cm の球の形をしたおもりを静かに沈めた。
このとき、容器 A からあふれ出た水の体積を求めなさい。

問 2 図 2 は、容器 A で $r=5$ cm のときに、水をいっぱいに入れたものである。また、図 3 は、底面の半径と高さがともに 5 cm の円柱の形をした容器に、半径 5 cm の半球の形をしたおもりを入れたものであり、これを容器 B とよぶことにする。

容器 A に入っているすべての水を、容器 B に静かに移していく。

このとき、容器 B から水はあふれるか、あふれないかを答えなさい。ただし、その理由を式とことばで書き、答えること。

図 2

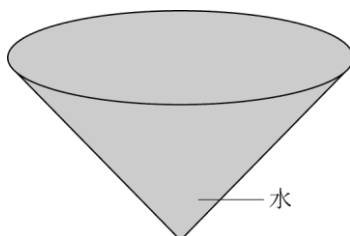
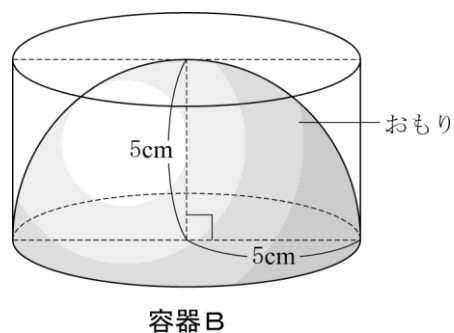


図 3



問3 図4は、容器Aで $r=10\text{ cm}$ のときに、水面の高さが 9 cm になるまで水を入れたものである。その中に底面の半径が 4 cm の円柱の形をしたおもりを、底面を水平にして静かに沈めると、容器Aから水があふれ出たあと、図5のように円柱の形をしたおもりの底面と水面の高さが等しくなった。

このとき、容器Aからあふれ出た水の体積を求めなさい。

図4

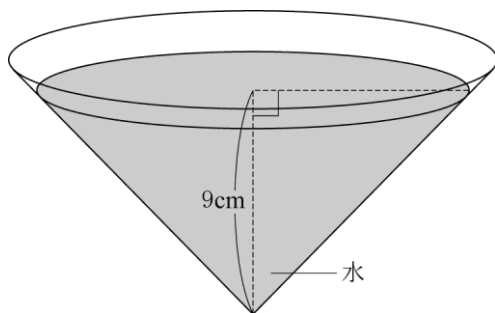
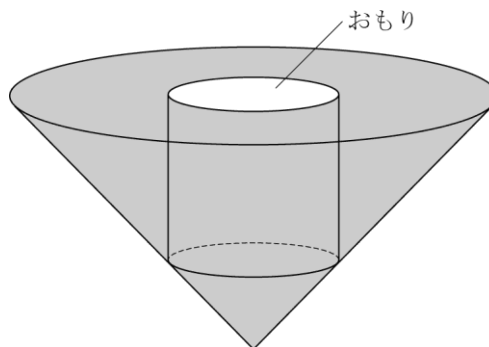


図5



解答欄

問1	(1)	cm^3
	(2)	cm^3
問2		
問3	cm^3	

解答

問 1

(1) $72\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

(2) $\frac{32}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

問 2

(容器 A の水の体積)

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{125}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)} \cdots \textcircled{1}$$

(容器 B に入る水の体積)

$$= \pi \times 5^3 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$$

$$= \frac{125}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)} \cdots \textcircled{2}$$

①と②は等しいので容器 B から水はあふれない。

問 3 $\frac{17}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

解説

問 1

(1)

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6 = 72\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

(2)

あふれ出た水の体積は沈めたおもり(半径 2cm の球)の体積と等しいから, $\frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

問 2

図 2 の容器 A の水の体積と図 3 の容器 B に入る水の体積を比べよう。

容器 A の水の体積は, $\frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 5 = \frac{125}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)} \cdots \textcircled{1}$ 容器 B に入る水の体積は, 円柱の容器の容積から

半球のおもりの体積をひいた差だから, $\pi \times 5^2 \times 5 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{125}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)} \cdots \textcircled{2}$

①と②は等しいので, 容器 B から水はあふれない。

問 3

図 5 の立体を, 水面に垂直で容器の頂点を通る平面で切った断面図を考えると右の図のようになる。BC // DE だから, AD:AB=DE:BC AD:10=4:10 AD=4(cm)

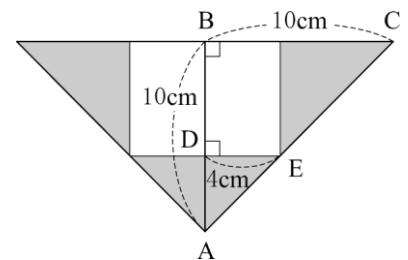
DB=10-4=6(cm) よって, おもりの体積は

$$\pi \times 4^2 \times 6 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

したがって, (あふれた水の体積)=(図 4 の水の体積)+

$$(\text{おもりの体積}) - (\text{円錐の容器に入る水の体積}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 9 + 96\pi - \frac{1}{3}$$

$$\times \pi \times 10^2 \times 10 = 243\pi + 96\pi - \frac{1000}{3}\pi = \frac{17}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



【問 7】

右の図 1 に示した立体 A-BCD は、 $AB=9\text{ cm}$ 、 $BC=BD=CD=6\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=\angle ABD=90^\circ$ の三角すいである。

辺 CD 上にある点を P、辺 AB 上にある点を Q とし、点 P と点 Q を結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2019 年度)

問 1 次の 中の「さ」に当てはまる数字を答えよ。

点 P が辺 CD の中点、 $AQ=6\text{ cm}$ のとき、

線分 PQ の長さは、 さ cm である。

図 1

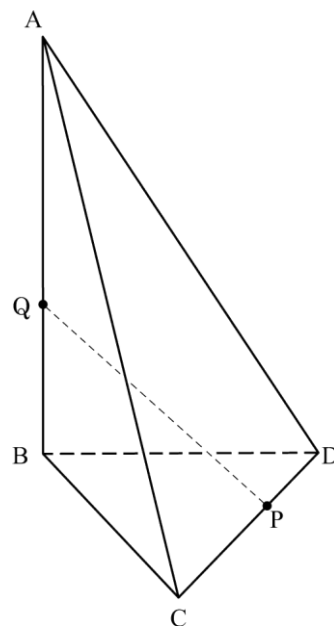
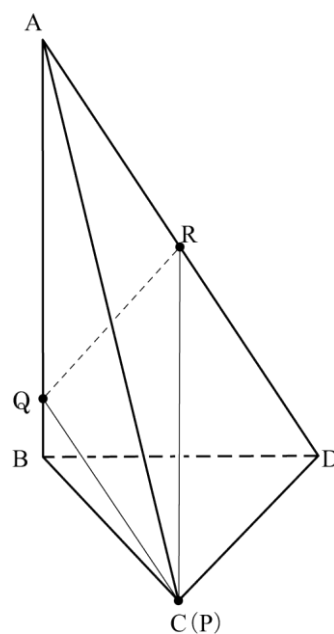


図 2



問 2 次の 中の「し」「す」「せ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の図 2 は、図 1 において、点 P が頂点 C と一致するとき、辺 AD の中点を R とし、点 P と点 R、点 Q と点 R をそれぞれ結んだ場合を表している。

$AQ=8\text{ cm}$ のとき、

立体 R-AQP の体積は、 し す $\sqrt{\text{ せ }}\text{ cm}^3$ である。

解答欄

問 1	さ	
問 2	し	
	す	
	せ	

解答

問 1

さ 6

問 2

し 1

す 2

せ 3

解説

問 1

点 B と点 P を結ぶと $\angle BPC = 90^\circ$ だから、 $\triangle BPC$ において三平方の定理より、
 $BP = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$ また、辺 AB と面 BCD は垂直なので、 $\angle QBP = 90^\circ$ だから、 $\triangle PBQ$ において
三平方の定理より、 $PQ = \sqrt{(9-6)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6(\text{cm})$

問 2

点 R から辺 AB に垂線をひき、辺 AB との交点を H とすると、三角形と比の定理より

$HR = \frac{1}{2}BD = 3(\text{cm})$ $\triangle AQR$ を底面として考えると、立体 R-AQP の高さは $3\sqrt{3}\text{cm}$ である。

よって、求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}(\text{cm}^3)$

【問 8】

右の図 1 は、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $BC=4\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とし、 $AD=BE=CF=2\text{ cm}$ を高さとする三角柱である。

また、点 G は辺 EF の中点である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2019 年度)

問 1 この三角柱の表面積として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | |
|---|------------------|---|------------------|
| 1 | 20 cm^2 | 2 | 24 cm^2 |
| 3 | 26 cm^2 | 4 | 30 cm^2 |
| 5 | 36 cm^2 | 6 | 48 cm^2 |

問 2 この三角柱において、3 点 B 、 D 、 G を結んでできる三角形の面積として正しいものを次の 1～6 の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | | |
|---|--------------------------|---|--------------------------|
| 1 | $\sqrt{10}\text{ cm}^2$ | 2 | $\sqrt{11}\text{ cm}^2$ |
| 3 | $\sqrt{13}\text{ cm}^2$ | 4 | $\sqrt{22}\text{ cm}^2$ |
| 5 | $2\sqrt{11}\text{ cm}^2$ | 6 | $2\sqrt{22}\text{ cm}^2$ |

問 3 この三角柱の表面上に、図 2 のように点 B から辺 EF 、辺 DF と交わるように、点 C まで線进行く。このような線のうち、長さが最も短くなるように引いた線の長さを求めなさい。

図 1

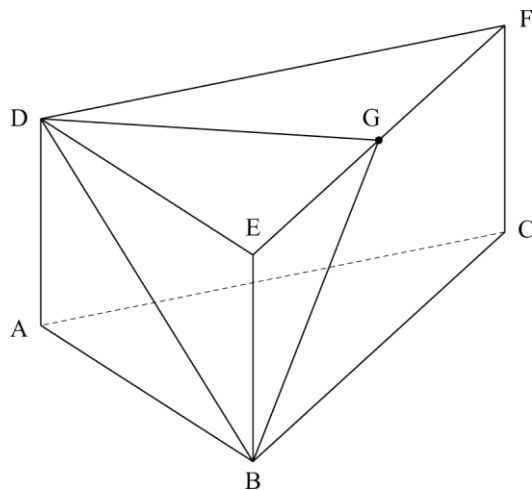
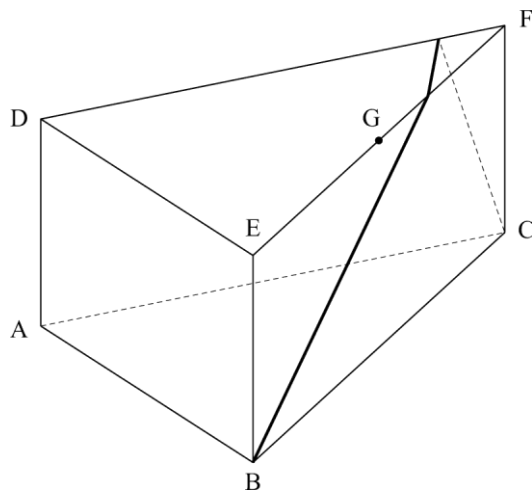


図 2



解答欄

問 1	
問 2	
問 3	cm

解答

問 1 5

問 2 4

問 3 $2\sqrt{10}$ cm

解説

問 1

底面積は、 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6(\text{cm}^2)$ また、 $\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad AC > 0 \text{ だから, } AC = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$$

この三角柱の展開図をかくと、側面は、縦が $AD = 2$ cm、横が $AB + BC + CA = 3 + 4 + 5 = 12(\text{cm})$ の長方形で表すことができる。よって、側面積は、 $2 \times 12 = 24(\text{cm}^2)$

したがって、表面積は $6 \times 2 + 24 = 36(\text{cm}^2)$

問 2

$\triangle BED$ で三平方の定理より、 $BD^2 = BE^2 + ED^2 = 2^2 + 3^2 = 13$ $BD > 0$ だから、 $BD = \sqrt{13}\text{cm}$

$\triangle GED$ は $\triangle BED$ と合同だから、 $GD = BD = \sqrt{13}\text{cm}$

また、 $\triangle EBG$ は $BE = GE$ の直角二等辺三角形で、 $BE : BG = 1 : \sqrt{2}$ $BG = \sqrt{2}BE = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}(\text{cm})$

二等辺三角形 BDG で、頂点 D から底辺 BG へ垂線 DH を引くと、 H は BG の中点で、 $BH = \sqrt{2}\text{cm}$

$\triangle DBH$ で三平方の定理より、 $DH^2 = BD^2 - BH^2 = (\sqrt{13})^2 - (\sqrt{2})^2 = 11$ $DH > 0$ だから、 $DH = \sqrt{11}\text{cm}$

よって、 $\triangle BDG = \frac{1}{2} \times BG \times DH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{11} = \sqrt{22}(\text{cm}^2)$

問 3

点 B から辺 EF 、辺 DF と交わって点 C まで引いた線のうち、長さが最も短いのは、右の展開図の線分 BC (太線) である。

ここで、2 点 I 、 J を図のようにとると、

$\triangle DEF$ と $\triangle FJC$ において

$$\angle DEF = \angle FJC = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle EDF = 180^\circ - \angle DEF - \angle DFE = 90^\circ - \angle DFE \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle JFC = 180^\circ - \angle DFC - \angle DFE = 90^\circ - \angle DFE \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } \angle EDF = \angle JFC \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ より、2 組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle DEF \sim \triangle FJC$

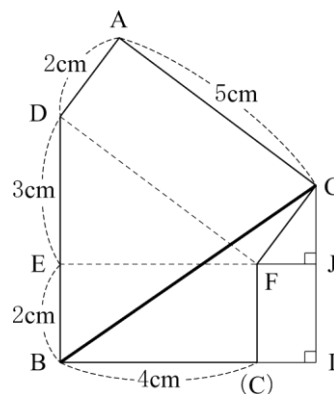
$$\text{よって, } DE : FJ = DF : FC \quad 3 : FJ = 5 : 2 \quad FJ = \frac{6}{5}(\text{cm})$$

$$\text{同様に, } EF : JC = DF : FC \quad 4 : JC = 5 : 2 \quad JC = \frac{8}{5}(\text{cm})$$

$\triangle BIC$ は $\angle I = 90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より

$$BC^2 = BI^2 + IC^2 = \left(4 + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(2 + \frac{8}{5}\right)^2 = 16 + \frac{48}{5} + \frac{36}{25} + 4 + \frac{32}{5} + \frac{64}{25} = 20 + \frac{80}{5} + \frac{100}{25} = 20 + 16 + 4 = 40$$

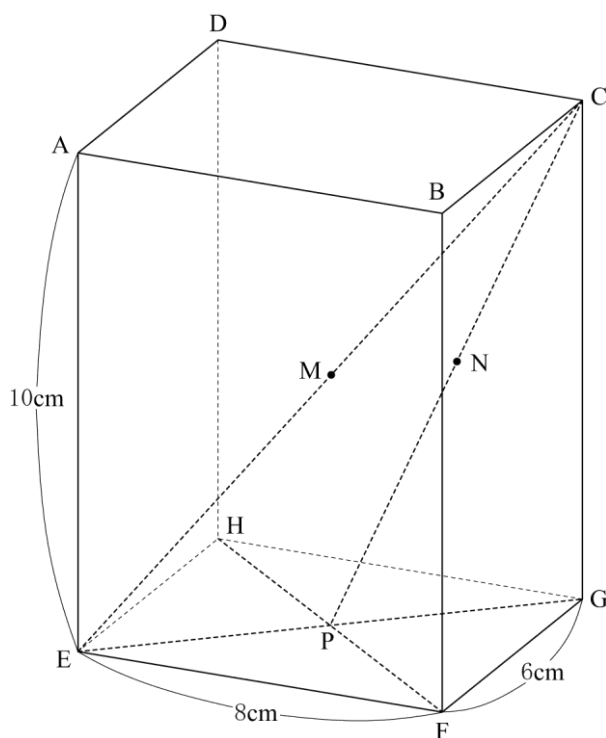
$$BC > 0 \text{ より, } BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}(\text{cm})$$



【問 9】

下の図のように、 $AE=10\text{ cm}$ 、 $EF=8\text{ cm}$ 、 $FG=6\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。線分 EG と線分 FH の交点を P とし、線分 CE 、 CP の中点をそれぞれ M 、 N とする。このとき、次の問 1～問 4 に答えなさい。

(新潟県 2019 年度)



問 1 線分 EG と線分 EC の長さを、それぞれ答えなさい。

問 2 線分 MN の長さを求めなさい。

問 3 $\triangle ENM$ の面積を求めなさい。

問 4 三角すい $BENM$ の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	EG	cm
	EC	cm
問 2	〔求め方〕	
	答	cm
問 3	〔求め方〕	
	答	cm ²
問 4	〔求め方〕	
	答	cm ³

解答

問 1

EG 10 cm

EC $10\sqrt{2}$ cm

問 2

〔求め方〕

$EP = \frac{1}{2}EG = 5$ cm である。

よって、 $\triangle CEP$ で中点連結定理から

$MN = \frac{1}{2}EP = \frac{5}{2}$ cm である。

答 $\frac{5}{2}$ cm

問 3

〔求め方〕

$\triangle ENM$ の底辺を MN とすると、高さは

$\frac{1}{2}AE = 5$ cm である。

よって、 $\triangle ENM$ の面積は

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$ cm² である。

答 $\frac{25}{4}$ cm²

問 4

〔求め方〕

三角すい BENM の底面を $\triangle ENM$ とすると、高さは、

点 B から面 AEGC に引いた垂線の長さとなる。これは、点 B から線分 AC に引いた垂線の長さと等しい。

点 B から線分 AC に引いた垂線と、線分 AC との交点を L とすると、垂線 BL の長さは、

$BL = \frac{4}{5} \times 6 = \frac{24}{5}$ cm である。

よって、三角すい BENM の体積は、

$\frac{1}{3} \times \frac{24}{5} \times \frac{25}{4} = 10$ cm³ である。

答 10 cm³

解説

問 1

$\triangle EFG$ において、三平方の定理より、 $EG = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (cm)

$\triangle CEG$ において、三平方の定理より、 $EC = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ (cm)

問 2

$EP = \frac{1}{2}EG = 5$ (cm) $\triangle CEP$ において、点 M、N はそれぞれ辺 CE、CP の中点だから中点連結定理より、

$MN = \frac{1}{2}EP = \frac{5}{2}$ (cm)

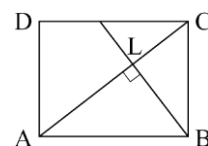
問 3

線分 MN を $\triangle ENM$ の底辺とすると、M、P はそれぞれ CE、EG の中点だから、高さは $MP = \frac{1}{2}AE =$

5 (cm) だから、 $\triangle ENM = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$ (cm²)

問 4

三角すい BENM の底面を $\triangle ENM$ とすると、高さは頂点 B から面 AEGC に引いた垂線の長さとなる。これは頂点 B から面 ABCD の対角線 AC に引いた垂線の長さと等しい。頂点 B から対角線 AC に引いた垂線と対角線 AC の交点を L とする。 $\triangle ABL \sim \triangle ACB$ より、 $BL : AB = CB : AC$



$BL : 8 = 6 : 10$ $BL = \frac{24}{5}$ (cm) よって、三角すい BENM の体積は $\frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times \frac{24}{5} = 10$ (cm³)

【問 10】

右の図 1 のように、1 辺 6 cm の立方体の形をした透明な容器を、底面 ABCD が水平な台の上に接するように置いてから、容器の体積の $\frac{2}{3}$ にあたる量の水を入れた。

このとき、次の問いに答えなさい。
ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(富山県 2019 年度)

問 1 右の図 2 のように、辺 AD を水平な台につけたまま、静かに傾けたところ、水面が長方形となった。このときの水面を長方形 EFGH とすると、 $AE=DH=5$ cm, $BF=CG$ であった。
このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) BF の長さを求めなさい。
- (2) 長方形 EFGH の面積を求めなさい。

問 2 右の図 3 のように、容器を底面 ABCD が水平な台の上に接するように置いてから、半径 3 cm の鉄球を容器の底につくまで静かに入れたところ、水があふれた。
水があふれなくなってから、鉄球を容器から静かに取り出したところ、右下の図 4 のようになった。
このときの底面 ABCD から水面までの高さを求めなさい。
ただし、円周率を π とし、鉄球を取り出すときに、容器内の水の量は変化しないものとする。

図 1

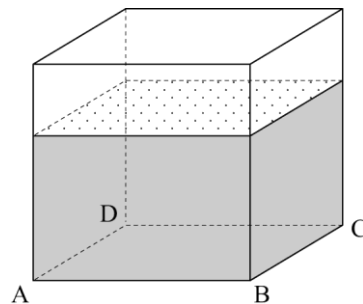


図 2

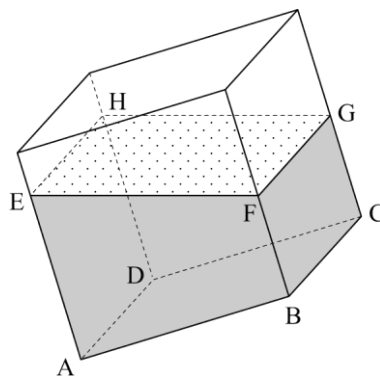


図 3

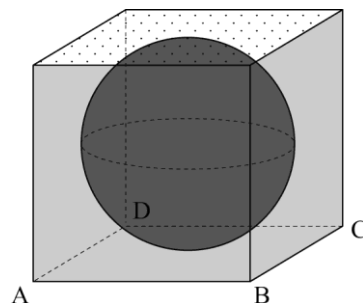
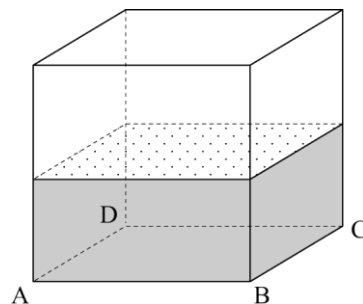


図 4



解答欄

問 1	(1)	cm
	(2)	cm ²
問 2	cm	

解答

問 1

(1) 3 cm

(2) $12\sqrt{10}$ cm²

問 2 $(6-\pi)$ cm

解説

問 1

(1)

台形 ABFE を底面とする四角柱 ABFE-DCGH の体積は、容器に入れた水の体積と等しく、

1 辺 6cm の立方体の体積の $\frac{2}{3}$ になる。台形 ABFE の面積も 1 辺 6cm の正方形の面積の $\frac{2}{3}$ となるから、BF=

xcm とすると、 $\frac{1}{2} \times (5+x) \times 6 = (6 \times 6) \times \frac{2}{3}$ $15+3x=24$ $x=3$ よって、BF=3cm

(2)

台形 ABFE で、点 F から辺 AE に垂線 FI をひくと、AI=BF=3cm, FI=BA=6cm

よって、△EIF で三平方の定理より、 $EF^2 = EI^2 + FI^2 = (5-3)^2 + 6^2 = 40$

$EF > 0$ だから、 $EF = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (cm) 長方形 EFGH の面積は、 $2\sqrt{10} \times 6 = 12\sqrt{10}$ (cm²)

問 2

鉄球は半径 3cm だから、その体積は、 $\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$ (cm³)

よって、鉄球を取り出したあと、容器に残った水の体積は、 $6^3 - 36\pi = 216 - 36\pi$ (cm³)

底面 ABCD から水面までの高さは、 $(216 - 36\pi) \div 6^2 = 6 - \pi$ (cm)

【問 11】

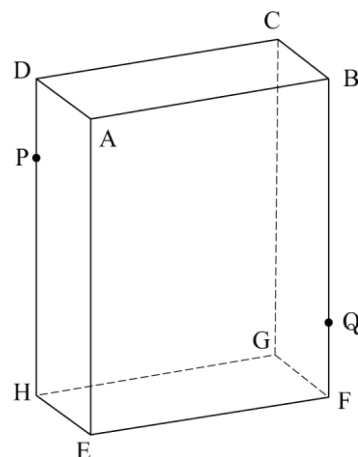
図 1, 図 2 のように, $AB=3\text{ cm}$, $AD=1\text{ cm}$, $AE=4\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 DH 上, 辺 BF 上にそれぞれ $DP=QF=1\text{ cm}$ となる点 P , Q をとる。

このとき, 次の問 1～問 3 に答えなさい。

(石川県 2019 年度)

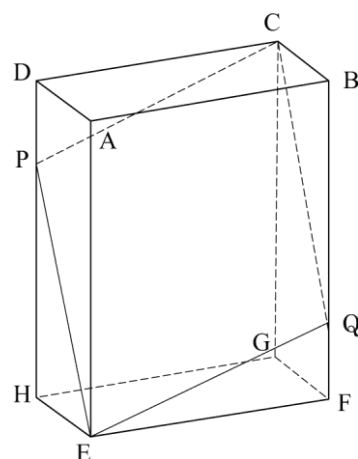
問 1 図 1 において, 辺 AB と平行な辺をすべて書きなさい。

図 1



問 2 図 2 のように, 4 点 C , P , E , Q を通る平面でこの直方体を切断したとき, 切り口の四角形 $CPEQ$ の面積を求めなさい。なお, 途中の計算も書くこと。

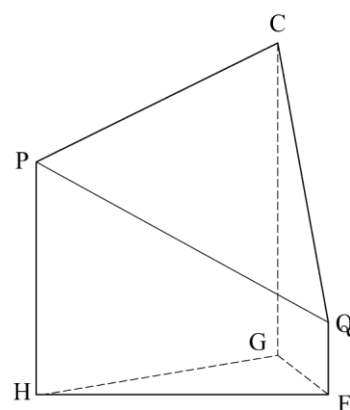
図 2



問 3 図 3 は, 問 2 で切断してできた 2 つの立体のうち, 頂点 G を含むほうを, さらに 4 点 P , H , F , Q を通る平面で切断してできた立体である。

このとき, 立体 $CPQ-GHF$ の体積を求めなさい。なお, 途中の計算も書くこと。

図 3



解答欄

問 1	
問 2	〔計算〕 答 cm^2
問 3	〔計算〕 答 cm^3

解答

問 1 辺 DC, 辺 EF, 辺 HG

問 2

〔計算〕

CP=PE=EQ=QC より, 四角形 CPEQ はひし形である。

$$CE=\sqrt{CG^2+GE^2}=\sqrt{4^2+3^2+1^2}=\sqrt{26}$$

$$\text{同様にして } PQ=\sqrt{(3-1)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$$

したがって, 求める面積は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\sqrt{14}=\sqrt{91}$$

〔答〕 $\sqrt{91}$ cm²

問 3

〔計算〕

3 点 Q, H, G を通る平面でこの立体を切断すると, 四角すい QPHGC と三角すい QHFG ができる。

したがって, 求める体積は

$$(3+4)\times 3\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{3}+3\times 1\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4$$

〔答〕 4 cm³

解説

問 1

辺 AB と平行な辺は辺 DC, 辺 EF, 辺 HG である。

問 2

四角形 CPEQ は 4 つの辺がすべて等しいからひし形である。

$$CE=\sqrt{CG^2+GE^2}=\sqrt{4^2+3^2+1^2}=\sqrt{26}(\text{cm})\text{で, 同様に } PQ=\sqrt{(3-1)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}(\text{cm})\text{である。}$$

$$\text{よって, 求める面積は}\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\sqrt{14}=\sqrt{91}(\text{cm}^2)$$

問 3

3 点 Q, H, G を通る平面でこの立体を切断すると, 四角すい QPHGC と三角すい QHFG に分けることができる。

$$\text{四角すい QPHGC の体積は}\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(3+4)\times 3\times 1=\frac{7}{2}(\text{cm}^3)\text{で,}$$

$$\text{三角すい QHFG の体積は}\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 3\times 1=\frac{1}{2}(\text{cm}^3)\text{である。よって, 求める体積は}\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=4(\text{cm}^3)$$

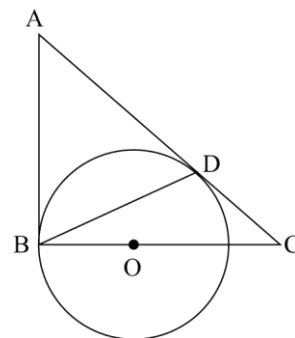
【問 12】

図で、円 O は中心が $\triangle ABC$ の辺 BC 上にあり、直線 AB 、 AC とそれぞれ点 B 、 D で接している。

$AB=2\text{ cm}$ 、 $AC=3\text{ cm}$ のとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(愛知県 A 2019 年度)

(1) 円 O の面積は何 cm^2 か、求めなさい。



(2) $\triangle DBC$ を辺 BC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積は、円 O を辺 BC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積の何倍か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm^2
(2)	倍

解答

$$(1) \frac{4}{5} \pi \text{ cm}^2$$

$$(2) \frac{25}{72} \text{ 倍}$$

解説

(1)

点 O と点 D を結ぶ。円の接線は接点を通る半径と垂直だから、 $\angle OBA = \angle ODC = 90^\circ$

$\triangle ABC$ で三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}(\text{cm}) \quad \text{よって、} \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2 = \sqrt{5}(\text{cm}^2)$$

点 O と点 A を結ぶ。円 O の半径を $r\text{cm}$ とすると、 $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times r = r(\text{cm}^2)$ 、 $\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 3 \times r = \frac{3}{2}r(\text{cm}^2)$

$\triangle OAB + \triangle OAC = \triangle ABC$ より、 $r + \frac{3}{2}r = \sqrt{5} \quad r = \frac{2}{5}\sqrt{5}(\text{cm})$ だから、円 O の面積は、

$$\pi \times \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \pi (\text{cm}^2)$$

(2)

円外の点から 1 つの円に引いた 2 本の接線の長さは等しいので、 $AD = AB = 2\text{cm}$ 、 $DC = 3 - 2 = 1(\text{cm})$

(1) より、 $\triangle ABC = \sqrt{5}\text{cm}^2$ だから、 $\triangle DBC = \triangle ABC \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5}(\text{cm}^2)$ 点 D から辺 BC に引いた垂線と辺

BC との交点を H とすると、 $\triangle DBC$ の面積について $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times DH = \frac{1}{3}\sqrt{5}$ が成り立つから、 $DH = \frac{2}{3}\text{cm}$

$\triangle DBC$ を辺 BC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times BH + \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times CH = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{4}{9} \times BC = \frac{4}{27}\sqrt{5} \pi (\text{cm}^3)$$

円 O を辺 BC を回転の軸として 1 回転させてできる立体は半径 OB の球で、(1) より、 $OB = \frac{2}{5}\sqrt{5}\text{cm}$ だか

ら、その体積は、 $\frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^3 = \frac{32}{75}\sqrt{5} \pi (\text{cm}^3)$

よって、 $\frac{4}{27}\sqrt{5} \pi \div \frac{32}{75}\sqrt{5} \pi = \frac{4\sqrt{5} \pi}{27} \times \frac{75}{32\sqrt{5} \pi} = \frac{25}{72}(\text{倍})$

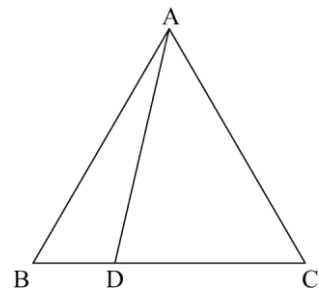
【問 13】

図で、 $\triangle ABC$ は正三角形であり、 D は辺 BC 上の点で、 $BD : DC = 1 : 2$ である。

$AB = 6 \text{ cm}$ のとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(愛知県 B 2019 年度)

(1) 線分 AD の長さは何 cm か、求めなさい。



(2) 線分 AD を折り目として平面 ABD と平面 ADC が垂直となるように折り曲げたとき、点 A , B , C , D を頂点としてできる立体の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) $2\sqrt{7} \text{ cm}$

(2) $\frac{18\sqrt{7}}{7} \text{ cm}^3$

解説

(1)

$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を M とすると、二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分するので、 $AM \perp BC$, $BM = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$ $\triangle ABM$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形だから、 $AM = BM \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$ $BD : DC = 1 : 2$ より、 $BD = 6 \div 3 = 2(\text{cm})$ だから、 $DM = 3 - 2 = 1(\text{cm})$ $\triangle ADM$ で三平方の定理より、 $AD = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}(\text{cm})$

(2)

折り曲げる前の平面の図で、点 B から直線 AD に引いた垂線と直線 AD との交点を H とすると、折り曲げたときにできる立体は、底面が $\triangle ADC$, 高さが線分 BH の三角すいとなる。

$\triangle ADM$ と $\triangle BDH$ において、 $\angle AMD = \angle BHD = 90^\circ$, 対頂角は等しいから、 $\angle ADM = \angle BDH$ よって、2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ADM \sim \triangle BDH$ したがって、 $AD : BD = AM : BH$

$$2\sqrt{7} : 2 = 3\sqrt{3} : BH \quad BH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}(\text{cm})$$

また、 $\triangle ADC = \triangle ABC \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = 6\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ だから、

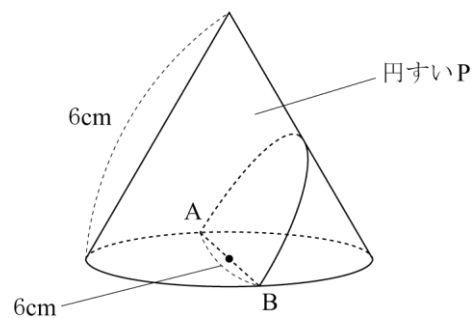
$$\text{求める体積は、} \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{21}}{7} = \frac{18\sqrt{7}}{7}(\text{cm}^3)$$

【問 14】

次の図のように、長さが 6 cm の線分 AB を直径とする円を底面とし、母線の長さが 6 cm の円すい P がある。この円すい P の側面に、点 A から点 B まで、ひもをゆるまないようにかける。

このとき、次の各問いに答えなさい。

ただし、円周率は π とし、答えの分母に $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、分母を有理化しなさい。また、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。



(三重県 2019 年度)

(1) 円すい P の体積を求めなさい。

(2) 円すい P の側面積を求めなさい。

(3) かけたひもの長さが最も短くなるときのひもの長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm^2
(3)	cm

解答

(1) $9\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

(2) $18\pi \text{ cm}^2$

(3) $6\sqrt{2} \text{ cm}$

解説

(1)

円すい P の頂点を C とする。円すい P を頂点 C と底面の円の中心を通る面で切ると、切り口は 1 辺が 6cm の正三角形である。この正三角形の高さが円すい P の高さである。切り口の正三角形を $\triangle CDE$ とおき、頂点 C から辺 DE に垂線をひき、その交点を H とする。 $\triangle CDH$ において、三平方の定理より、 $CH = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

よって、円すい P の体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi (\text{cm}^3)$

(2)

円すい P の側面の展開図のおうぎ形の弧の長さは底面の円周の長さと等しい。円周の長さは $6\pi \text{ cm}$ だから、おうぎ形の弧の長さも $6\pi \text{ cm}$ である。

よって、おうぎ形の中心角は $360^\circ \times \frac{6\pi}{12\pi} = 180^\circ$ だから、側面は半径 6cm の半円である。

したがって、側面積は $\pi \times 6^2 \times \frac{1}{2} = 18\pi (\text{cm}^2)$

(3)

かけたひもの長さが最も短くなるのは、側面の展開図で、点 A と点 B を線分で結んだときである。このとき、 $\triangle CBA$ は直角二等辺三角形である。よって、 $\triangle CBA$ において、三平方の定理より

$$AB = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$

【問 15】

花子さんは、テーブルの上の紙コップが床に落ちたとき、横に倒れカーブを描きながら転がることに興味をもち、調べたことをまとめました。後の問1から問3に答えなさい。

(滋賀県 2019 年度)

調べたこと

- 図1のようなコップを、図2のように、平面上の点Sとコップの点Aが重なるように倒して、すべらないように転がしたところ、コップの端が点Oを中心とする円の円周である点線に沿って動きながら1周することに気づきました。

図1

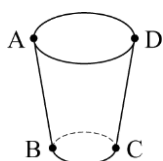
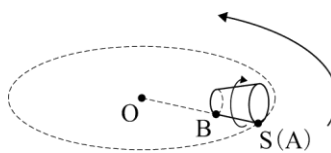
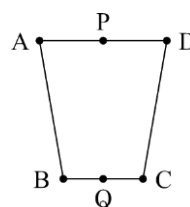


図2



- 図3は図1のコップを真正面から見た図で、線分PQは線分ADと線分BCの垂直二等分線となり、線分ADは線分BCより長くなりました。
- 図3のコップについて、線分ADの長さが9 cm、線分BCの長さが6 cmで、線分ABの長さが違う3つのコップをそれぞれ、図2のように、すべらないように転がし、円を1周するときのコップの回転数を調べ、その結果をまとめると下の表のようになりました。

図3

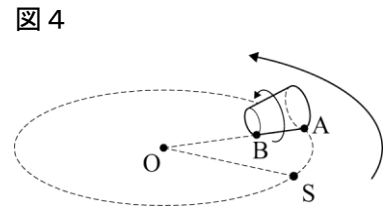


表

	コップ①	コップ②	コップ③
線分ABの長さ(cm)	10.5	13.5	16.5
コップの回転数(回転)	7	9	11

問1 花子さんは、コップ③を図2のように、すべらないように転がしたときの半径OAの長さについて考えました。半径OAの長さを r cmとして、 r の値を求めなさい。

問2 花子さんは、図4のように、コップを1回転させたときの $\angle AOS$ の大きさについて考えました。コップ②を1回転させたときの $\angle AOS$ の大きさを求めなさい。



また、調べたことの表から、コップが円を1周するのに必要なコップの回転数が多くなったとき、 $\angle AOS$ の大きさはどのように変化しますか。次のアからウまでのの中から正しいものを1つ選んで記号で書き、それが正しい理由を、 $\angle AOS$ の大きさを y° 、コップの回転数を m 回転として、 y と m の関係式を用いて説明しなさい。

ア $\angle AOS$ の大きさは大きくなる。

イ $\angle AOS$ の大きさは小さくなる。

ウ $\angle AOS$ の大きさは変わらない。

問3 花子さんは、図3のコップにおいて、それぞれの線分の長さとコップの回転数の関係について考えました。線分ADの長さを a cm、線分BCの長さを b cm、線分ABの長さを x cm、コップの回転数を m 回転として、 a 、 b 、 x 、 m の関係を式で表しなさい。

また、その式になる理由を a 、 b 、 x 、 m の文字を用いて説明しなさい。

解答欄

問 1	$r =$
問 2	$\angle AOS =$ °
	〔説明〕
問 3	
	〔説明〕

解答

問 1 $r=49.5$

問 2

$\angle AOS=40^\circ$

イ

〔説明〕

y と m の関係式は、 $y=\frac{360}{m}$ となるので

y は m に反比例し、 m の値が大きくなると、 y の値は小さくなるから。

問 3

$$x=\frac{m(a-b)}{2}$$

〔説明〕

$$2\pi \times AO = 2\pi \times \frac{a}{2} \times m \text{ より、} AO = \frac{am}{2} \cdots \textcircled{1}$$

$$2\pi \times BO = 2\pi \times \frac{b}{2} \times m \text{ より、} BO = \frac{bm}{2} \cdots \textcircled{2}$$

$$x = AO - BO \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より、} x = \frac{am}{2} - \frac{bm}{2}$$

$$\text{したがって、} x = \frac{m(a-b)}{2}$$

解説

問 1

半径 OA の円周の長さは、直径 AD の円周の長さの 11 倍だから、 $2\pi r = \pi \times 9 \times 11$ $r=49.5(\text{cm})$

《別の解き方》線分 PQ は線分 AD と線分 BC の垂直二等分線だから、 $PQ \perp AD$, $PQ \perp BC$ がいえるので、 $AD \parallel BC$ である。また、直線 AB と直線 DC との交点が O である。平行線と線分の比の定理より、 $OA : OB = AD : BC$ $r : (r-16.5) = 9 : 6$ $r : (r-16.5) = 3 : 2$ $3r-49.5=2r$ $r=49.5(\text{cm})$

問 2

表より、コップ②は円を 1 周するときに 9 回転するので、 $\angle AOS \times 9 = 360^\circ$ $\angle AOS = 40^\circ$

円を 1 周するときに m 回転する場合、 $y^\circ \times m = 360^\circ$ が成り立つので、 $y = \frac{360}{m}$ となり、 y は m に反比例することがわかる。

よって、 m が大きくなると y は小さくなるので、イが正しい。

問 3

半径 AO の円周の長さは、直径 AD の円周の長さの m 倍だから、 $2\pi \times AO = 2\pi \times \frac{a}{2} \times m$ より、

$$OA = \frac{am}{2}$$

半径 BO の円周の長さは、直径 BC の円周の長さの m 倍だから、 $2\pi \times BO = 2\pi \times \frac{b}{2} \times m$ より、 $OB = \frac{bm}{2}$

$$x = AO - BO \text{ だから、} x = \frac{am}{2} - \frac{bm}{2} = \frac{m(a-b)}{2}$$

【問 16】

図 1，図 2 のように，正方形や正六角形に正三角形を重ねてできる図形について考えます。次の問 1，問 2 に答えなさい。

(滋賀県 2019 年度)

問 1 図 1 は，1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形 AEF の頂点 E，F を，それぞれ正方形 ABCD の辺 BC，CD 上にとったものです。

正方形 ABCD の 1 辺の長さを x とするとき，線分 BE の長さを x を用いた式で表しなさい。

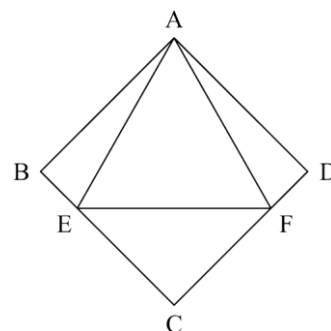
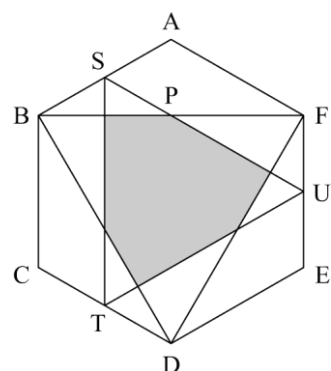


図 2

問 2 図 2 は，面積が $40\sqrt{3}$ の正六角形 ABCDEF の辺 AB，CD，EF の中点を，それぞれ S，T，U としたものです。正三角形 BDF と正三角形 STU が重なる部分に斜線がひかれています。次の (1) から (3) までの各問いに答えなさい。



(1) 線分 BF と線分 SU の交点を P とすると，点 P は線分 BF の中点であることを証明しなさい。

(2) 正六角形 ABCDEF の 1 辺の長さを求めなさい。

(3) 斜線部分の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	BE＝	
問 2	(1)	
	(2)	
	(3)	

解答

問 1 $BE=x-1$ ($\sqrt{2-x^2}$ も可)

問 2

(1)

点 S, U はそれぞれ辺 AB, EF の中点であるから,

$$AS : SB = FU : UE$$

よって, $AF \parallel SU \parallel BE$

$\triangle ABF$ において, $AF \parallel SP$, $AS : SB = 1 : 1$ より

$$FP : PB = AS : SB = 1 : 1$$

したがって, 点 P は線分 BF の中点である。

$$(2) \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

$$(3) \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

解説

問 1

$\triangle ABE$ と $\triangle ADF$ において, $\angle ABE = \angle ADF = 90^\circ$, $AE = AF$, $AB = AD$ より, 直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので, $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ よって, $BE = DF$ だから, $CE = CF$ がいえる。

したがって, $\triangle CFE$ は直角二等辺三角形なので,

$$EC = EF \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \text{ だから, } BE = BC - EC = x - 1$$

《別の解き方》

$$\triangle ABE \text{ で三平方の定理より, } AB^2 + BE^2 = AE^2 \quad x^2 + BE^2 = (\sqrt{2})^2 \quad BE^2 = 2 - x^2$$

$$BE > 0 \text{ だから, } BE = \sqrt{2 - x^2}$$

問 2

(1)

ABCDEF は正六角形だから, $AF \parallel BE$ である。点 S, U はそれぞれ辺 AB, EF の中点であるから, $AS : SB = FU : UE$ となるので, 平行線と線分の比の定理より, $AF \parallel SU \parallel BE$

$\triangle ABF$ において, $AF \parallel SP$, $AS : SB = 1 : 1$ だから, 平行線と線分の比の定理より, $FP : PB = AS : SB = 1 : 1$ がいえるので, 点 P は線分 BF の中点である。

(2)

正六角形 ABCDEF の対角線 AD, BE, CF は 1 点で交わるので, その交点を O とすると, 正六角形 ABCDEF は対角線 AD, BE, CF によって合同な 6 つの正三角形に分けられるので,

$$6\triangle OAB = 40\sqrt{3} \quad \triangle OAB = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

正六角形 ABCDEF の 1 辺の長さを a とすると,

$\triangle OAB$ は 1 辺の長さが a の正三角形だから, 高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり,

$\triangle OAB$ の面積について, $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ が成り立つ。整理すると, $a^2 = \frac{80}{3}$ となり,

$$a > 0 \text{ だから, } a = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

(3)

右の図のように, 直線 AB と直線 DC との交点を Q,

線分 BF と線分 ST との交点を R とする。

$\angle QBC = \angle QCB = 60^\circ$ より $\triangle QBC$ は正三角形で, 点 S は辺 AB の中点だから, $QB : QS = 2 : 3$

(1) と同様に考えると, $BC \parallel ST$ だから,

$BC : ST = QB : QS = 2 : 3$ であり, $\triangle QCB \sim \triangle QTS$ もいえるので,

$$\triangle QCB : \triangle QTS = 2^2 : 3^2 = 4 : 9$$

$\triangle QCB$ は (2) で考えた $\triangle OAB$ と合同な正三角形なので,

$$\triangle QCB = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ だから,}$$

$$\frac{20\sqrt{3}}{3} : \triangle QTS = 4 : 9 \quad \triangle QTS = 15\sqrt{3}$$

$$\triangle QTS \cong \triangle STU \text{ だから, } \triangle STU = 15\sqrt{3}$$

$AB \parallel FC$ がいえるので, $AB = BQ$ より,

$$\triangle ABF = \triangle BQC = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ で, } \triangle ABF \sim \triangle SBP, \text{ BA : BS} = 2 : 1 \text{ だから,}$$

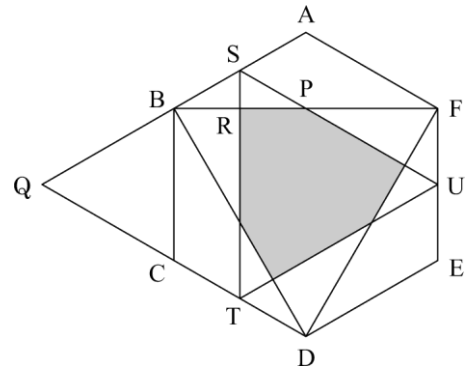
$$\triangle SBP = \triangle ABF \times \frac{1^2}{2^2} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

点 P は線分 BF の中点で, 対角線 AD と対角線 BF との交点が P となるので, $AP \parallel BC \parallel SR$ より,

$$BR : RP = BS : SA = 1 : 1$$

$$\text{よって, } \triangle SRP = \triangle SBP \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

斜線部分の面積は, $\triangle STU$ の面積から $\triangle SRP$ の面積 3 つ分を引いた差なので, $15\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6} \times 3 = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

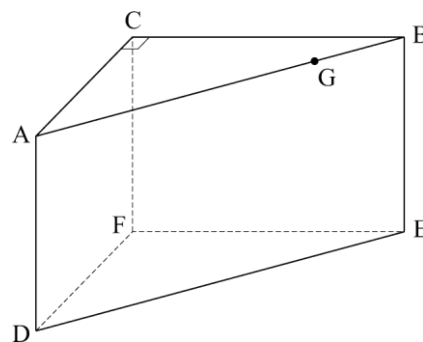


【問 17】

右の図のように，三角柱 $ABC-DEF$ があり， $AC=BC=6\sqrt{2}$ cm， $AD=6$ cm， $\angle ACB=90^\circ$ である。辺 AB 上に点 G を， $AG:GB=3:1$ となるようにとる。

このとき，次の問 1～問 3 に答えよ。

(京都府 2019 年度 前期)



問 1 三角錐^{すい} $ABCE$ の体積を求めよ。

問 2 線分 EG の長さを求めよ。また， $\triangle CEG$ の面積を求めよ。

問 3 3 点 C, E, G を通る平面を P とするとき，点 A と平面 P との距離を求めよ。

解答欄

問 1	cm^3
問 2	$EG = \quad \text{cm}$
	面積 cm^2
問 3	cm

解答

問 1 72 cm^3

問 2

$$EG = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\text{面積 } 9\sqrt{6} \text{ cm}^2$$

問 3 $3\sqrt{6} \text{ cm}$

解説

問 1

$\triangle ABC$ を底面、 BE を高さとみると、体積は、 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \right) \times 6 = 72(\text{cm}^3)$

問 2

$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから、 $AC : AB = 1 : \sqrt{2}$ よって、 $AB = \sqrt{2}AC = \sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 12(\text{cm})$

$AG : GB = 3 : 1$ より、 $GB = AB \times \frac{1}{3+1} = 12 \times \frac{1}{4} = 3(\text{cm})$

$\triangle BGE$ で三平方の定理より、 $EG^2 = GB^2 + BE^2 = 3^2 + 6^2 = 45$ $EG > 0$ だから、 $EG = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}(\text{cm})$

$\triangle ABC$ で、点 C から辺 AB に垂線 CH を引くと、 $\triangle CAH$ は直角二等辺三角形で、 $CH = AH = 6\text{cm}$

また、 H は AB の中点で、 $HG = 3\text{cm}$

よって、 $\triangle HGC$ は $\triangle BGE$ と合同な直角三角形で、 $CG = EG = 3\sqrt{5}\text{cm}$

さらに、 $\triangle BCE$ で三平方の定理より、 $CE^2 = BC^2 + BE^2 = (6\sqrt{2})^2 + 6^2 = 108$

$CE > 0$ だから、 $CE = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}(\text{cm})$

$\triangle CEG$ は $EG = CG$ の二等辺三角形になる。点 G から辺 CE に垂線 GI を引くと、 I は CE の中点で、

$$CI = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

$\triangle GCI$ で三平方の定理より、 $GI^2 = CG^2 - CI^2 = (3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{3})^2 = 18$

$GI > 0$ だから、 $GI = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$ よって、 $\triangle CEG = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{6}(\text{cm}^2)$

問 3

$AG : GB = 3 : 1$ より、 $AG : AB = 3 : (3+1) = 3 : 4$ よって、 $\triangle AGC = \frac{3}{4} \triangle ABC$

三角錐^{すい} $AGCE$ の体積は、問 1 の三角錐 $ABCE$ の体積と比べ、底面の $\triangle AGC$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{3}{4}$ だ

から、体積も $\frac{3}{4}$ になる。よって、 $72 \times \frac{3}{4} = 54(\text{cm}^3)$

また、三角錐 $AGCE$ の底面を $\triangle CEG$ とみると、点 A と平面 P との距離がこの三角錐の高さになる。この距離を $h \text{ cm}$ とすると、問 2 より $\triangle CEG = 9\sqrt{6}\text{cm}^2$ だから、三角錐 $AGCE$ の体積について、

$$\frac{1}{3} \times 9\sqrt{6} \times h = 54 \quad 3\sqrt{6}h = 54 \quad h = 3\sqrt{6}$$

【問 18】

右の図 1 のように、 AB を直径とする半円があり、 $AB=3\text{ cm}$ である。この半円を、直線 AB を回転の軸として 1 回転させてできる立体を X とする。

また、右の図 2 のように、台形 $CDEF$ があり、 $CD=\frac{5}{3}\text{ cm}$ 、 $CF=2\text{ cm}$ 、 $DE=2\sqrt{5}\text{ cm}$ 、 $\angle C=\angle F=90^\circ$ である。

このとき、次の問 1・問 2 に答えよ。

(京都府 2019 年度 中期)

図 1

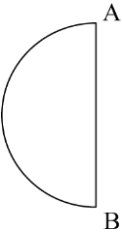
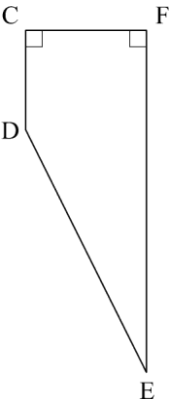


図 2



問 1 立体 X の表面積を求めよ。また、辺 EF の長さを求めよ。

問 2 台形 $CDEF$ を、直線 EF を回転の軸として 1 回転させてできる立体を Y とするとき、立体 X と立体 Y の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問 1	表面積 cm^2
	$EF=$ cm
問 2	立体 X の体積 : 立体 Y の体積 = :

解答

問 1

表面積 $9\pi \text{ cm}^2$

$$EF = \frac{17}{3} \text{ cm}$$

問 2 立体 X の体積 : 立体 Y の体積 = 3 : 8

解説

問 1

立体 X は半径 $\frac{3}{2}\text{cm}$ の球だから、その表面積は、 $4\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi (\text{cm}^2)$

頂点 D から辺 EF に垂線を下ろし、その交点を H とする。 $FH = CD = \frac{5}{3}\text{cm}$ また、 $\triangle DEH$ において、三

平方の定理より、 $EH^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2^2 = 16$ $EH > 0$ より、 $EH = 4(\text{cm})$ よって、 $EF = 4 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3}(\text{cm})$

問 2

立体 X の体積は、 $\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi (\text{cm}^3)$ 立体 Y の体積は、半径 2cm の円を底面にもつ高さ $\frac{5}{3}\text{cm}$ の円柱と半径 2cm の円を底面にもつ高さ 4cm の円錐の体積の和だから、

$$\pi \times 2^2 \times \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 4 = 12\pi (\text{cm}^3)$$

よって、立体 X と立体 Y の体積比は、 $\frac{9}{2}\pi : 12\pi = 3 : 8$

【問 19】

図 1, 図 2 において, 立体 $ABCD-EFGH$ は四角柱である。四角形 $ABCD$ は $BC \parallel AD$ の台形であり, $\angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$, $BC = 2 \text{ cm}$, $AD = CD = 4 \text{ cm}$ である。四角形 $EFGH$ は, 四角形 $ABCD$ と合同な台形である。四角形 $CGHD$, $ADHE$ は, 1 辺の長さが 4 cm の正方形である。四角形 $BCGF$, $ABFE$ は長方形である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 B 2019 年度)

問 1 図 1 において, I は辺 AD の中点である。このとき, 4 点 E, I, C, F は同じ平面上にあって, この 4 点を結んでできる四角形 $EICF$ はひし形である。

(1) 次のア～エのうち, 辺 AE とねじれの位置にある辺はどれですか。一つ選び, 記号を○で囲みなさい。

- | | |
|----------|----------|
| ア 辺 DH | イ 辺 AB |
| ウ 辺 CG | エ 辺 BC |

(2) 四角形 $EFGH$ の対角線 EG の長さを求めなさい。

(3) 四角形 $EICF$ の面積を求めなさい。

問 2 図 2 において, B と G とを結ぶ。 J は, H から辺 EF にひいた垂線と辺 EF との交点である。 J と B , J と G とをそれぞれ結ぶ。

(1) 線分 EJ の長さを求めなさい。

(2) 立体 $BFGJ$ の体積を求めなさい。

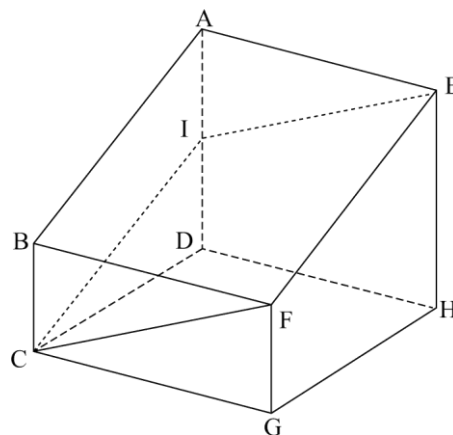
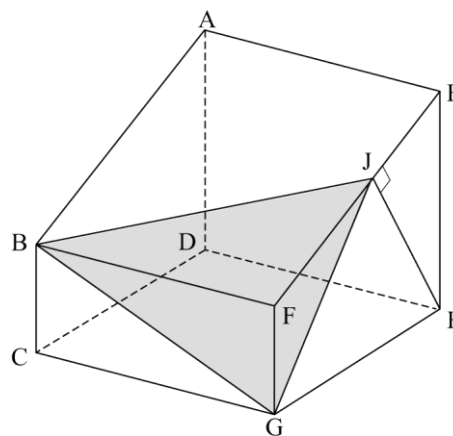


図 2



解答欄

問 1	(1)	ア イ ウ エ
	(2)	cm
	(3)	cm ²
問 2	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問 1

(1) Γ

(2) $4\sqrt{2}$ cm

(3) $8\sqrt{6}$ cm²

問 2

(1) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ cm

(2) $\frac{16}{5}$ cm³

解説

問 1

(1)

辺 AE と交わらず、平行でもない辺をさがすと、 Γ の辺 BC があてはまる。

Δ の辺 DH と Υ の辺 CG はどちらも辺 AE と平行であり、 Ψ の辺 AB は辺 AE と交わる。

(2)

$\triangle EGH$ は、 $\angle EHG = 90^\circ$ 、 $EH = GH = 4\text{cm}$ の直角二等辺三角形だから、 $EH : EG = 1 : \sqrt{2}$

よって、 $EG = \sqrt{2}EH = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}(\text{cm})$

(3)

$\triangle ECG$ は $\angle EGC = 90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より、

$EC^2 = EG^2 + CG^2 = (4\sqrt{2})^2 + 4^2 = 48$ $EC > 0$ だから、 $EC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

また、線分 IF の長さは、1 辺が 4cm の正方形の対角線の長さと等しいから、 $4\sqrt{2}\text{cm}$

よって、ひし形 EICF の面積は、 $\frac{1}{2} \times EC \times IF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{6}(\text{cm}^2)$

問 2

(1)

右の図のように、F から EH に垂線 FK をひく。

$\triangle EKF$ で、三平方の定理より、

$EF^2 = EK^2 + FK^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$EF > 0$ だから、 $EF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\text{cm})$

$\triangle EJH$ と $\triangle EKF$ において、 $\angle EJH = \angle EKF = 90^\circ$ 、

$\angle JEH = \angle KEF$ (共通) より、2 組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle$

$EJH \sim \triangle EKF$

よって、 $EJ : EK = EH : EF$

$EJ = x\text{cm}$ とすると、 $x : 2 = 4 : 2\sqrt{5}$ $2\sqrt{5}x = 8$

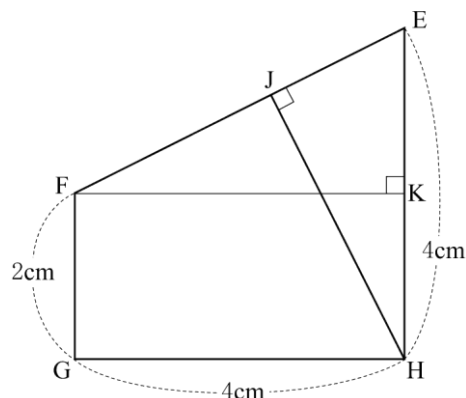
$x = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

(2)

(1) より、 $EF : EJ = 2\sqrt{5} : \frac{4\sqrt{5}}{5} = 5 : 2$ だから、 $EF : JF = 5 : (5 - 2) = 5 : 3$

よって、 $\triangle JFG = \frac{3}{5} \triangle EFG = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times FG \times GH = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{12}{5}(\text{cm}^2)$

立体 BFGJ は三角錐で、 $\triangle JFG$ を底辺と見ると高さは BF だから、体積は、 $\frac{1}{3} \times \frac{12}{5} \times 4 = \frac{16}{5}(\text{cm}^3)$



【問 20】

図 1, 図 2 において, 立体 $AB-CDEF$ は五つの平面で囲まれてできた立体である。四角形 $CDEF$ は, $CD=4\text{ cm}$, $DE=5\text{ cm}$ の長方形である。四角形 $ADEB$ は $AB \parallel DE$ の台形であり, $AB=3\text{ cm}$, $AD=BE=8\text{ cm}$ である。四角形 $ACFB$ は, 四角形 $ADEB$ と合同な台形である。 $\triangle ACD$ は $AC=AD$ の二等辺三角形であり, $\triangle BFE$ は $BF=BE$ の二等辺三角形である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 C 2019 年度)

問 1 図 1 において, A と E とを結ぶ。 G は辺 DE 上の点であり, $GE=3\text{ cm}$ である。 H は, G を通り線分 AE に平行な直線と辺 AD との交点である。 I は, H から辺 AC にひいた垂線と辺 AC との交点である。

- (1) $\triangle AEB$ の面積を求めなさい。
- (2) 線分 AH の長さを求めなさい。
- (3) 線分 IH の長さを求めなさい。

図 1

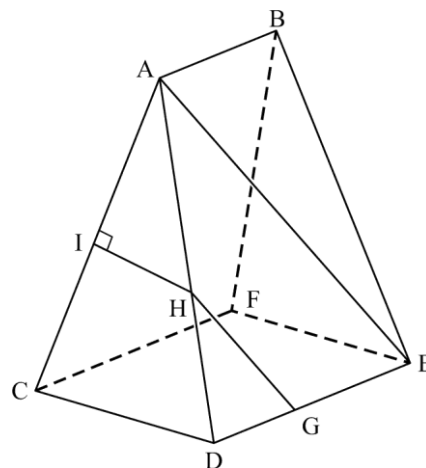
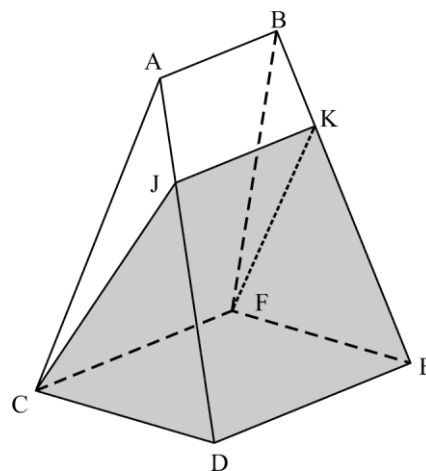


図 2



問 2 図 2 において, J , K はそれぞれ辺 AD , BE 上の点であり, $AJ=BK=2\text{ cm}$ である。このとき, 4 点 C , J , K , F は同じ平面上にあり, この 4 点を結んでできる四角形 $CJKF$ は $JK \parallel CF$ の台形であって, $JC=KF$ である。

- (1) 線分 JK の長さを求めなさい。
- (2) 立体 $JK-CDEF$ の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	cm^2
	(2)	cm
	(3)	cm
問 2	(1)	cm
	(2)	cm^3

解答

問 1

(1) $\frac{9\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^2$

(2) $\frac{24}{5} \text{ cm}$

(3) $\frac{3\sqrt{15}}{5} \text{ cm}$

問 2

(1) $\frac{7}{2} \text{ cm}$

(2) $\frac{27\sqrt{59}}{3} \text{ cm}^3$

解説

問 1

(1)

点 E から辺 AB の延長に垂線 EL をひくと、 $BL = (DE - AB) \div 2 = (5 - 3) \div 2 = 1(\text{cm})$

$\triangle BEL$ で、三平方の定理より、 $EL^2 = BE^2 - BL^2 = 8^2 - 1^2 = 63$ $EL > 0$ だから、 $EL = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}(\text{cm})$

よって、 $\triangle AEB = \frac{1}{2} \times AB \times EL = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{7} = \frac{9\sqrt{7}}{2}(\text{cm}^2)$

(2)

AE//HG より、 $AH : AD = EG : ED = 3 : 5$ よって、 $AH = \frac{3}{5}AD = \frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5}(\text{cm})$

(3)

$\triangle ACD$ で、右の図のように、点 A から辺 CD に垂線 AM をひく。

M は CD の中点になるから、 $CM = 2\text{cm}$

$\triangle ACM$ で、三平方の定理より、 $AM^2 = AC^2 - CM^2 = 8^2 - 2^2 = 60$

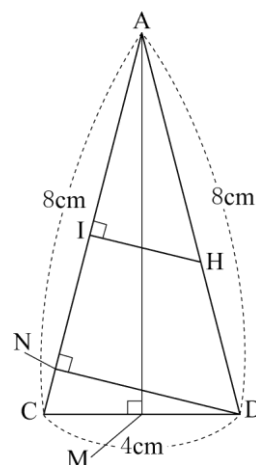
$AM > 0$ だから、 $AM = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}(\text{cm})$

また、点 D から辺 AC に垂線 DN をひいて、 $\triangle ACD$ の面積に着目する。
底辺を CD とすると高さは AM、底辺を AC とすると高さは DN だから、

$$\frac{1}{2} \times CD \times AM = \frac{1}{2} \times AC \times DN \quad \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{15} = \frac{1}{2} \times 8 \times DN \quad DN = \sqrt{15}\text{cm}$$

さらに、IH//ND より、 $IH : ND = AH : AD$

よって、(2) より、 $IH : ND = 3 : 5$ $IH = \frac{3}{5}ND = \frac{3}{5} \times \sqrt{15} = \frac{3\sqrt{15}}{5}(\text{cm})$



問 2

(1)

線分 JK と線分 AE の交点を O とする。

$\triangle ADE$ で, $JO \parallel DE$ より, $JO : DE = AJ : AD = 2 : 8 = 1 : 4$ よって, $JO = \frac{1}{4}DE = \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4}(\text{cm})$

$\triangle AEB$ で, $OK \parallel AB$ より, $OK : AB = KE : BE = (8-2) : 8 = 3 : 4$ よって, $OK = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}(\text{cm})$

$$JK = JO + OK = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}(\text{cm})$$

(2)

下の図のように, 2 点 J, K から辺 DE に垂線 JP, KQ をひき, 同様に辺 CF に垂線 JR, KS をひく。立体 JK-CDEF は, 三角柱 JRP-KSQ と 2 つの四角錐 J-CDPR, K-SQEF に分けられる。

点 J から辺 CD に垂線 JT をひくと, 問 1 (3) の線分 AM に対して, $JT \parallel AM$ だから, $JT : AM = JD : AD = (8-2) : 8 = 3 : 4$

$$\text{よって, } JT = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{15} = \frac{3\sqrt{15}}{2}(\text{cm})$$

また, 点 J から面 CDEF に垂線 JU をひくと, U は線分 PR 上にある。

$$TU = DP = (DE - JK) \div 2 = \left(5 - \frac{7}{2}\right) \div 2 = \frac{3}{4}(\text{cm})$$

$$\triangle J TU \text{ で, 三平方の定理より, } JU^2 = JT^2 - TU^2 = \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$\frac{531}{16}$$

$$JU > 0 \text{ だから, } JU = \sqrt{\frac{531}{16}} = \frac{3\sqrt{59}}{4}(\text{cm})$$

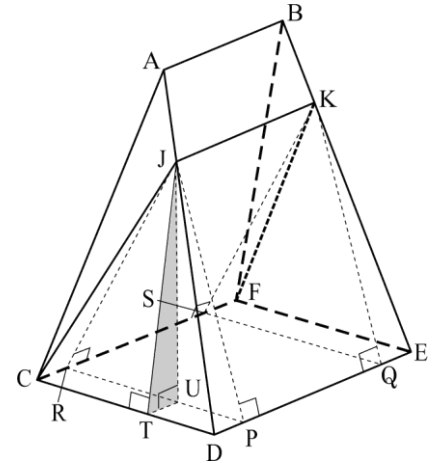
三角柱 JRP-KSQ の体積は,

$$\left(\frac{1}{2} \times RP \times JU\right) \times JK = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{59}}{4}\right) \times \frac{7}{2} = \frac{21\sqrt{59}}{4}(\text{cm}^3)$$

四角錐 J-CDPR, K-SQEF は体積が等しく,

$$\frac{1}{3} \times \text{長方形 CDPR} \times JU = \frac{1}{3} \times \left(4 \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{3\sqrt{59}}{4} = \frac{3\sqrt{59}}{4}(\text{cm}^3)$$

$$\text{よって, 立体 JK-CDEF の体積は, } \frac{21\sqrt{59}}{4} + \frac{3\sqrt{59}}{4} \times 2 = \frac{27\sqrt{59}}{4}(\text{cm}^3)$$



【問 21】

絵美さんと洋一さんは、地域のイベントで配る 2 層のゼリーをつくることになり、各層のゼリーがそれぞれどのくらい必要なかを考えた。次の<容器について>と<2 人の会話>を読んで、問 1、問 2 に答えなさい。ただし、ゼリーを入れる容器の厚さは考えないものとし、ゼリーは固まらせても体積は変わらないものとする。



(岡山県 2019 年度 特別)

<容器について>

容器の形は円錐である。容器を正面から見た模式図で表すと図 1 のようになり、 $AB=8\text{ cm}$ 、 $AO=6\text{ cm}$ である。このとき、 $OB=$ cm であり、容器の容積は cm^3 である。

図 1

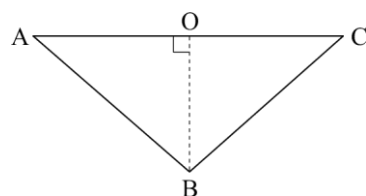
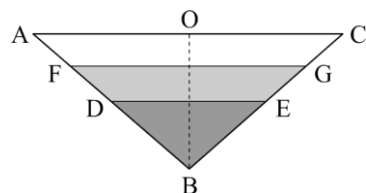


図 2



<2 人の会話>

絵美：図 2 のように、線分 DE まで緑色のゼリーを入れ、固まったら、線分 DE から線分 FG まで桃色のゼリーを入れよう。各層のゼリーを、それぞれどのくらい用意したらいいのかな。

洋一：各層のゼリーの体積比で考えてみよう。図 2 において、 $\triangle DBE \sim \triangle FBG$ で、 $BE : EG = 2 : 1$ だから、相似比は $2 : 3$ だね。このとき、緑色のゼリーと桃色のゼリーの体積比は となるね。

絵美：この体積比を利用しよう。例えば、たくさんつくるために緑色のゼリーを 2000 cm^3 用意したとすると、桃色のゼリーは cm^3 用意すればよいことがわかるね。

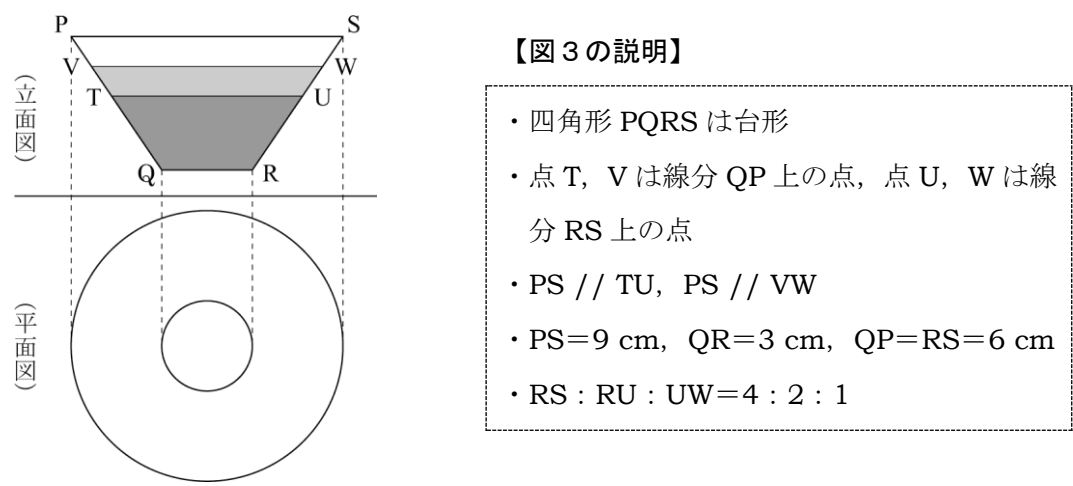
【図 1，2 の説明】

- ・ $\triangle ABC$ は容器
- ・ $BA=BC$
- ・ 点 O は線分 AC の中点
- ・ 点 D, F は線分 BA 上の点、点 E, G は線分 BC 上の点
- ・ $AC \parallel DE$, $AC \parallel FG$
- ・ $BE : EG = 2 : 1$

問 1 ～ に適当な数または比を書き入れなさい。ただし、 は最も簡単な整数比で書き入れなさい。

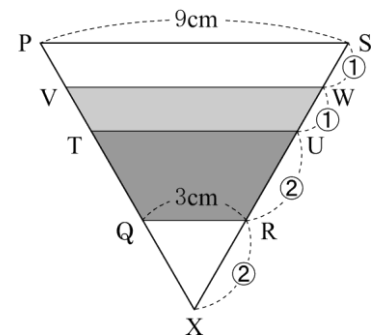
問2 2人は、違う形の容器で2層のゼリーをつくる場合を考えた。図3の投影図で表される回転体の容器に、線分TUまで緑色のゼリーを入れ、固まったら、線分TUから線分VWまで桃色のゼリーを入れる。＜2人の会話＞と同様に各層のゼリーの体積比を利用して、緑色のゼリーを2800 cm³用意したときに、必要な桃色のゼリーの体積を求めなさい。

図3



解答欄

問1	(1)	(cm)
	(2)	(cm ³)
	(3)	:
	(4)	(cm ³)
問2	(cm ³)	



【問 22】

図 1、図 2 のように 1 辺の長さが 10 cm の立方体を、底面の対角線 BC、EF を通る平面で半分に切り取ってできた三角柱 ABCDEF がある。問 1 ～問 3 に答えなさい。

(徳島県 2019 年度)

問 1 辺 AD と平行な辺はどれか、すべて書きなさい。

問 2 辺 BC の長さを求めなさい。

問 3 図 2 のように、辺 DA の延長上に、 $DA=AP$ となるように点 P をとり、線分 PE と辺 AB との交点を Q、線分 PF と辺 AC との交点を R とする。また、三角柱 ABCDEF が平面 QEFR で分けられる 2 つの部分のうち、頂点 B を含む方を立体 X とする。(1)・(2) に答えなさい。

(1) $\triangle PQR$ の面積は $\triangle PEF$ の面積の何倍か、求めなさい。

(2) 立体 X の体積を求めなさい。

図 1

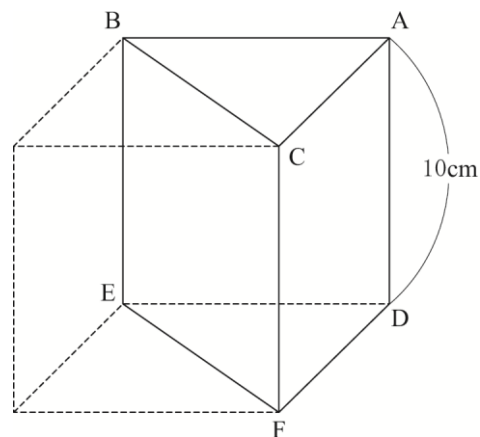
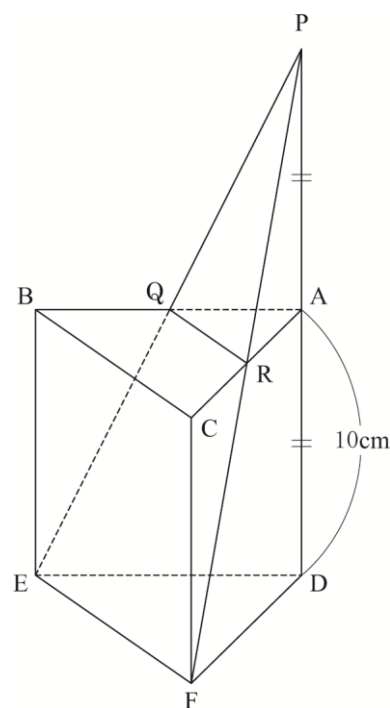


図 2



解答欄

問 1		
問 2	cm	
問 3	(1)	倍
	(2)	cm ³

解答

問 1 辺 BE, 辺 CF

問 2 $10\sqrt{2}$ (cm)

問 3

(1) $\frac{1}{4}$ (倍)

(2) $\frac{625}{3}$ (cm³)

解説

問 1

平面 ABED 上にあって交わらないから, $AD \parallel BE$ 同様に, 平面 ACFD 上にあって交わらないから, $AD \parallel CF$

問 2

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の直角二等辺三角形だから, $AB : BC = 1 : \sqrt{2}$

よって, $BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 10 = 10\sqrt{2}$ (cm)

問 3

(1)

$AB \parallel DE$ より, $PQ : PE = PA : PD = 1 : (1+1) = 1 : 2$

同様に, $AC \parallel DF$ より, $PR : PF = PA : PD = 1 : 2$

よって, $\triangle PQR$ と $\triangle PEF$ において, $PQ : PE = PR : PF \cdots \textcircled{1}$ $\angle QPR = \angle EPF$ (共通) $\cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より, 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから, $\triangle PQR \sim \triangle PEF$

相似比は $1 : 2$ だから, 面積比は $1^2 : 2^2 = 1 : 4$ よって, $\triangle PQR$ の面積は $\triangle PEF$ の面積の $\frac{1}{4}$ 倍。

(2)

三角錐 PAQR と三角錐 PDEF は相似で, 相似比は $1 : 2$ だから, 体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

よって, 三角錐 PDEF から三角錐 PAQR を取り除いた立体を立体 Y とすると,

立体 Y の体積は, 三角錐 PDEF の体積の $\frac{7}{8}$ 倍で, $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \right) \times 20 \times \frac{7}{8} = \frac{875}{3}$ (cm³)

また, 立体 X と立体 Y をあわせると三角柱 ABCDEF になるから, 立体 X の体積は,

三角柱 ABCDEF - 立体 Y = $\left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \right) \times 10 - \frac{875}{3} = \frac{625}{3}$ (cm³)

【問 23】

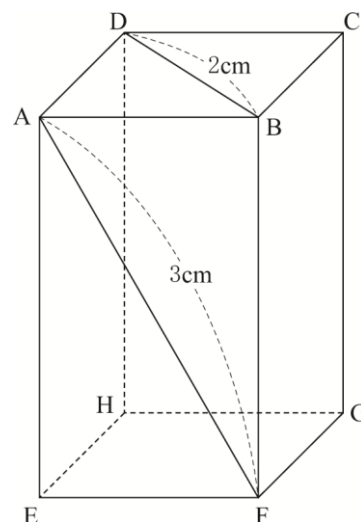
右の図のような直方体があり、 $AB=BC$ である。点 A と点 F、点 B と点 D をそれぞれ結ぶ。

$AF=3\text{ cm}$ 、 $BD=2\text{ cm}$ であるとき、次の (1)、(2) の問いに答えよ。

(香川県 2019 年度)

- (1) 次の㉠～㉤の線分のうち、面 EFGH と垂直な線分はどれか。正しいものを 1 つ選んで、その記号を書け。

- ㉠ 線分 AE ㉡ 線分 AF
㉢ 線分 BC ㉤ 線分 BD



- (2) この直方体の体積は何 cm^3 か。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1) ㉠

(2) $2\sqrt{7}\text{ cm}^3$

解説

(1)

面 EFGH と垂直な線分は線分 AE、線分 BF、線分 CG、線分 DH である。よって、㉠

(2)

$\triangle ABD$ において、三平方の定理より $AB^2 + AD^2 = 2^2$ $2AB^2 = 4$ $AB^2 = 2$ $AB = \pm\sqrt{2}$ $AB > 0$ より $AB = \sqrt{2}\text{cm}$ また、 $\triangle AFB$ において、三平方の定理より $BF^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7$ $BF = \pm\sqrt{7}$ $BF > 0$ より $BF = \sqrt{7}\text{cm}$ よって、求める体積は $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}(\text{cm}^3)$

【問 24】

図 1 は、底面の半径が 6 cm、高さが 4 cm の円すいと、底面の半径が 6 cm、高さが 5 cm の円柱をあ
わせた形の立体を表しており、円すいの頂点を A、円すいの底面であり円柱の底面でもある円の中心を
B、円柱のもう一方の底面である円の中心を C としたものである。

図 2 は、図 1 に示す立体において、円 B の円周上に 2 点 D、E を $\angle DBE = 120^\circ$ 、円 C の円周上に点
F を $\angle BEF = 90^\circ$ となるようにとり、 $\triangle ACF$ をつくり、線分 AF と線分 BE との交点を G としたもので
ある。

次の問 1 ～問 3 に答えよ。

(福岡県 2019 年度)

図 1

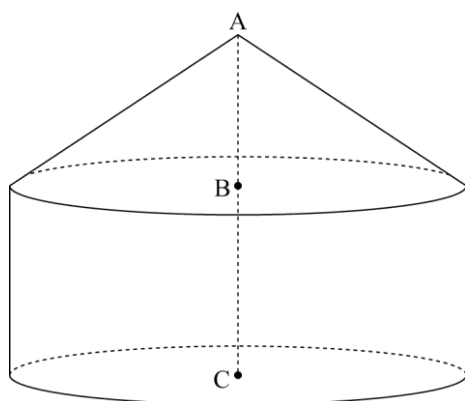
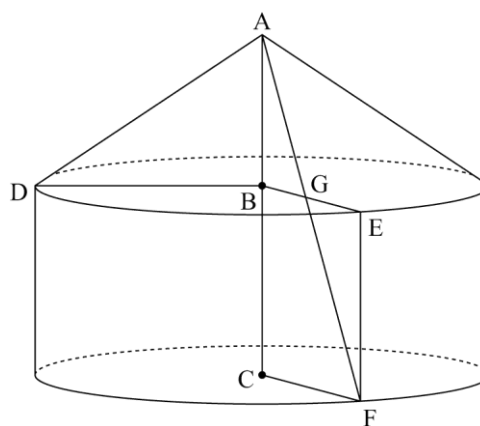


図 2



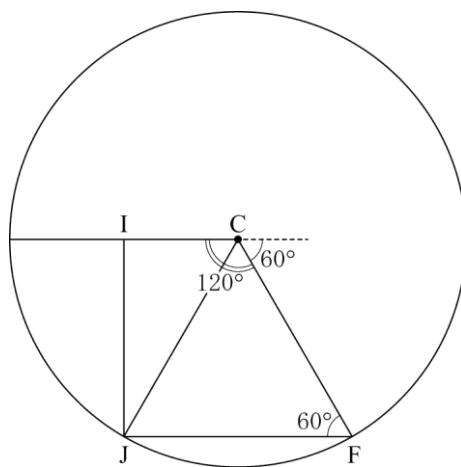
問 1 図 1 に示す立体の体積を求めよ。

問 2 図 2 に示す立体において、 $\triangle ABG$ の面積は、 $\triangle ACF$ の面積の何倍か求めよ。

問 3 図 2 に示す立体において、線分 AD の中点を M とするとき、線分 MF の長さを求めよ。

解答欄

問 1	cm ³
問 2	倍
問 3	cm



【問 25】

図 1 のように、底面が正方形の直方体 $ABCD-EFGH$ があり、辺 BF 、 CG の中点をそれぞれ M 、 N とする。 $EF=3\text{ cm}$ 、 $AE=6\text{ cm}$ である。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(佐賀県 2019 年度 一般)

問 1 直線 AM とねじれの位置にある直線を、次の①～④の中から すべて 選び、番号を書きなさい。

- ① 直線 DN
- ② 直線 GH
- ③ 直線 EF
- ④ 直線 FG

問 2 線分 EG の長さを求めなさい。

問 3 図 2 のように、線分 AG と線分 EN の交点を P とし、点 P から線分 EG に垂線 PQ をひく。

このとき、(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(1) $\triangle APE \sim \triangle GPN$ であることを証明しなさい。

(2) 線分 PQ の長さを求めなさい。

(3) 四角形 $AEQP$ を、直線 AE を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

図 1

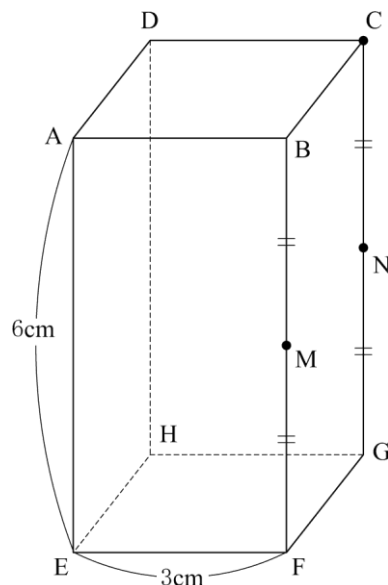
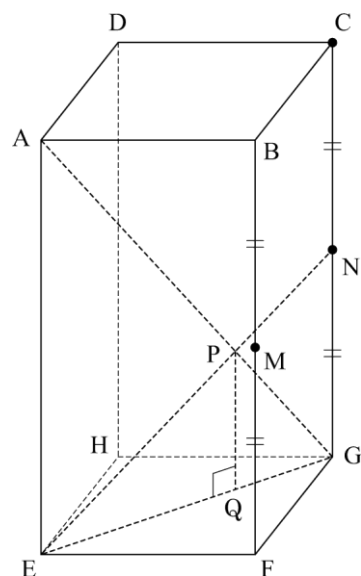


図 2



解答欄

問 1		
問 2	cm	
問 3	(1)	
	(2)	cm
	(3)	cm ³

解答

問 1 ②, ④

問 2 $3\sqrt{2}$ cm

問 3

(1)

$\triangle APE$ と $\triangle GPN$ において

対頂角は等しいから

$\angle APE = \angle GPN \cdots ①$

$AE \parallel NG$ より

平行線の錯角は等しいから

$\angle EAP = \angle NGP \cdots ②$

①, ②から

2組の角が, それぞれ等しいので

$\triangle APE \sim \triangle GPN$

(2) 2 cm

(3) $\frac{80}{3}\pi$ cm³

解説

問 1

①の直線 DN は直線 AM と平行である。また, ③の直線 EF は直線 AM と交わる。よって, ①, ③は直線 AM とねじれの位置にない。②の直線 GH, ④の直線 FG はともに直線 AM と交わらず, 平行でもないの
で, 直線 AM とねじれの位置にある。

問 2

四角形 EFGH は正方形なので, $\triangle EFG$ は $\angle EFG = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから,

$EF : EG = 1 : \sqrt{2}$ $3 : EG = 1 : \sqrt{2}$ $EG = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

問 3

(1)

$\triangle APE$ と $\triangle GPN$ において, 対頂角は等しいから $\angle APE = \angle GPN \cdots ①$

$AE \parallel NG$ より, 平行線の錯角は等しいから, $\angle EAP = \angle NGP \cdots ②$

①, ②から, 2組の角が, それぞれ等しいので, $\triangle APE \sim \triangle GPN$

なお, ①, ②の一方は, $\angle AEP = \angle GNP \cdots ③$ でもよい。

(2)

(1)より, $\triangle APE \sim \triangle GPN$ だから, $EP : NP = AE : GN = 2 : 1$ よって, $EP : EN = 2 : 3$

$PQ \parallel NG$ だから, 三角形と比の定理より, $PQ : NG = EP : EN$ $PQ : 3 = 2 : 3$ $PQ = 2(\text{cm})$

(3)

問 2 より $EG = 3\sqrt{2}\text{cm}$ で, $EQ : EG = EP : EN = 2 : 3$ だから, $EQ : 3\sqrt{2} = 2 : 3$ $EQ = 2\sqrt{2}(\text{cm})$

よって, 四角形 AEQP を直線 AE を回転の軸として 1 回転させてできる立体は, 底面が半径 $2\sqrt{2}\text{cm}$ の円で高さが 2cm の円柱と, 底面が半径 $2\sqrt{2}\text{cm}$ の円で高さが 4cm の円錐を組み合わせた立体である。

したがって, その体積は, $\pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 2 + \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 4 = 16\pi + \frac{32}{3}\pi = \frac{80}{3}\pi (\text{cm}^3)$

【問 26】

図 1 のように、十分に広く平らな壁に垂直な直線上に 3 点 P, Q, R がある。点 P に光源を設置し、 $PQ=12\text{ cm}$, $QR=60\text{ cm}$ とする。光源と壁の間に図形を設置し、光源を光らせたときに壁にうつる図形の影について考える。

ただし、光源は小さく、影はすべて壁にうつる。

このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(佐賀県 2019 年度 一般 追加問題)

問 1 図 2 のように、1 辺の長さが 10 cm の正方形 ABCD を、その対角線の交点が点 Q と一致し、正方形 ABCD を含む平面が壁と平行になるように設置した。光源を光らせると、壁に正方形 ABCD の影である正方形 $A'B'C'D'$ がうつった。このとき、(1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 正方形 $A'B'C'D'$ の面積を求めなさい。

図 1

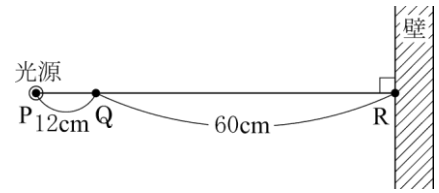
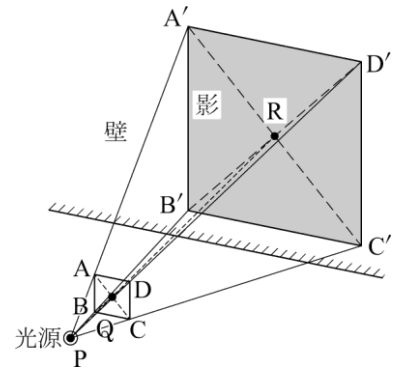


図 2

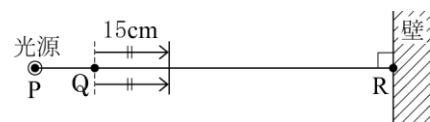


(2) 図 3 と図 4 は、図 2 を真横から見た図である。図 3 のように、辺 BC を回転の軸として、正方形 ABCD を 30° 傾ける場合と、図 4 のように、正方形 ABCD の対角線の交点を直線 PR 上に保ったまま、壁に向かって正方形 ABCD を 15 cm 平行移動する場合を考える。

図 3



図 4



このとき、壁にうつる影について、図 3 での形の変化と、図 4 での面積の変化の説明として、正しい組合せを、次の (a) ~ (d) の中から 1 つ選び、記号を書きなさい。

- (a) 図 3 での影の形は平行四辺形になり、図 4 では影の面積は増加する。
- (b) 図 3 での影の形は平行四辺形になり、図 4 では影の面積は減少する。
- (c) 図 3 での影の形は台形になり、図 4 では影の面積は増加する。
- (d) 図 3 での影の形は台形になり、図 4 では影の面積は減少する。

問 2 図 5 のように、球の中心が点 Q と一致するように、半径 4 cm の球を設置した。光源を光らせると、壁にうつる球の影の形は円であった。

このとき、(1)、(2)の問いに答えなさい。

図 5



図 6



(2) さらに、図 6 のように、立方体を、その対角線の交点が線分 QR 上にあり、側面が壁に接するように設置したところ、壁にうつっている影の形は円のままであった。壁にうつっている影の形を円のまま変化させないように立方体の体積を最も大きくするとき、立方体の 1 辺の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	cm ²
	(2)	
問 2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問 1

(1) 3600 cm^2

(2) (d)

問 2

(1) $18\sqrt{2} \text{ cm}$

(2) 24 cm

解説

問 1

(1)

$\triangle PAD$ と $\triangle PA'D'$ は相似だから、 $AD : A'D' = PQ : PR = 12 : (12 + 60) = 1 : 6$

$10 : A'D' = 1 : 6$ $A'D' = 60(\text{cm})$ よって、四角形 $A'B'C'D'$ は 1 辺の長さが 60cm の正方形だから、その面積は $60 \times 60 = 3600(\text{cm}^2)$

(2)

図 4 において、 $\triangle PAD$ と $\triangle PA'D'$ は相似だから、 $AD : A'D' = PQ : PR = 27 : 72 = 3 : 8$

$10 : A'D' = 3 : 8$ $A'D' = 26.66\cdots < 60$ よって、四角形 $A'B'C'D'$ は 1 辺の長さが図 2 と比べて短くなるので、影の面積は減少する。このように、辺 AD が光源から離れ壁に近づくと、その影である辺 $A'D'$ は短くなる。

図 3 において、辺 AD は光源から離れ壁に近づいているから、その影である辺 $A'D'$ は短くなり、 $AD \parallel A'D'$ 、 $AD \parallel BC$ 、 $BC \parallel B'C'$ より、 $A'D' \parallel B'C'$ だから、四角形 $A'B'C'D'$ は台形になる。よって、(d) が正しい。

問 2

(1)

光が当たる部分と影になる部分の境界が球に接する所にある点の 1 つを T とし、点 T の影を T' とする。このとき、影の半径は RT' である。

接線はその接点を通る半径に垂直だから、 $\angle PTQ = 90^\circ$

$\angle PRT' = 90^\circ$ だから、 $\angle PTQ = \angle PRT' \cdots \textcircled{1}$

$\angle TPQ = \angle RPT' \cdots \textcircled{2}$ ①、②より、 $\triangle PTQ \sim \triangle PRT'$

$PQ = 12\text{cm}$ 、 $QT = 4\text{cm}$ 、 $\angle PTQ = 90^\circ$ だから、三平方の定理より、 $PT = 8\sqrt{2}\text{cm}$

よって、 $PT : PR = QT : T'R$ $8\sqrt{2} : 72 = 4 : T'R$ $T'R = 18\sqrt{2}(\text{cm})$

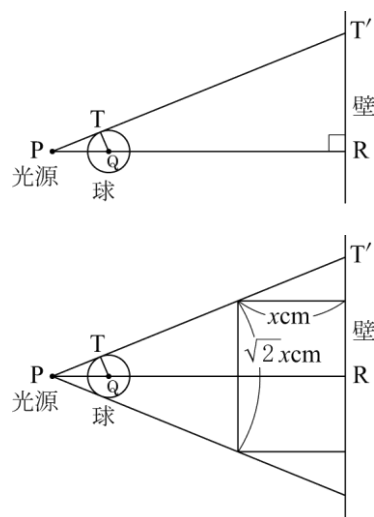
(2)

最も大きい立方体の 1 辺の長さを $x\text{cm}$ とすると、壁から $x\text{cm}$ 離れた面の対角線が影の中に入らなければならないから、右の図のようになる。立方体の向かい合う面は平行だから、

$$72 : 36\sqrt{2} = (72 - x) : \sqrt{2}x \quad 2 : \sqrt{2} = (72 - x) : \sqrt{2}x$$

$$\sqrt{2}(72 - x) = 2\sqrt{2}x \quad 72 - x = 2x \quad 3x = 72 \quad x = 24$$

よって、立方体の 1 辺の長さは 24cm



【問 27】

図 1～図 3 のように、6 つの点 A, B, C, D, E, F を頂点とする三角柱 ABCDEF があり、側面はいずれも底面に垂直で、 $AB=BC=4\text{ cm}$, $AD=8\text{ cm}$, $\angle ABC=90^\circ$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2019 年度)

問 1 図 1 の三角柱 ABCDEF において、辺 AB とねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

問 2 三角柱 ABCDEF の体積は何 cm^3 か。

問 3 図 2 のように、辺 BE 上に点 P をとる。三角錐^{すい}ABCP の体積が三角柱 ABCDEF の体積の $\frac{1}{4}$ 倍であるとき、線分 BP の長さは何 cm か。

問 4 図 1 の三角柱 ABCDEF を透明な容器とする。この容器を図 3 のように、 $\triangle DEF$ を底面として水平な台の上に置き、底面から水面までの高さが 5 cm となるように水を入れて容器を密閉した。その後、四角形 ADFC が底面となるように同じ台の上に置き直したとき、底面から水面までの高さは何 cm か。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

図 1

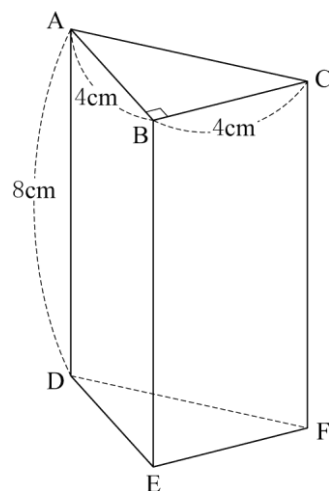


図 2

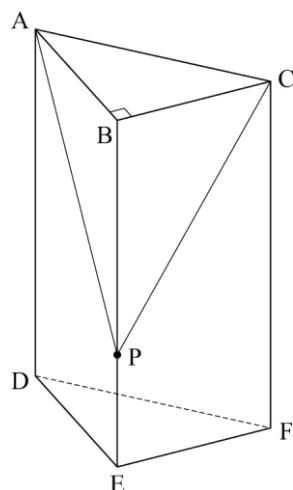
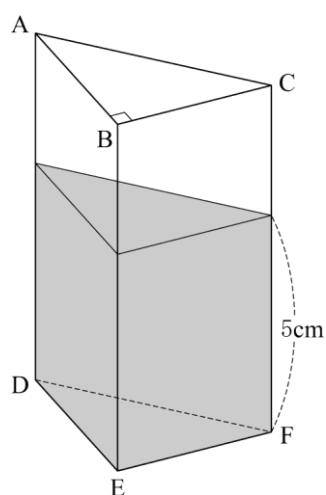


図 3



解答欄

問 1	本
問 2	cm^3
問 3	cm
問 4	cm

解答

問 1 3 [本]

問 2 64 [cm^3]

問 3 6 [cm]

問 4 $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ [cm]

解説

問 1

辺 AB と交わらず、平行でもない辺の本数を数える。AB と交わる辺は、AC, BC, AD, BE の 4 本。AB と平行な辺は DE の 1 本。残った CF, DF, EF の 3 本が、AB とねじれの位置にある。

問 2

底面が直角二等辺三角形 ABC だから、底面積は、 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8(\text{cm}^2)$

高さは 8cm だから、体積は、 $8 \times 8 = 64(\text{cm}^3)$

問 3

三角錐 ABCP の底面を $\triangle ABC$ とすると、高さは BP になる。

BP = xcm とし、三角錐 ABCP の体積に着目すると、 $\frac{1}{3} \times 8 \times x = 64 \times \frac{1}{4}$ $x = 6$

問 4

入れた水の体積は、 $8 \times 5 = 40(\text{cm}^3)$

問 2 より、容器の容積は 64cm^3 だから、水が入っていない部分の体積は、 $64 - 40 = 24(\text{cm}^3)$

右の図のように、四角形 ADFC が底面となるように置いたとき、水面の長方形 GIJH, 長方形 GIEB, 長方形 BEJH を側面とする三角柱 GBHIEJ を考えると、その体積は 24cm^3 だから、底面の $\triangle BHG$ の面積は、 $24 \div 8 = 3(\text{cm}^2)$

$\triangle BHG$ は直角二等辺三角形だから、 $BH = y\text{cm}$ とすると、 $\frac{1}{2}y^2 = 3$

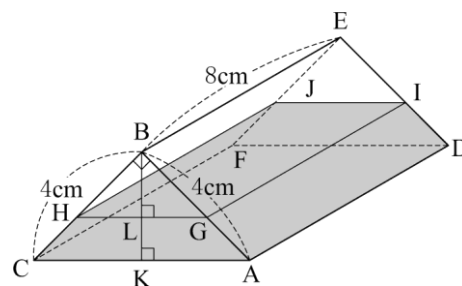
$y^2 = 6$ $y > 0$ だから、 $y = \sqrt{6}$

よって、 $BH = \sqrt{6}\text{cm}$

点 B から辺 AC に垂線 BK をひいて、BK と GH の交点を L とすると、 $\triangle BCK$, $\triangle BHL$ はそれぞれ直角二等辺三角形だから、 $BK : BC = BL : BH = 1 : \sqrt{2}$

よって、 $BK = \frac{1}{\sqrt{2}}BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 = 2\sqrt{2}(\text{cm})$, $BL = \frac{1}{\sqrt{2}}BH = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{6} = \sqrt{3}(\text{cm})$

底面から水面までの高さは、線分 LK の長さで表されるから、 $LK = BK - BL = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}(\text{cm})$



【問 28】

下の図のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $\angle BAC=90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC を底面とする三角すい $OABC$ があり、辺 OA は底面 ABC に垂直で、 $OA=6\text{ cm}$ である。2 点 D 、 E はそれぞれ辺 OB 、 OC 上にあって、 $OD:DB=OE:EC=2:1$ である。また、辺 OA 上に点 P をとる。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2019 年度)

問 1 $AP=2\text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 PD の長さを求めなさい。

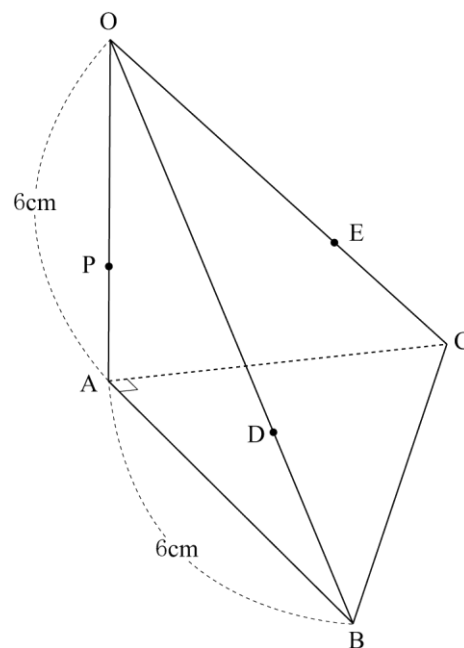
(2) 三角すい $OPDE$ の体積を求めなさい。

問 2 三角すい $OPDE$ の体積が三角すい $OABC$ の体積の $\frac{1}{3}$ と

なるとき、

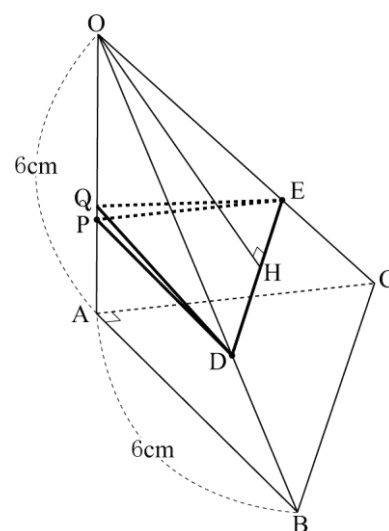
(1) 線分 AP の長さを求めなさい。

(2) 点 P と $\triangle ODE$ を含む平面との距離を求めなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。



解答欄

問 1	(1)	cm
	(2)	cm ³
問 2	(1)	cm
	(2)	cm



【問 29】

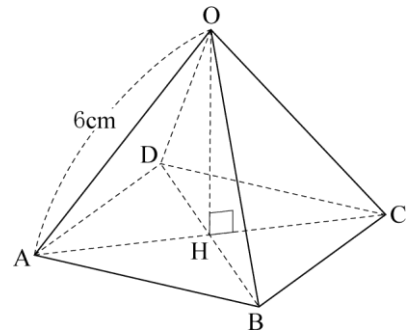
右の図 1 のように、すべての辺の長さが 6 cm の鉄でできた正四角すい $OABCD$ のおもりがある。底面の正方形 $ABCD$ の対角線の交点を H とすると、線分 OH は底面 $ABCD$ に垂直である。

次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(大分県 2019 年度)

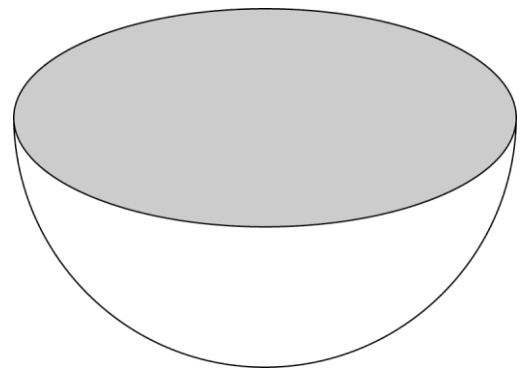
問 1 線分 AH の長さを求めなさい。

図 1



問 2 正四角すい $OABCD$ の体積を求めなさい。

図 2



問 3 右の図 2 のように、半球の形をした容器がある。

この容器いっぱいに水を入れて、容器を固定する。

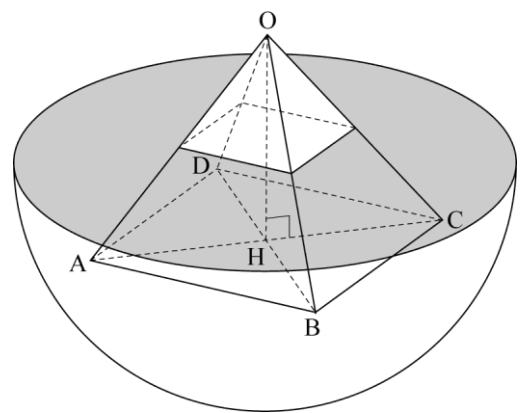
図 1 の正四角すい $OABCD$ の底面 $ABCD$ と水面が平行な状態を保ったまま、正四角すい $OABCD$ を容器の水の中に静かに沈めたところ、容器から水があふれた。

図 3 のように、頂点 A, B, C, D を半球の形をした容器の内側にぴったりとくっつけて、正四角すい $OABCD$ を静止させた。このとき、水面と辺 OA, OB, OC, OD の交点が各辺の中点となった。

次の (1), (2) の問いに答えなさい。

ただし、容器の厚さは考えないものとする。

図 3



(1) 正四角すい $OABCD$ を静止するまで沈めたときに、あふれた水の体積を求めなさい。

(2) 半球の形をした容器の半径を求めなさい。

解答欄

問 1	(cm)	
問 2	(cm ³)	
問 3	(1)	(cm ³)
	(2)	(cm)

解答

問 1 $3\sqrt{2}$ (cm)

問 2 $36\sqrt{2}$ (cm³)

問 3

(1) $\frac{63\sqrt{2}}{2}$ (cm³)

(2) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ (cm)

解説

問 1

△ABC において、三平方の定理より $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$ よって、 $AH = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}\text{cm}$

問 2

△OAH において、三平方の定理より $OH = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

よって、求める体積は $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}(\text{cm}^3)$

問 3

(1)

辺 OA, OB, OC, OD の中点をそれぞれ P, Q, R, S とおく。正四角すい OPQRS と正四角すい OABCD

の体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$ だから、あふれた水の体積は正四角すい OABCD の体積の $\frac{7}{8}$ 倍に等しい。よっ

て、求める体積は $36\sqrt{2} \times \frac{7}{8} = \frac{63\sqrt{2}}{2}(\text{cm}^3)$

(2)

正方形 PQRS の対角線の交点を O' とすると、点 O' は半球の中心となる。したがって、半球の半径

の長さは $O'A$ の長さと等しい。△ $O'AH$ において、三平方の定理より $O'A = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{18 + \frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}(\text{cm})$$

【問 30】

図 1 のような円錐と半球の容器がある。

図 1 の円錐の頂点を点 P 、底面である円の中心を点 O 、円 O の円周上の点の 1 つを点 Q とする。また、 $OP \perp OQ$ 、 $OQ = 3 \text{ cm}$ 、 $PQ = 9 \text{ cm}$ 、半球の半径は 3 cm とする。

このとき、次の問 1～問 4 に答えなさい。ただし、円周率は π とし、容器の厚さや変形は考えないものとする。

(宮崎県 2019 年度)

問 1 図 1 の円錐の高さ OP の長さを求めなさい。

問 2 図 1 の 2 つの容器の口をぴったりと重ねて、図 2 の立体をつくった。この立体の表面積を求めなさい。

問 3 図 3 は、図 1 の円錐の底面が水平になるように置き、頂点 P から 6 cm の高さとなるところまで水を注いだものである。この水をすべて図 1 の半球に移したとき、移した水の体積は、図 1 の半球の体積の何%であるか求めなさい。

問 4 図 4 のような、 $AB = 4 \text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ の紙がある。辺 AD の中点を M とし、辺 AB と辺 DC が重なるようにまらめて円柱の筒をつくる。

図 5 は、この筒に図 1 の円錐を、母線 PQ の一部が線分 AB とぴったりと重なるように入れたものである。筒の点 B と円錐の頂点 P は重なっており、点 M は円錐の側面にくっついている。

このとき、長方形 $ABCD$ の辺 AD の長さを求めなさい。ただし、紙の厚さや筒の変形は考えないものとする。

図 1

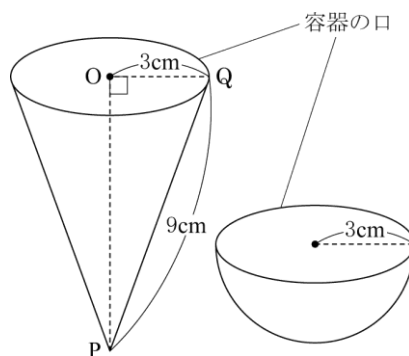


図 2

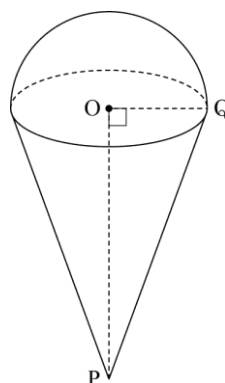


図 3

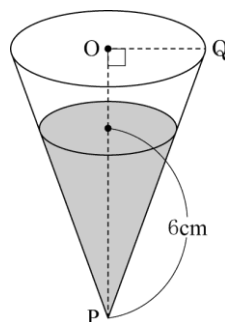


図 4

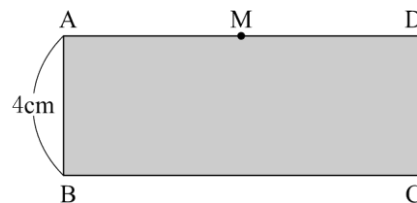
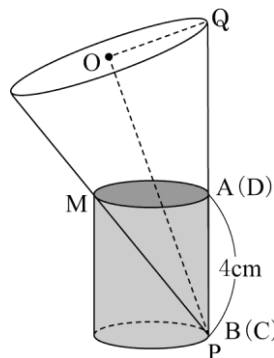


図 5



解答欄

問 1	cm
問 2	cm ²
問 3	%
問 4	cm

$$AD = \pi \times \frac{16\sqrt{2}}{7} = \frac{16\sqrt{2}}{7} \pi \text{ (cm)}$$

【問 31】

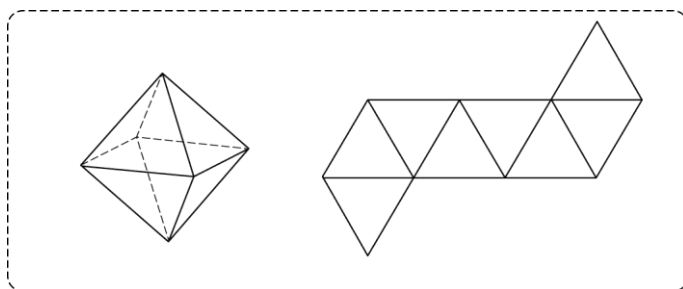
次の問 1，問 2 に答えなさい。

(鹿児島県 2019 年度)

問 1 次の ア ～ オ に適当な数または番号を入れ，会話文を完成させよ。

先生：図 1 は，正八面体の見取図と展開図です。正八面体とは，どのような立体でしたか。

図 1



生徒：8 個の合同な正三角形で囲まれた立体で，頂点が 6 個，辺が ア 本あります。

先生：そうですね。では，正八面体の体積を立方体を使って求めてみましょう。図 2 のように，立方体のそれぞれの面の対角線の交点を A，B，C，D，E，F とするとき，この 6 個の点を頂点とする正八面体ができます。このとき，四角形 AEFC，ABFD，BCDE は合同な正方形です。立方体を正方形 BCDE を含む平面で切った切り口は図 3 のようになり，正方形 BCDE の対角線の長さは，立方体の 1 辺の長さと等しいことが分かります。立方体の 1 辺の長さを 4 cm とし，正八面体 ABCDEF の体積を求めてみましょう。

図 2

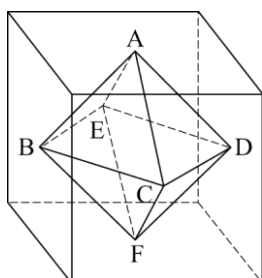
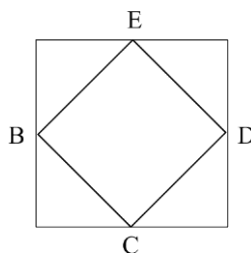


図 3



生徒：正方形 BCDE の面積は イ cm^2 だから，正四角すい ABCDE の体積は ウ cm^3 です。この正四角すいの体積の 2 倍が正八面体の体積となります。

先生：立方体を使うと，体積が求めやすくなります。正八面体の特徴にもよく気がつきました。では，次の問題はどうか。

先生：図 4 の 1 辺の長さが 6 cm の正八面体において，点 B から辺 AC，CD，DF を通って点 E まで，1 本の糸をかけます。糸の長さが最も短くなるようにかけたときの，糸の長さは何 cm か，図 5 の展開図を使って求めてみましょう。

図 4

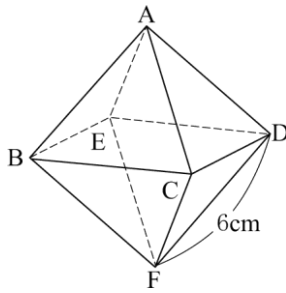
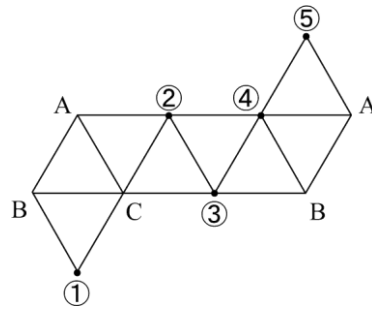


図 5



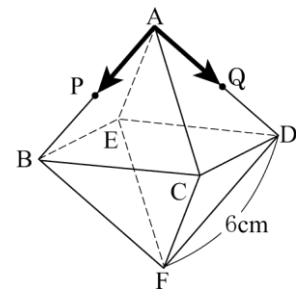
生徒：図 5 の①～⑤の中で、点 E にあたる番号は、エ です。かけた糸のようすを図 5 にかき入れて考えてみると、最も短くなるときの糸の長さは、オ cm となりました。

先生：そうですね。展開図にかき入れると、かけた糸のようすが分かりやすくなります。最後は、正八面体の中に作られた立体の体積の変化の問題です。図 6 の 1 辺の長さが 6 cm の正八面体の辺上を、毎秒 1 cm の速さで 6 秒間だけ動く 2 点 P, Q があります。2 点 P, Q は点 A を同時に出発し、点 P は辺 AB 上を点 B に向かって、点 Q は辺 AD 上を点 D に向かって動きます。

三角すい CPFQ の体積が正八面体 ABCDEF の体積の $\frac{1}{6}$ となるのは、2 点 P, Q が点 A を
出発してから何秒後のことか、考えてみましょう。

問 2 問 1 の会話文中の下線部について、何秒後か求めよ。ただし、2 図 6

点 P, Q が点 A を出発してから t 秒後のこととして、 t についての方程式と計算過程も書くこと。



解答欄

問 1	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
	オ	
問 2	〔式と計算〕	
	答 秒後	

解答

問 1

ア 12

イ 8

ウ $\frac{16}{3}$

エ ④

オ $6\sqrt{7}$

問 2

〔式と計算〕

正八面体の体積は、 $2 \times \frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$ (cm³) だから、

この正八面体の体積の $\frac{1}{6}$ は、 $12\sqrt{2}$ (cm³) である。

底面積となる△PFQ の面積は、

$$6^2 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times (6-t) - \frac{1}{2} \times 6 \times (6-t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t \text{ (cm}^2\text{)}$$

体積の関係から、 t についての方程式をつくると、

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}t^2 + 6t \right) \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$t^2 - 12t + 24 = 0$$

解の公式より

$$t = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6 \pm 2\sqrt{3}$$

$$0 \leq t \leq 6 \text{ より}$$

$$t = 6 - 2\sqrt{3}$$

(答) $6 - 2\sqrt{3}$ (秒後)

解説

問 1

ア 見取図をみて数えると、辺は 12 本ある。

イ 正方形 BCDE を、2 本の対角線が 4cm のひし形とみて面積を求めると、 $4 \times 4 \div 2 = 8(\text{cm}^2)$

ウ 正四角すい ABCDE は、底面が正方形 BCDE で、高さは立方体の 1 辺の長さの半分だから、2cm

よって、体積は、 $\frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}(\text{cm}^3)$

エ ①と③が点 F、②と⑤が点 D、④が点 E にあたる。

オ 平面上で 2 点 B、E を結ぶ経路のうち、長さが最も短いのは線分 BE
よって、展開図上で線分 BE の長さを求めればよい。面 EFB で、E から FB に垂線 EH をひくと H は辺 FB の中点だから、 $FH = 3\text{cm}$ また、 $\triangle EFH$ は 60° の角をもつ直角三角形だから、 $FH : EH = 1 : \sqrt{3}$ よって、 $EH = 3\sqrt{3}\text{cm}$

直角三角形 EBH で、三平方の定理より、

$$BE^2 = BH^2 + EH^2 = (6 + 6 + 3)^2 + (3\sqrt{3})^2 = 252$$

$$BE > 0 \text{ だから、} BE = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}(\text{cm})$$

問 2

正八面体の体積を問 1 と同様に考える。正四角すい ABCDE は、底面が 1 辺 6 cm の正方形 BCDE で、高さは正方形 BCDE の対角線の長さの半分だから、 $6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

正四角すい ABCDE の体積は、 $\frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}(\text{cm}^3)$

よって、正八面体の体積は、 $36\sqrt{2} \times 2 = 72\sqrt{2}(\text{cm}^3)$ だから、その $\frac{1}{6}$ は、 $72\sqrt{2} \times \frac{1}{6} = 12\sqrt{2}(\text{cm}^3)$

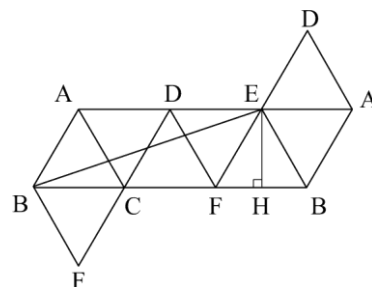
また、三角すい CPFQ は $\triangle PFQ$ を底面とすると、高さは頂点 C から平面 ABFD へひいた垂線の長さだから、正四角すい ABCDE の高さと同しく $3\sqrt{2}\text{cm}$

底面の $\triangle PFQ$ は、正方形 ABFD から $\triangle APQ$ 、 $\triangle BFP$ 、 $\triangle DFQ$ を取り除いた形とみることができる。

2 点 P、Q が出発してから t 秒後に、 $AP = AQ = t\text{cm}$ 、 $PB = QD = 6 - t(\text{cm})$ だから、 $\triangle PFQ$ の面積は、

$$6^2 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times (6 - t) - \frac{1}{2} \times 6 \times (6 - t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t(\text{cm}^2) \quad \text{よって、三角すい CPFQ の体積に着目して方程式}$$

$$\text{をつくると、} \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}t^2 + 6t\right) \times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \quad \text{これを解けばよい。}$$



【問 32】

図 1 は、1 辺の長さが 6 cm の正八面体である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2019 年度)

問 1 図 2 は図 1 の立体の展開図である。図 2 の点 $\mathcal{A}$ に対応する頂点を図 1 の A～F のうちから 1 つ 選び、記号で答えなさい。

問 2 図 1 の立体における線分 AF の長さを求めなさい。

問 3 図 3 のように、図 1 の立体の内部ですべての面に接している球がある。この球の体積を求めなさい。

ただし、円周率は π とする。

図 1

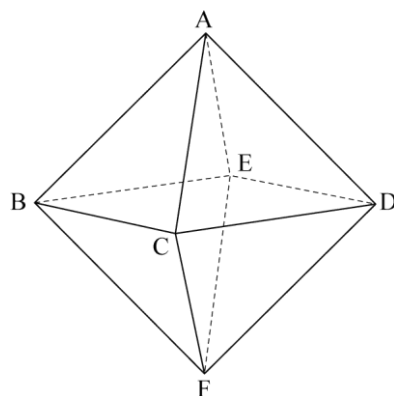


図 2

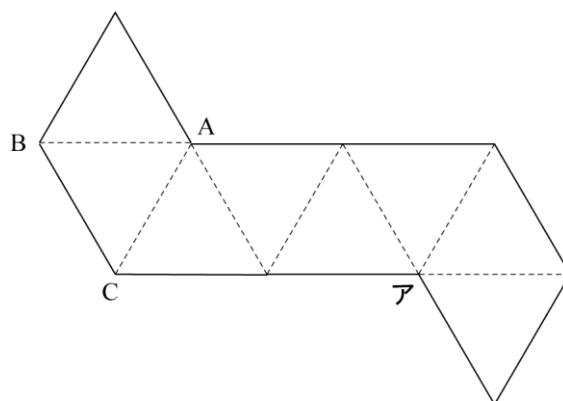
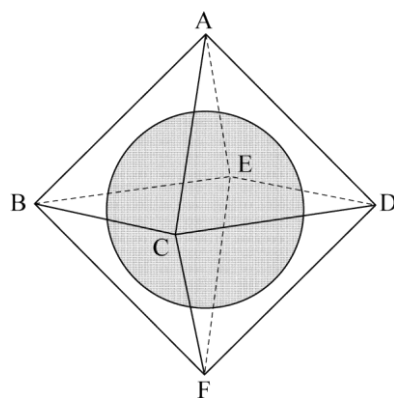


図 3



解答欄

問 1	
問 2	cm
問 3	cm ³

解答

問 1 F

問 2 $6\sqrt{2}$ cm

問 3 $8\sqrt{6}\pi$ cm³

解説

問 1

展開図に点をかき込むと右図のようになる。よって、点アに対応する頂点は F である。

問 2

正方形 BCDE の対角線の交点を H とする。△BCE において、三平方の定理より

$CE = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$ よって、 $CH = 3\sqrt{2}\text{cm}$ だから、
△ACH において、三平方の定理より $AH = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

したがって、 $AF = 2AH = 6\sqrt{2}(\text{cm})$

問 3

正八面体を 8 つの面を底面とし、点 H を共通の頂点とする体積の等しい 8 つの立体にわけると、
底面の面積は

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

球の半径を $r\text{cm}$ とすると、三角すい HABC の体積は $\frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times r = 3\sqrt{3}r(\text{cm}^3)$

正八面体の体積は $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 6\sqrt{2} = 72\sqrt{2}(\text{cm}^3)$ より、 $3\sqrt{3}r \times 8 = 72\sqrt{2}$ $r = \sqrt{6}(\text{cm})$

よって、求める球の体積は $\frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{6})^3 = 8\sqrt{6}\pi(\text{cm}^3)$

