5. 合同･相似以外の証明･その他複合問題 【2006 年度出題】

【問 1】

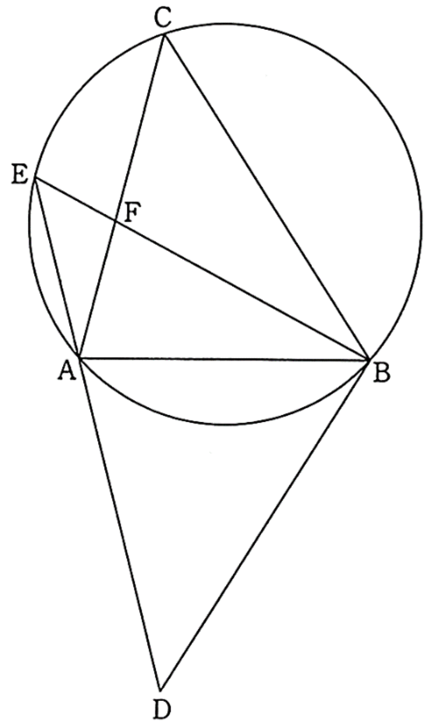
右の図のように，辺 AB が共通な△ABC と△ADB があります。この 2 つの三角形を組み合わせた四角形 ADBC は，対角線 AB を対称の軸とする線対称な図形とします。△ABC の 3 つの頂点を通る円と，△ADB の辺 DA の延長との交点を E とし，線分 BE と AC の交点を F とします。

次の問いに答えなさい。

（北海道　2006 年度）

問1　∠ABF＝30°，∠AFE＝100°　のとき，∠BAF　の大きさを求めなさい。

問2　BC＝BE を証明しなさい。



解答欄

問1	度	
問2	証明	

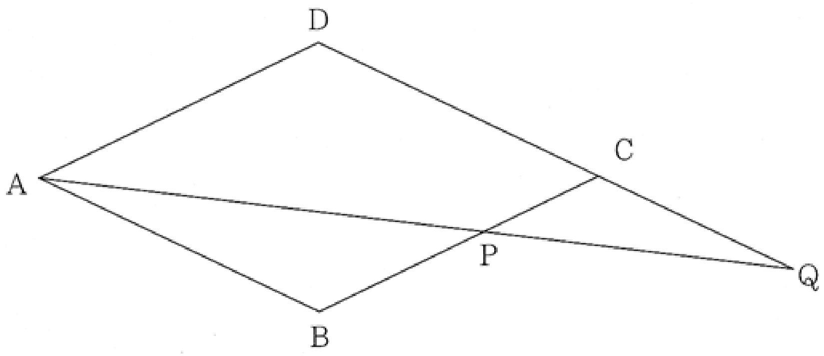
解答
問1　70 度
問2
BC＝BD，∠ACB＝∠ADB (仮定)
∠ACB＝∠AEB (円周角)
∠ADB＝∠AEB から
△BED は二等辺三角形である。
よって BE＝BD
したがって BC＝BE
解説
問1
△ABF において，三角形の内角と外角の関係より，∠BAF＝∠AFE－∠ABF＝100°－30°＝70°

【問 2】

図Ⅰのように，ひし形 ABCD の辺 BC 上に点 P をとり，直線 AP と直線 DC との交点を Q とします。あとの(1)，(2)の問いに答えなさい。

（宮城県 2006 年度）

図Ⅰ

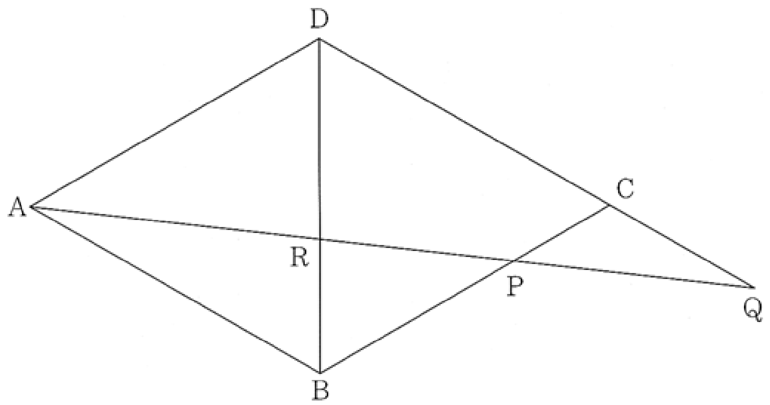


(1) BA:BP＝DQ:DA となることを証明しなさい。

(2) 図Ⅱは，図Ⅰにおいて，∠DAB＝60°，BP:PC＝3:1 とし，直線 DP と線分 BQ との交点を R としたものです。

あとの①，②の問いに答えなさい。

図Ⅱ



① 点 D と点 B を結びます。線分 DQ と線分 DB の長さの比を求めなさい。

② AB＝6 cm とし，3 点 P，B，R を通る円の中心を O とします。点 O と点 B，点 O と点 P をそれぞれ結んでできるおうぎ形のうち，中心角の小さい方の面積を求めなさい。ただし，円周率は π とします。

解答欄

問1	度
問2	証明

解答
(1)
△ABPと△QDAにおいて
ひし形の対角はそれぞれ等しいから
∠B＝∠D…①
平行線の錯角は等しいから
∠BAP＝∠DQA…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABP∽△QDA
したがって対応する辺の比が等しいから
BA:DQ＝BP:DA
このことからBA:BP＝DQ:DA
(2)
①　4:3
②　$\frac{9}{4}\pi$　cm^2
解説
(2)
①
∠DAB＝60°より△ABD, △CBDは正三角形。
BP:PC＝3:1よりBA＝BC＝$\frac{4}{3}$BP
(1)よりDQ:DA＝BA:BP＝$\frac{4}{3}$BP:BP＝4:3
DB＝DAよりDQ:DB＝DQ:DA＝4:3
②
△DQBと△BDPで
DQ:DB＝BD:BP＝4:3　∠BDQ＝∠PBD＝60°
よって2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
△DQB∽△BDP
よって∠DQB＝∠BDP
∠BRP＝∠DQB＋∠RDQ＝∠BDP＋∠RDQ＝60°
円周角の定理より
∠BOP＝2∠BRP＝2×60°＝120°　BP＝$\frac{4}{3}$BC＝$\frac{4}{3}\times 6=\frac{9}{2}$cm
OからBPに垂線OHをひく。
△OBHにおいて
∠BOH＝$\frac{1}{2}$∠BOP＝60°より
OB:BH＝$2:\sqrt{3}$
OB:$\frac{9}{4}=2:\sqrt{3}$
OB＝$\frac{9}{4}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$cm
よって求める面積は$\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{120}{360}=\frac{9}{4}\pi$　cm^2

【問 3】

平行四辺形の性質「平行四辺形では，2 組の対辺はそれぞれ等しい」

を証明するには，

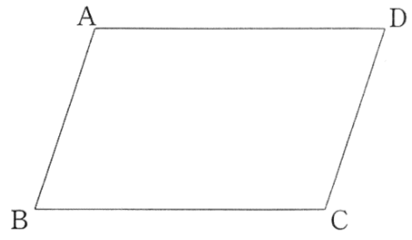
四角形 ABCD において，

AB // DC，AD // BC ならば，

AB＝DC，AD＝BC である

ことを示せばよい。次の ▭ はその証明である。

▭ に証明の続きを書いて，証明を完成させなさい。



（秋田県　2006 年度）

［証明］

四角形 ABCD の対角線 AC をひく。

したがって，AB＝DC，AD＝BC

解答欄

問1	度
問2	証明

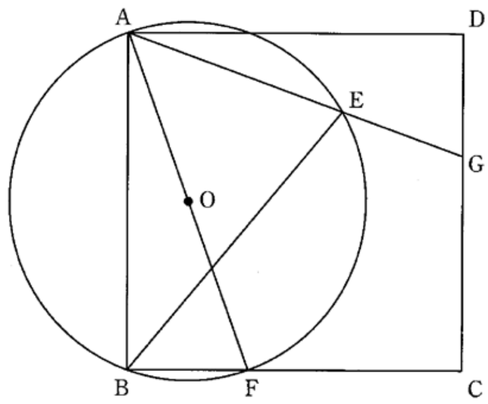
解答
△ABC と△CDA において
AB // DC より
∠BAC＝∠DCA (錯角)
AD // BC より
∠ACB＝∠CAD (錯角)
AC＝CA (共　通)
1 辺とその両端の角がそれぞれ等いから
△ABC≡△CDA
したがって
AB＝DC, AD＝BC

【問 4】

図において，四角形 ABCD は正方形である。3 点 A，B，E は円 O の周上の点であり，AB＝BE である。また，点 F は円 O と BC との交点であり，点 G は AE の延長と CD との交点である。

このとき，AF＝AG となることを証明しなさい。

（福島県　2006 年度）



解答欄

問1	度	
問2	証明	

解答

[証明の例 1]
△ABF と△ADG において
四角形 ABCD は正方形であるから
AB＝AD …(1)
∠ABF＝∠ADG＝90° …(2)
同じ弧に対する円周角は等しいから
∠AFB＝∠AEB…(3)
△ABE は二等辺三角形であるから
∠AEB＝∠EAB…(4)
平行線の錯角は等しいから
∠EAB＝∠AGD…(5)
(3), (4), (5)から
∠AFB＝∠AGD …(6)
三角形の内角の和は 180° であり, (2), (6)から, 残りの角も等しい。
したがって∠BAF＝∠DAG…(7)
(1), (2), (7)から
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABF≡△ADG
合同な三角形では対応する辺の長さが等しいから
AF＝AG

[証明の例 2]
AC をひく。
△ACF と△ACG において
辺 AC は共通…(1)
AC は∠BCD, ∠BAD の二等分線であるから
∠ACF＝∠ACG…(2)
∠BAC＝∠DAC…(3)
△ABE は二等辺三角形であるから
∠EAB＝∠AEB…(4)
同じ弧に対する円周角は等しいから
∠AEB＝∠AFB…(5)
平行線の錯角は等しいから
∠AFB＝∠DAF…(6)
(4), (5), (6)から
∠EAB＝∠DAF…(7)
(3), (7)から
∠FAC＝∠DAF－∠DAC
＝∠EAB－∠BAC
＝∠GAC
したがって∠FAC＝∠GAC…(8)
(1), (2), (8)から
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ACF≡△ACG
合同な三角形では対応する辺の長さが等しいから
AF＝AG

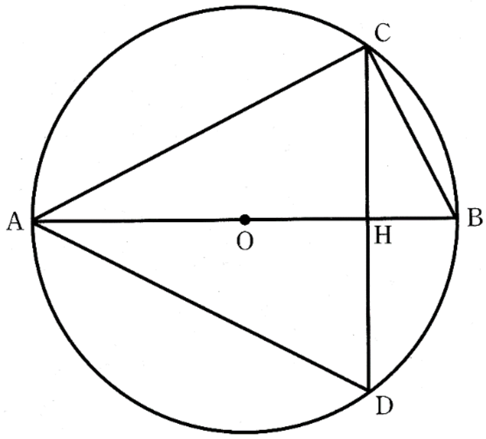
解説
△ABF と△ADG において
四角形 ABCD は正方形より AB＝AD…①
∠ABF＝∠ADG＝90° …②
AB＝BE より
∠BAE＝∠AEB…③
AB // DC より
∠BAE＝∠AGD…④
弧 AB の円周角より
∠AEB＝∠AFB…⑤
③, ④, ⑤より
∠AFB＝∠AGD…⑥
三角形の内角の和は 180°だから
②, ⑥より
∠ABF＝∠ADG…⑦
①, ②, ⑦より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ABF≡△ADG
よって AF＝AG

【問 5】

図のように，線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の円周上に点 C をとり，△ABC をつくる。点 C から線分 AB へ垂線をひき，線分 AB との交点を H とし，円 O と線分 CH の延長との交点を D とする。

このとき，△ADC が二等辺三角形であることを証明しなさい。

（茨城県　2006 年度）



解答欄

証明

解答

$\triangle$CHB は$\angle$CHB＝90°の直角三角形だから

$\angle$HBC＝180°－(90°＋$\angle$HCB)

＝90°－$\angle$HCB…①

半円の弧に対する円周角より$\angle$ACB＝90°　だから

$\angle$ACH＝90°－$\angle$HCB…②

①，②より

$\angle$HBC＝$\angle$ACH

$\angle$HBC＝$\angle$ABC，$\angle$ACH＝$\angle$ACD だから

$\angle$ABC＝$\angle$ACD…③

また$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角より

$\angle$ABC＝$\angle$ADC…④

③，④より

$\angle$ACD＝$\angle$ADC となり

2 つの角が等しいので

$\triangle$ADC は二等辺三角形である。

解説

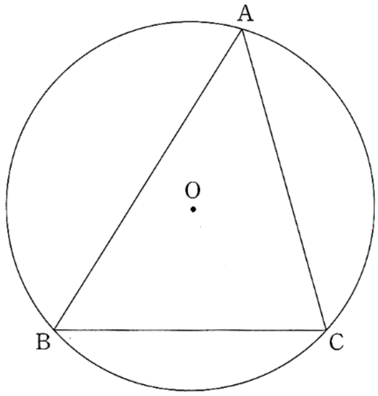
2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形であるから$\angle$ACD＝$\angle$ADC を示す。

【問 6】

右の図は，三角形 ABC と，三角形 ABC の 3 つの頂点を通る円 O である。∠B の二等分線と円 O との交点を D，∠C の二等分線と円 O との交点を E とする。また，線分 ED と辺 AB, AC との交点をそれぞれ F, G とする。

次の1～3の問いに答えなさい。

（群馬県　2006 年度）



問1　4 点 D, E, F, G を，コンパスと定規を用いて作図しなさい。ただし，図をかくのに用いた線は消さないこと。

問2　∠AED＝∠DAC である。このことを次のように証明した。

$\boxed{\text{ア}}$ には適する語を，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ には適する記号をそれぞれ入れなさい。

［証明］

$\stackrel{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する $\boxed{\text{ア}}$ が等しいから，∠AED ＝ ∠$\boxed{\text{イ}}$

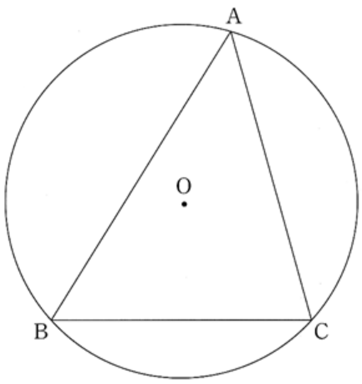
$\stackrel{\frown}{\mathrm{DC}}$に対する $\boxed{\text{ア}}$ が等しいから，∠DAC ＝ ∠$\boxed{\text{ウ}}$

BD は ∠B の二等分線だから，　∠$\boxed{\text{イ}}$ ＝ ∠$\boxed{\text{ウ}}$

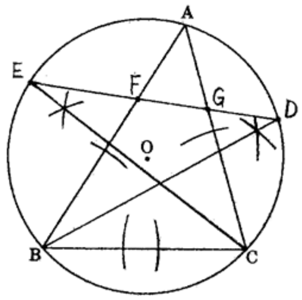
したがって，∠AED＝∠DAC である。

問3　三角形 AFG はどんな三角形であるか，書きなさい。また，そうであることを証明しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">(三角形)

(証明)</td></tr>
</table>

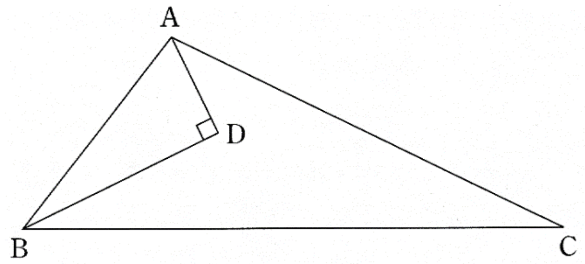
解答
問1


問2
ア　円周角
イ　ABD
ウ　DBC
問3
二等辺 (三角形)
(証明)
$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角が等しいから∠ADE＝∠ACE
$\overset{\frown}{EB}$に対する円周角が等しいから∠EAB＝∠ECB
CE は∠C の二等分線だから∠ACE＝∠ECB
したがって∠ADE＝∠EAB…①
ここで∠AFG＝∠AEF＋∠EAF
＝∠AED＋∠EAB…②
∠AGF＝∠DAG＋∠ADG
＝∠DAC＋∠ADE…③
(2)より∠AED＝∠DAC…④
①, ②, ③, ④より∠AFG＝∠AGF
したがって三角形 AFG は二等辺三角形である。
解説
問3
弧 BE に対する円周角が等しいから
∠EAB＝∠ECB
弧 AE に対する円周角が等しいから
∠ADE＝∠ACE
CE は∠ACB の二等分線だから
∠ECB＝∠ACE
よって∠EAB＝∠ADE…①
問2より
∠AED＝∠DAC…②
∠AFG＝∠AED＋∠EAB…③
∠AGF＝∠DAC＋∠ADE…④
①, ②, ③, ④より
∠AFG＝∠AGF
よって△AFG は AF＝AG の二等辺三角形。

【問 7】

図の△ABC において，∠ABC の大きさは∠ACB の大きさの 2 倍である。∠ABC の二等分線に頂点 A から垂線を引き，交点を D とすると，AC＝2BD となる。

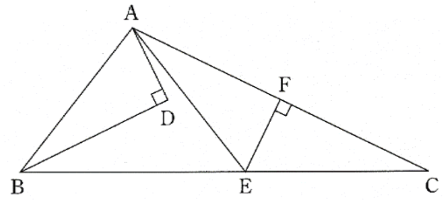
下の ┆　┆ の中は，AC＝2BD の証明を途中まで示してある。



証明

辺 BC 上に，AB＝AE となる点 E をとる。

さらに，点 E から辺 AC に垂線を引き，交点を F とする。



△ECF と△EAF において，

仮定から，　∠ABE　＝2∠ACE

△ABE は二等辺三角形であるから，

∠ABE＝∠AEB …①

したがって，∠AEB＝2∠ACE …②

よって，∠ACE＝ (a) …③

③から，△ECA は 2 角が等しい三角形より，

EC＝EA …④

∠EFC＝∠EFA＝90° …⑤

③，④，⑤から， (b) ，

△ECF≡△EAF

よって，FC＝FA …⑥

(続く)

次の1，2の問いに答えなさい。

（千葉県　2006 年度）

問1 $\boxed{}$ の中の $\boxed{\text{(a)}}$, $\boxed{\text{(b)}}$ の中に入る最も適当なものを，(a)は下の A 群のア～エの中から，(b)は下の B 群のア～オの中から，それぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。

A 群

ア ∠CAE
イ ∠AEC
ウ ∠CAB
エ ∠AEF

B 群

ア 3 辺がそれぞれ等しいので
イ 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
ウ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
エ 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので
オ 直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

問2 $\boxed{}$ の中の証明の続きを書き，証明を完成させなさい。

ただし，$\boxed{}$ の中の①～⑥に示されている関係を使う場合，番号の①～⑥を用いてもかまわないものとする。

解答欄

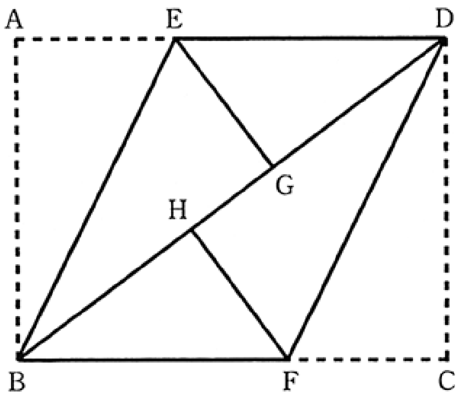
<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(a)</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">(証明の続き)</td></tr>
</table>

解答
問1
(a)　ア
(b)　エ
問2
(証明の続き)
△ABD と△EAF において
仮定と⑤から
∠ADB＝∠EFA＝90°　…⑦
△ABE は二等辺三角形であるから
AB＝EA…⑧
仮定から
2∠ABD＝∠ABE
②, ③から
2∠EAC＝∠AEB
よって①から
∠ABD＝∠EAF…⑨
⑦, ⑧, ⑨から
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので
△ABD≡△EAF
よって BD＝AF
⑥から AC＝2AF
したがって AC＝2BD
解説
FC＝FA まで証明済みであるから
BD＝FA または BD＝FC が証明できれば
AC＝2FA＝2FC より
結論が AC＝2BD を導くことができる。
よって△ABD と△EAF の合同から証明を続ける。

【問 8】

図は，AB＝6 cm，AD＝8 cm の長方形の紙 ABCD を，辺 AB，CD がそれぞれ対角線 BD と重なるように折り返したところを示したものである。このときできた辺 AD，BC 上の折り目の端をそれぞれ E，F とし，頂点 A，C が対角線 BD と重なった点をそれぞれ G，H とするとき，次の 1，2の問いに答えなさい。

（新潟県　2006 年度）



問1　四角形 EBFD は平行四辺形であることを証明しなさい。

問2　線分 EG の長さを求めなさい。

解答欄

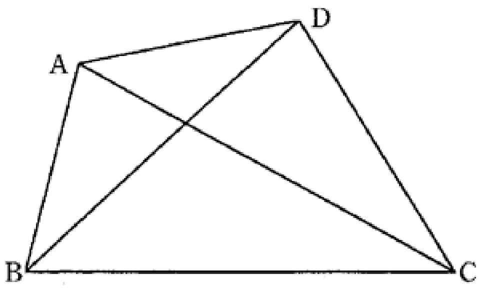
問1	
問2	cm

解答
問1
四角形ABCDは長方形だから
ED // BF…ア
∠ABD＝∠CDB…イ
仮定から
$\angle EBD = \frac{1}{2}\angle ABD$…ウ
$\angle FDB = \frac{1}{2}\angle CDB$…エ
イ，ウ，エより
∠EBD＝∠FDB
錯角が等しいから
EB // DF…オ
ア，オより
2組の向かい合う辺がそれぞれ平行であるから
四角形EBFDは平行四辺形である。
問2　3 cm
解説
問2
△ABDで
三平方の定理より $BD = \sqrt{6^2+8^2} = 10cm$
よって GD＝10－BG＝10－AB＝10－6＝4cm
また AE＝x cm とすると
EG＝AE＝x cm，ED＝8－x cm
△EGDで
三平方の定理より
$(8-x)^2 = x^2 + 4^2$
$16x = 48$
$x = 3$cm

【問 9】

四角形 ABCD について，次の問いに答えなさい。

（富山県　2006 年度）



右の図のように，四角形 ABCD の頂点 A と C，B と D をそれぞれ結ぶ。このとき，四角形 ABCD が必ず平行四辺形となるためには，どのような条件をみたしていればよいか，下のア～エの中から 1 つ選び，その記号を書きなさい。

ア　AD＝DC，AB＝BC

イ　AD // BC，AB＝DC

ウ　∠ADB＝∠CBD，∠ABD＝∠CDB

エ　∠ADB＝∠CBD，∠BAC＝∠CDB

解答欄

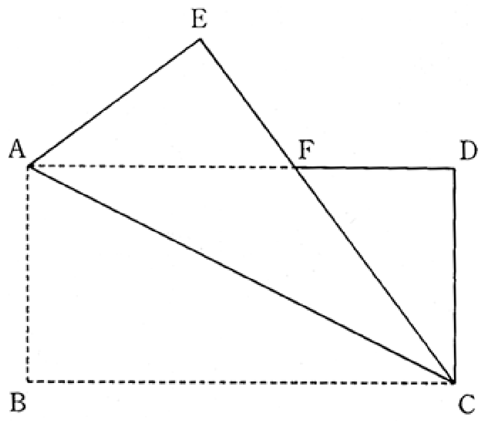
解答
ウ

【問 10】

図は，長方形の紙 ABCD を AC で折り曲げたものである。点 B の移った点を E とし，AD と CE の交点を F とする。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2006 年度）



問1　∠ACE＝∠a のとき，∠CFD の大きさを∠a を用いて表しなさい。なお，解答欄の$\boxed{}$には答だけを書くこと。

問2　点 D と点 E を結んだとき，∠FDE＝∠FED であることを証明しなさい。

問3　AB＝4 cm，BC＝8 cm のとき，△FAC の面積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	∠CFD＝
問2	〔証明〕
問3	〔計算〕 〔答〕　　　　　cm^2

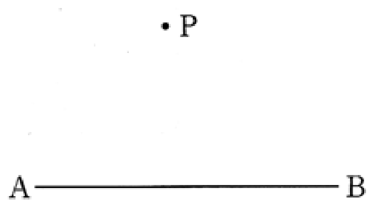
解答
問1　$\angle CFD = 2\angle a$
問2
△ADE と△CED において
四角形 ABCD は長方形だから
AE＝CD
AD＝CE
DE は共通
3 辺がそれぞれ等しいので
△ADE≡△CED
したがって
$\angle FDE = \angle FED$
問3
$\angle FDE = \angle FED$ より
△FDE は FD＝FE の二等辺三角形
FE＝x cm とすると FC＝8－x cm
△CDF で三平方の定理より
$FC^2 = FD^2 + CD^2$
$(8-x)^2 = x^2 + 4^2$
$x = 3$
よって，AF＝8－3＝5cm
△FAC＝$\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10\text{cm}^2$
〔答〕 10 cm^2
解説
問1
折り返した角だから
$\angle ACB = \angle ACE = \angle a$
AD // BC より錯角は等しいので
$\angle CFD = \angle BCE = 2\angle a$

【問 11】

図 1 のように，線分 AB と，AB 上にない点 P がある。点 P を通り，線分 AB に垂直な直線の作図について，次の問1，問2に答えなさい。

（山梨県　2006 年度）

図 1



問1 中心が点 P で，線分 AB と 2 点で交わる弧を最初にかく方法により，点 P を通り，線分 AB に垂直な直線を図 1 に作図しなさい。
ただし，作図には定規とコンパスを用い，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

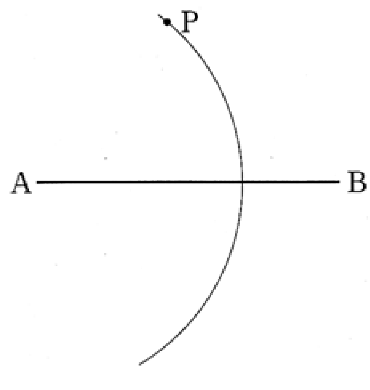
問2 この作図には，次のような方法も考えられる。

〔方法〕

① 点 A を中心として，点 P を通る弧をかく。
② $\boxed{}$をかき，①でかいた弧との 2 つの交点のうち，P と異なる点を Q とする。
③ 直線 PQ をひく。

右の図 2 は，上の方法の①まで作図したものである。
このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

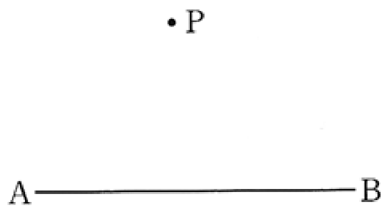
図 2



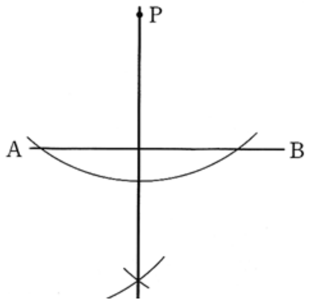
(1) 方法の①と②によって，AP＝AQ と BP＝BQ が同時に成り立つように，②の $\boxed{}$ に当てはまる言葉を書きなさい。

(2) AP＝AQ，BP＝BQ を仮定として，AB⊥PQ であることを証明しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1
解答例</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>(証明)</td></tr>
</table>

解答
問1



問2
(1)
点 B を中心として点 P を通る弧
(2)
(証明)
△ABP と△ABQ において
仮定より
AP＝AQ…①
BP＝BQ…②
また
AB は共通…③
①, ②, ③より
3 辺がそれぞれ等しいから
△ABP≡△ABQ…④
④より
合同な三角形の対応する角は等しいから
∠PAB＝∠QAB…⑤
①より
△APQ は∠A を頂角とする二等辺三角形であり
⑤より AB は∠A の二等分線である。
二等辺三角形の頂角の二等分線は
底辺を垂直に二等分するから
AB⊥PQ
解説
問2
(2)
△ABP と△ABQ は
3 辺がそれぞれ等しいので
合同になる。
よって対応する角の大きさは等しいから
∠PAB＝∠QAB
これは二等辺三角形 APQ の頂角の二等分線になるから
底辺 PQ を垂直に 2 等分する。
よって AB⊥PQ である。

【④の後の別証明】
AB と PQ の交点を C とすると
△APC と△AQC において
④より
合同な三角形の対応する角は等しいから
∠PAC＝∠QAC…⑤
また
AC は共通…⑥
①, ⑤, ⑥より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△APC≡△AQC
合同な三角形の対応する角はそれぞれ等しいので
∠ACP＝∠ACQ
また
∠ACP＋∠ACQ＝180°
したがって∠ACP＝90°
すなわち AB⊥PQ

【問 12】

長方形 ABCD の対角線 BD 上に 2 点 E, F を∠AEB＝90°，∠CFD＝90° となるようにとり，四角形 AECF をつくる。このとき，四角形 AECF が平行四辺形であることを次のように証明したい。

$\boxed{\text{Ⅰ}}$，$\boxed{\text{Ⅱ}}$，$\boxed{\text{Ⅲ}}$ にあてはまる最も適当なものを，下のアからケまでの中からそれぞれ一つ選んで，そのかな符号を書け。

（愛知県 2006 年度 A）

(証明) △ABE と△CDF で，

長方形の向かいあう辺の長さは等しいから，AB＝CD …①

また，∠AEB＝∠CFD＝90° …②

AB // DC だから，∠ABE＝∠CDF …③

①，②，③から，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので，

△ABE≡△CDF

よって，$\boxed{\text{Ⅰ}}$ …④

また，BD⊥AE，BD⊥CF だから，$\boxed{\text{Ⅱ}}$ …⑤

④，⑤から，$\boxed{\text{Ⅲ}}$，四角形 AECF は平行四辺形である。

ア ∠EAB＝∠FCD　　イ BE＝DF　　ウ AE＝CF

エ AE // CF　　オ AD // BC　　カ AE⊥CF

キ 2 組の向かいあう辺の長さが，それぞれ等しいので

ク 2 組の向かいあう辺が，それぞれ平行なので

ケ 1 組の向かいあう辺が，長さが等しくて平行なので

解答欄

Ⅰ（　　　　），Ⅱ（　　　　），Ⅲ（　　　　）

解答

Ⅰ ウ

Ⅱ エ

Ⅲ ケ

【問 13】

平行四辺形 ABCD で，対角線の交点 O を通る直線と 2 辺 AB，CD とが交わるとき，その交点を，それぞれ，P，Q とする。このとき，OP＝OQ であることを証明したい。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ をうめて証明を完成せよ。ただし，直線 PQ は平行四辺形の頂点を通らないものとする。

（愛知県 2006 年度 B）

(証明)　△AOP と△COQ で，AO＝CO …①
対頂角は等しいから，∠AOP＝∠ $\boxed{ア}$ …②
また，AB // DC で，錯角は等しいから，
∠OAP＝∠ $\boxed{イ}$ …③
①，②，③から，1 辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，
△AOP≡△COQ
よって，OP＝OQ

解答欄

ア	
イ	

解答
ア COQ
イ OCQ

【問 14】

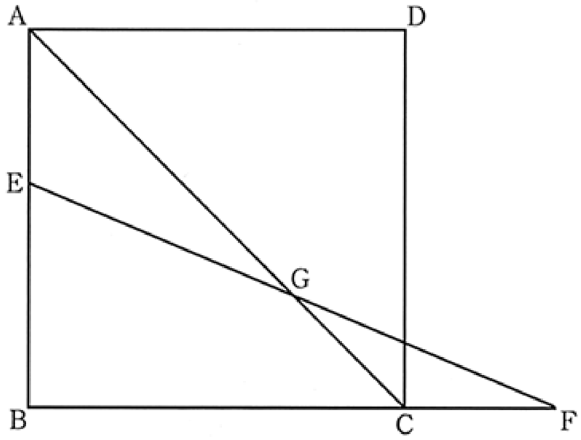
図Ⅰにおいて，四角形 ABCD は正方形である。E は，辺 AB 上にあって A，B と異なる点である。F は，直線 BC 上にあって C について B と反対側にある点である。AE＝CF である。

E と F とを結ぶ。G は，対角線 AC と線分 EF との交点である。

次の問いに答えなさい。

（大阪府 2006 年度 前期）

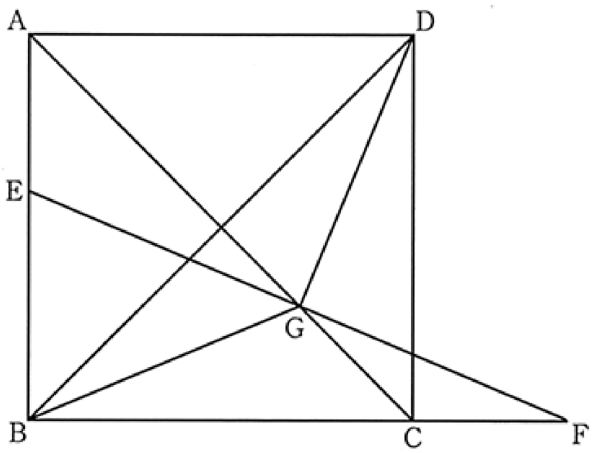
図Ⅰ



問1 EG＝FG であることを証明しなさい。

問2 図Ⅱは，図Ⅰに 3 点 D，B，G を結んでできる△DBG をかき加えたものである。AB＝a cm，AE＝b cm とする。△AEG の面積と△CFG の面積の和を S cm^2 とし，△DBG の面積を T cm^2 とするとき，$S=T$ であることを証明しなさい。

図Ⅱ



解答欄

問1	(証明)
問2	(証明)

解答

問1

(証明)

E を通り辺 BC に平行な直線と線分 AG との交点を H とする。

△EHG と△FCG において

EH // BC だから

∠EHA＝∠BCA＝45° (同位角)

また∠EAH=45°

だから AE＝HE…①

仮定より AE＝CF…②

①, ②より HE＝CF…③

EH // BC だから

∠HEG＝∠CFG (錯角)…④

∠EHG＝∠FCG (錯角)…⑤

③, ④, ⑤より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△EHG≡△FCG

したがって EG＝FG

問2

(証明)

G から辺 AB にひいた垂線と辺 AB との交点を P

G から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を Q

G から辺 CD にひいた垂線と辺 CD との交点を R とする。

△GQC において

∠QCG＝45°

∠QGC=180°－(∠GQC＋∠QCG)＝45°

だから GQ＝QC

また四角形 GQCR は長方形だから

GR＝QC

よって GQ＝GR だから

△AEG＋△CFG＝$\frac{1}{2}$×AE×GP＋$\frac{1}{2}$×CF×GQ

＝$\frac{1}{2}$×AE×(GP＋GR)

＝$\frac{1}{2}$×AE×AD

よって $S=\frac{1}{2}ab$ …①

一方

△DBG＝△DBC－(△BCG＋△DCG)

＝$\frac{1}{2}$×BC×DC－$\left(\frac{1}{2}\times \text{BC}\times \text{GQ}+\frac{1}{2}\times \text{DC}\times \text{GR}\right)$

∠EBC＝∠GQC=90° だから EB // GQ

EG＝FG だから GQ＝$\frac{1}{2}$EB＝$\frac{1}{2}(a-b)$ cm

よって $T=\frac{1}{2}a^2-2\times\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}ab$ …②

解説
問2
G から AB に垂線 GP, G から BC に垂線 GQ, G から CD に垂線 GR をひく。
△GQC において
∠GCQ＝45° より∠QGC＝180° −(90° ＋45°)＝45° より
GQ＝CQ の直角二等辺三角形。
また四角形 GQCR は 4 つの角が直角なので長方形だから GR＝CQ
よって GQ＝GR
$S=$△AEG＋△CFG
$=\frac{1}{2}\times$AE$\times$PG$+\frac{1}{2}\times$CF$\times$GQ
$=\frac{1}{2}\times b\times$PG$+\frac{1}{2}\times b\times$GQ
$=\frac{1}{2}b$ (PG＋GQ)
$=\frac{1}{2}b$(PG＋GR)
$=\frac{1}{2}\times b\times a=\frac{1}{2}ab\cdots$①
$T=$△DBG＝△CBD－△GBC－△GCD
$=\frac{1}{2}\times$BC$\times$CD$-\frac{1}{2}\times$BC$\times$GQ$-\frac{1}{2}\times$DC$\times$GR$=\frac{1}{2}\times a\times a-\frac{1}{2}\times a\times$GQ$-\frac{1}{2}\times a\times$GR
$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a$ (GQ＋GR)
$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a\times 2$GQ
ここで△FEB において
FG＝GE, GQ // EB より
FQ＝QB
中点連結定理より GQ$=\frac{1}{2}$EB$=\frac{1}{2}(a-b)$
よって $T=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a\times 2\times\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}ab\cdots$②
①, ②より $S=T$

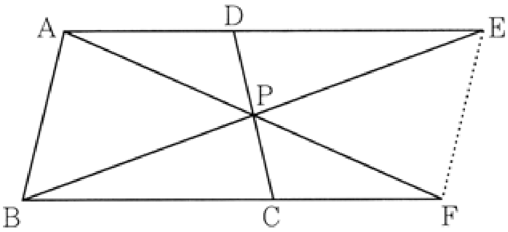
【問 15】

図 1 のような AD // BC の台形 ABCD がある。CD の中点を P とし，AD の延長と BP の延長との交点を E とする。また，BC の延長と AP の延長との交点を F とする。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県　2006 年度）

図 1



問1 四角形 ABFE が平行四辺形であることを次のように証明した。

$\boxed{\text{a}}$ には，△APD と△FPC が合同であることの証明を，$\boxed{\text{b}}$ には，あてはまる平行四辺形になる条件を書き，この証明を完成させなさい。

＜証明＞ △APD と△FPC において，

$\boxed{\text{a}}$

よって，AP＝FP……㋐

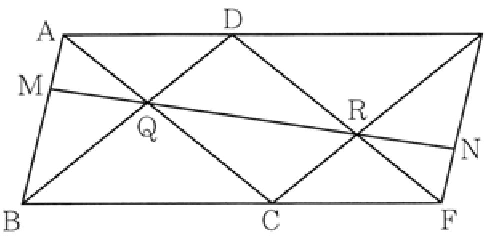
同様にして，△BPC≡△EPD　　よって，BP＝EP……㋑

㋐，㋑より，四角形 ABFE は $\boxed{\text{b}}$ から，平行四辺形である。

問2 この平行四辺形 ABFE において，AD:BC＝2:3 とする。

また，図 2 のように AC と BD の交点を Q，DF と CE の交点を R とし，QR の延長と AB，EF との交点をそれぞれ M，N とする。

図 2



(1) AQ と QC の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

(2) 平行四辺形 ABFE の面積は，△ABQ の面積の何倍か，求めなさい。

(3) AM と MB の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	a	
	b	
問2	(1)	AQ：QC＝　　　　：
	(2)	倍
	(3)	AM：MB＝　　　　：

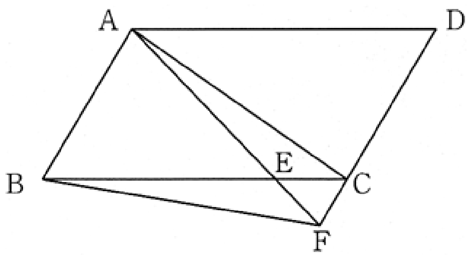
解答
問1
a
点 P は CD の中点であるから DP＝CP…①
対頂角は等しいから∠APD＝∠FPC…②
AE // BF で
錯角は等しいから
∠ADP＝∠FCP…③
①, ②, ③より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△APD≡△FPC
b
対角線がそれぞれの中点で交わる
問2
(1) AQ:QC＝2:3
(2) $\frac{25}{3}$ 倍
(3) AM:MB＝ 4:9
解説
問2
(2)
△ABD:△ABQ＝BD:BQ＝5:3
△ABD＝$\frac{5}{3}$△ABQ
△BCD:△ABD＝BC:AD＝3:2
△BCD＝$\frac{3}{2}$△ABD＝$\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$△ABQ＝$\frac{5}{2}$△ABQ
四角形 ABCD＝四角形 DCFE
四角形 ABFE＝2×四角形 ABCD＝2×(△ABD＋△BCD)＝$2\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}\right)$△ABQ＝$\frac{25}{3}$△ABQ
(3)
C から BA に平行な直線をひき MN との交点を K とする。
平行線と線分の比の定理より
AM:CK＝AQ:QC＝AD:BC＝2:3
AM＝$\frac{2}{3}$CK…①
CK:EN＝CR:RE＝CF:DE＝2:3
EN＝$\frac{3}{2}$CK…②
①, ②より
AM:MB＝AM:EN＝$\frac{2}{3}:\frac{3}{2}$＝4:9

【問 16】

右の図の平行四辺形 ABCD において，辺 BC 上に点 E をとり，直線 AE と辺 DC の延長との交点を F とする。

このとき，△AEC と△BEF の面積が等しいことを証明しなさい。

（鳥取県 2006 年度）



証明

解答

証明

△ABC と△ABF において

AB // CF で

AB を底辺とすると 2 つの三角形の高さが等しいので

△ABC＝△ABF…①

また△ABC＝△ABE＋△AEC…②

△ABF＝△ABE＋△BEF…③

②，③において△ABE が共通なので

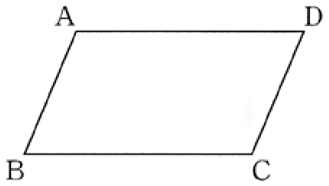
△AEC＝△BEF

【問 17】

右の図のような平行四辺形 ABCD がある。この平行四辺形は，ある条件が 1 つ成り立てば，長方形となる。

この条件として適するものを，次のア～オの中から 2 つ選び，記号で答えなさい。

（山口県　2006 年度）



ア　AB＝BC

イ　AC＝BD

ウ　AC⊥BD

エ　∠A＋∠C＝180°

オ　∠BAC＝∠DAC

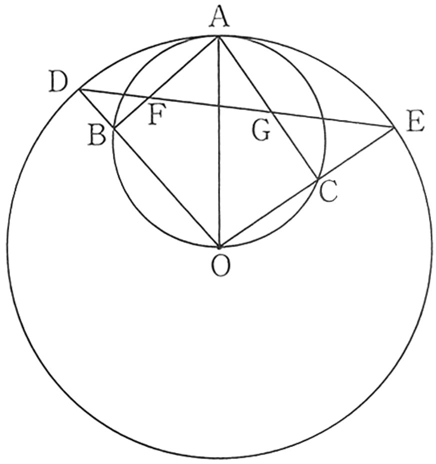
解答欄

解答
イ，エ

【問 18】

右の図のように，点 O を中心とする円の周上に点 A があり，線分 OA を直径とする円の周上に 2 点 B, C がある。点 D は OB の延長と円 O との交点，点 E は OC の延長と円 O との交点である。また，線分 DE と線分 AB, 線分 AC との交点をそれぞれ F, G とする。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県　2006 年度）



問1　AF＝AG であることを証明しなさい。

問2　OA＝16 cm, OB＝12 cm, OC＝9 cm　であるとき，△CGE の面積を求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

問1	証明
問2	cm^2

解答

問1

証明

△BFDと△CGEにおいて

△ODEはOD＝OEの二等辺三角形だから

∠FDB＝∠GEC…①

またOAは円の直径だから

∠OBA＝∠OCA＝90°

よって∠DBF＝∠ECG＝90° …②

三角形の内角の和は180° だから

①, ②より

∠BFD＝∠CGE…③

対頂角は等しいから

∠BFD＝∠AFG…④

∠CGE＝∠AGF…⑤

③, ④, ⑤より

∠AFG＝∠AGF

したがってAF＝AG

問2 $\dfrac{49\sqrt{7}}{6}$ cm^2

解説

問2

△ABOで

三平方の定理よりAB＝$\sqrt{16^2-12^2}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ cm

△ACOで

三平方の定理よりAC＝$\sqrt{16^2-9^2}=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$ cm

AF＝AG＝x cmとおく。

2組の角が等しいので

△DBF∽△ECG

よってBF:CG＝DB:EC

$(4\sqrt{7}-x):(5\sqrt{7}-x)=(16-12):(16-9)$

$7(4\sqrt{7}-x)=4(5\sqrt{7}-x)$

$28\sqrt{7}-7x=20\sqrt{7}-4x$

$3x=8\sqrt{7}$

$x=\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$ cm

よってGC＝$5\sqrt{7}-\dfrac{8\sqrt{7}}{3}=\dfrac{7\sqrt{7}}{3}$ cm

△CGE＝$\dfrac{1}{2}\times 7\times\dfrac{7\sqrt{7}}{3}=\dfrac{49\sqrt{7}}{6}$ cm^2