6.証明以外 平面図形の複合問題【2017 年度出題】

【問 1】

1 辺の長さが a cm と b cm の 2 つの正三角形があります。この 2 つの正三角形の面積の差を $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ cm^2 とします。

このときの a と b の値を，次のように求めるとき，$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ には当てはまる数を，$\boxed{}$ には解答の続きを，それぞれ書き入れて，解答を完成させなさい。

ただし，a，b は自然数とし，$a>b$ とします。

（北海道 2017 年度）

(解答)

2 つの正三角形の面積は，それぞれ

$\boxed{ア}\ a^2$ cm^2，$\boxed{ア}\ b^2$ cm^2 と表すことができる。

この 2 つの正三角形の面積の差は $\frac{49\sqrt{3}}{4}$ cm^2 なので，

$\boxed{ア}\ a^2 - \boxed{ア}\ b^2 = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$a^2 - b^2 = \boxed{イ}$

$(a+b)(a-b) = \boxed{イ}$ である。

$\boxed{}$

解答欄

ア		イ	

〔解答の続き〕

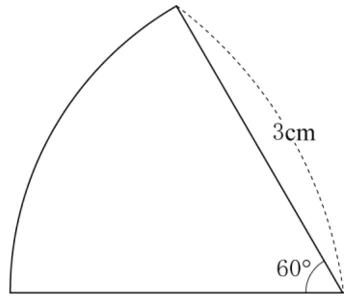
解答
ア　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
イ　49
〔解答の続き〕
a，b は自然数で $a>b$ であるから
$$\begin{cases} a+b=49 & \cdots\cdots① \\ a-b=\ \ 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$
を解いて $a=25$，$b=24$
解説
ア
1 辺の長さが a cm の正三角形の高さを h cm とすると
$a:h=2:\sqrt{3}$ が成り立つから
これを整理して $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$
よって 1 辺の長さが a cm の正三角形の面積は
$\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\,\mathrm{cm}^2$
同様にして 1 辺の長さが b cm の正三角形の面積は
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2\ \ \mathrm{cm}^2$
イ
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2=\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)=\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$
$a^2-b^2=49$
$(a+b)(a-b)=49$
ここで a，b は自然数で $a>b$ だから $a+b>a-b$
49 の約数は 1，7，49 だから
$a+b=49$，$a-b=1$ を連立方程式として解けばよい。
したがって $a=25$，$b=24$

【問 2】

右の図は，半径 3 cm，中心角 60° のおうぎ形です。このとき，おうぎ形の弧の長さを求めなさい。

ただし，円周率は π とします。

（岩手県　2017 年度）



解答欄

cm

解答

π　cm

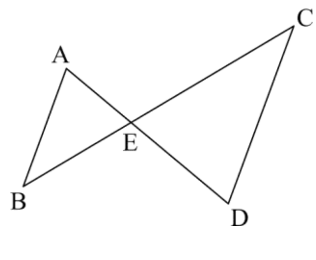
解説

$2\pi \times 3 \times \dfrac{60}{360} = 6\pi \times \dfrac{1}{6} = \pi$　cm

【問 3】

右の図において，AB // CD であり，点 E は線分 AD と BC の交点である。AB＝6 cm，AE＝4 cm，ED＝6 cm のとき，線分 CD の長さを求めなさい。

（秋田県　2017 年度）



解答欄

cm

解答

9 cm

解説

△ABE∽△DCE となるから

BA：AE＝CD：DE より

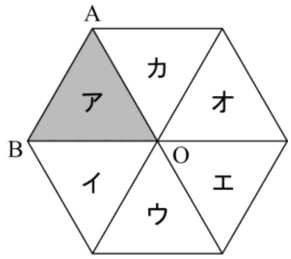
6：4＝CD：6

$CD = \dfrac{36}{4} = 9$ cm

【問 4】

右の図は，合同な 6 つの正三角形ア～カを組み合わせてできた正六角形である。△OAB を，点 O を中心として反時計回りに 120° だけ回転移動させて重ね合わせることができる三角形はどれか。ア～カの中から正しいものを 1 つ選び，記号で答えなさい。

（福島県　2017 年度）



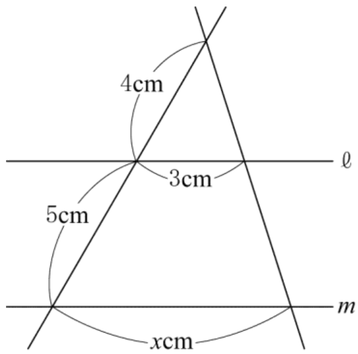
解答欄

解答
ウ
解説
正三角形を 6 つ合わせてできた正六角形だから
60° 回転させるごとにイ→ウ→エ→オ→カ→ア→…の順に重ね合わせることができる。
よって 120° だけ回転して重ね合わせることができるのはウ

【問 5】

右の図のように，平行な 2 つの直線 ℓ，m に 2 直線が交わっている。x の値を求めなさい。

（栃木県　2017 年度）



解答欄

$x=$

解答
$x=\dfrac{27}{4}$
解説
平行線と線分の比の関係から
$4:(4+5)=3:x$
$4:9=3:x$
$4x=27$
$x=\dfrac{27}{4}$

【問 6】

次の長さを 3 辺とする三角形のうち，直角三角形となるものをア～ウから 1 つ選び，記号で答えなさい。

（群馬県　2017 年度　前期）

ア 3 cm，4 cm，6 cm　　イ 9 cm，12 cm，15 cm　　ウ 2 m，$\sqrt{3}$ m，$\sqrt{5}$ m

解答欄

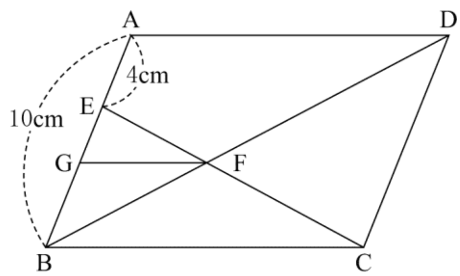
解答
イ
解説
ア　$3^2+4^2=9+16=25$，$6^2=36$ より直角三角形とならない。
イ　$9^2+12^2=81+144=225$，$15^2=225$ より直角三角形となる。
ウ　$2^2+(\sqrt{3})^2=4+3=7$，$(\sqrt{5})^2=5$ より直角三角形とならない。

【問 7】

右の図のように，AB＝10 cm の平行四辺形 ABCD があります。辺 AB 上に，AE＝4 cm となる点 E をとり，線分 EC をひきます。線分 EC と対角線 BD との交点を F とし，点 F を通って辺 BC に平行な直線と辺 AB との交点を G とします。

このとき，線分 EG の長さを求めなさい。

（埼玉県　2017 年度）



解答欄

cm

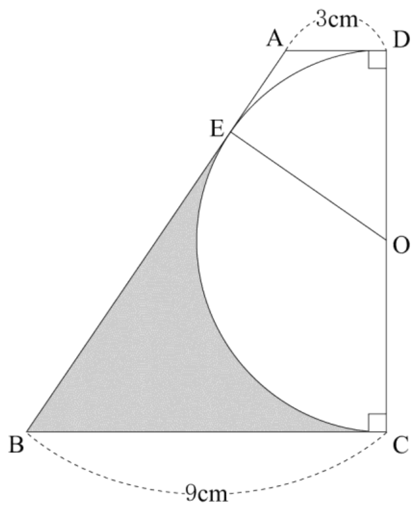
解答
$\frac{9}{4}$ cm
解説
△BFE∽△DFC より
EF : CF＝EB : CD＝(10－4) : 10＝6 : 10＝3 : 5
GF // BC より
EG : GB＝EF : FC＝3 : 5
よって $EG=\frac{3}{8}EB=\frac{3}{8}\times 6=\frac{9}{4}$ cm

【問 8】

図の四角形 ABCD は，AD // BC，∠C＝∠D＝90° の台形で，AD＝3 cm，BC＝9 cm です。この台形の辺 CD を直径として円 O をかくと，点 E で辺 AB と接します。このとき，図のかげ（　）をつけた部分の面積を求めなさい。

ただし，円周率は π とします。

（埼玉県　2017 年度）



解答欄

cm^2

解答

$27\sqrt{3}-9\pi$ cm^2

解説

△AOD≡△AOE より
合同な図形では対応する辺の長さは等しいので
AE＝AD＝3 cm
同様にして△OBC≡△OBE だから
BE＝BC＝9 cm
点 A から辺 BC に垂線をひきその交点を F とすると
四角形 AFCD は長方形になるから
FC＝AD＝3 cm
よって BF＝9－3＝6 cm だから
△ABF において三平方の定理より
$6^2+AF^2=(3+9)^2$
$AF^2=108$
AF＞0 だから
AF＝$6\sqrt{3}$ cm
ここで△ABF において
BF : AB : AF＝6 : 12 : $6\sqrt{3}$ ＝1 : 2 : $\sqrt{3}$ だから
∠ABF＝60°
四角形 EBCO において四角形の内角の和は 360° だから
∠COE＝360°－(90°＋60°＋90°)＝120°
よっておうぎ形 OEC は DC＝AF＝$6\sqrt{3}$ cm より半径が $6\sqrt{3}\div 2=3\sqrt{3}$ cm だから
面積は $\pi\times(3\sqrt{3})^2\times\dfrac{120}{360}=9\pi$ cm^2
したがって四角形 EBCO の面積は
$\left(\dfrac{1}{2}\times9\times3\sqrt{3}\right)\times2=27\sqrt{3}$ cm^2 だから
求める面積は $27\sqrt{3}-9\pi$ cm^2

【問 9】

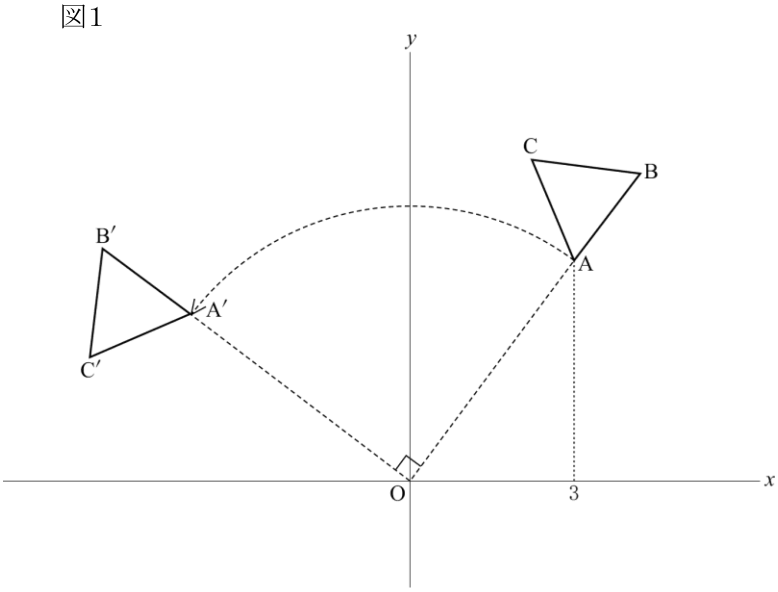
下の図1において，点 A の座標を (3, 4) とする。点 B は，3 点 O，A，B の順に直線上に並び，AB＝2 cm となるようにとる。線分 AB を 1 辺とする正三角形 ABC をつくる。点 C の x 座標は，点 A の x 座標より小さいものとする。△ A′B′C′ は，△ABC を，原点 O を回転の中心として，反時計回りに 90 度回転移動させたものである。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

また，原点 O から点 (1, 0) までの距離及び原点 O から点 (0, 1) までの距離をそれぞれ 1 cm とし，円周率は π を用いることとする。

（千葉県　2017 年度　後期）

図1



問1　頂点 A′ の座標を求めなさい。

問2　線分 OA の長さを求めなさい。また，線分 OC の長さを求めなさい。

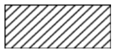
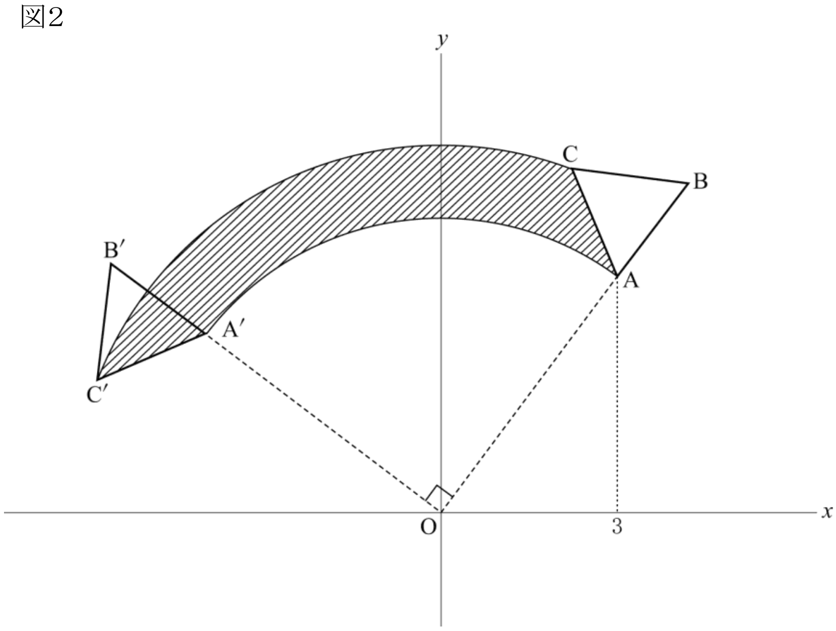
問3　△ABC が△ A′B′C′ に移動したとき，△ABC の線分 AC が通過してできる部分 (図2の  をつけた部分) の面積を求めなさい。

図2



解答欄

問1	(,)
問2	OA＝ cm
	OC＝ cm
問3	cm^2

解答

問1 (−4，3)

問2

OA＝5 cm

OC＝$\sqrt{39}$ cm

問3 $\frac{7}{2}\pi$ cm^2

解説

問1

2 点 A，A′ から x 軸に垂線 AD，A′ E をひき x 軸との交点をそれぞれ D，E とする。

このとき△AOD≡△O A′ E となるから合同な図形では対応する辺の長さは等しいので A(3，4) より

A′ E＝OD＝3 cm，OE＝AD＝4 cm

点 A′ は x 座標が負，y 座標が正となるから A′ (−4，3)

問2

OD＝3 cm，AD＝4 cm だから

三平方の定理より $OA^2=3^2+4^2=25$ で OA＞0 より OA＝5 cm

ここで点 C から辺 AB に垂線をひきその交点を F とする。

このとき 3 点 O，A，B はこの順で一直線上にあるから点 F のこの直線上に存在することがわかる。

よって∠CFO＝90° になるので△COF において

辺 CF と辺 OF の長さがわかれば線分 CO の長さを求めることができる。

△ABC は正三角形だから 2:AF＝2:1 より，AF＝1 cm

また 2:CF＝2: $\sqrt{3}$ より CF＝$\sqrt{3}$ cm

よって OF＝OA＋AF＝5＋1＝6 cm だから

△COF において三平方の定理より

$OC^2=6^2+(\sqrt{3})^2=39$

したがって OC＞0 より OC＝$\sqrt{39}$ cm

問3

おうぎ形 OC C′ の面積＋△ACO の面積−おうぎ形 OA A′ の面積−△ A′ C′ O の面積

で求めることができる。

△ACO と△ A′ C′ O において

AC＝ A′ C′，OA＝O A′，OC＝O C′ より

3 組の辺がそれぞれ等しいので△ACO≡△ A′ C′ O

よって△ACO の面積と△ A′ C′ O の面積は等しくなるから

おうぎ形 OC C′ の面積−おうぎ形 OA A′ の面積と表すことができる。

したがって求める面積は

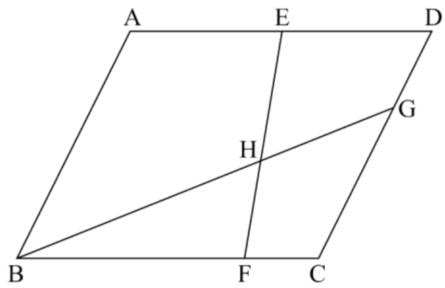
$$\pi\times(\sqrt{39})^2\times\frac{90}{360}-\pi\times5^2\times\frac{90}{360}=\pi\times\frac{90}{360}\times(39-25)=\pi\times\frac{1}{4}\times14=\frac{7}{2}\pi\ \ cm^2$$

【問 10】

右の図において，四角形 ABCD は平行四辺形であり，点 E は辺 AD の中点である。

また，点 F は辺 BC 上の点で，BF : FC＝3 : 1 であり，点 G は辺 CD 上の点で，CG : GD＝2 : 1 である。

線分 BG と線分 EF との交点を H とするとき，線分 BH と線分 HG の長さの比を最も簡単な整数の比で表しなさい。



（神奈川県　2017 年度）

解答欄

BH : HG＝　　　　　:

解答

BH : HG＝9 : 5

解説

辺 AD の延長と線分 BG の延長との交点を I とする。

$\triangle$BCG$\backsim\triangle$IDG より

BC : ID＝BG : IG＝CG : DG＝2 : 1

よって ID＝$\dfrac{1}{2}$BC，BG＝$\dfrac{2}{3}$BI

$\triangle$BFH$\backsim\triangle$IEH より

$$\mathrm{BH}:\mathrm{IH}=\mathrm{BF}:\mathrm{IE}=\mathrm{BF}:(\mathrm{ID}+\mathrm{DE})=\frac{3}{4}\mathrm{BC}:\left(\frac{1}{2}\mathrm{BC}+\frac{1}{2}\mathrm{BC}\right)=3:4$$

よって BH＝$\dfrac{3}{7}$BI だから

$$\mathrm{BH}:\mathrm{HG}=\frac{3}{7}\mathrm{BI}:\left(\frac{2}{3}\mathrm{BI}-\frac{3}{7}\mathrm{BI}\right)=\frac{3}{7}\mathrm{BI}:\frac{5}{21}\mathrm{BI}=9:5$$

【問 11】

図1は，半径 4 cm の円を 5 つ並べた図形で，周を太線で示したものである。この図形では，それぞれの円の中心は直線 ℓ 上にある。また，となり合う 2 つの円はどれも，図2のように，それぞれの円の半径が交点で垂直に交わっている。このとき，図1の図形の周の長さを求めなさい。(円周率は π を用いなさい。)

（岐阜県　2017 年度）

図1

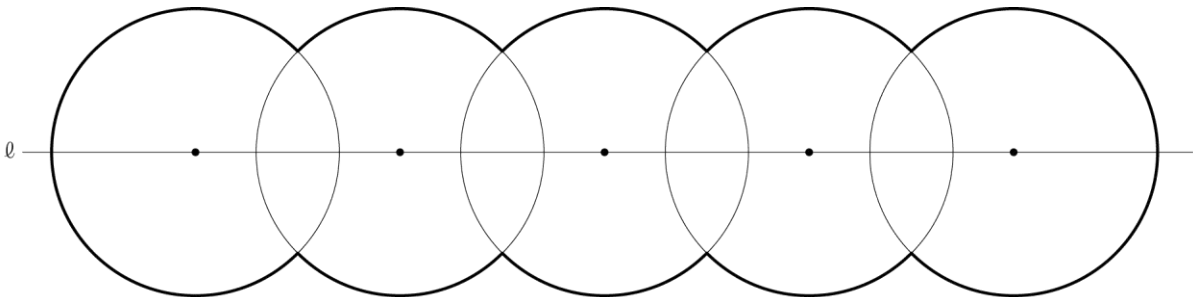
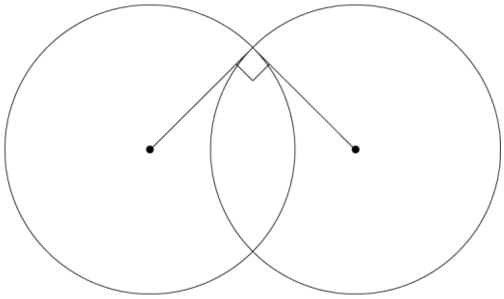


図2



解答欄

	cm

解答

24π　cm

解説

図2から円の 2 つの中心と 2 つの交点を結んでできる四角形は正方形になる。

よって太線で示した周の長さは

中心角が 270° の扇形の弧 2 個分の長さと中心角が 90° の扇形の弧 6 個分の長さの和と等しくなるから

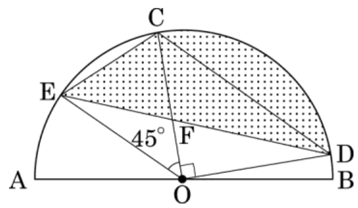
$2\pi \times 4 \times \frac{270}{360} \times 2 + 2\pi \times 4 \times \frac{90}{360} \times 6 = 12\pi + 12\pi = 24\pi$　cm

【問 12】

図で，C，D は AB を直径とする半円 O の周上の点で，∠COD＝90° である。また，E は弧 CA 上の点で，∠COE＝45° であり，F は線分 CO と ED との交点である。

AB＝6 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県 A 2017 年度）



(1) 線分 CF の長さは線分 OF の長さの何倍か，求めなさい。

(2) 線分 CE，ED と弧 CD で囲まれた 部分の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

解答欄

(1)	倍
(2)	cm^2

解答

(1) $\sqrt{2}$ 倍

(2) $\frac{9}{4}\pi$ cm^2

解説

(1)

∠COD＝90°，OC＝OD＝$\frac{1}{2}$AB＝3 cm より

△OCD は直角二等辺三角形になるので

∠OCD＝45°，CD＝$3\sqrt{2}$ cm

また∠EOC＝45° だから錯角が等しくなり CD // EO

よって△FEO∽△FDC となるから

CF : OF＝CD : OE＝$3\sqrt{2}$: 3 だから $\sqrt{2}$ 倍。

(2)

△CED と△COD において

底辺が CD で共通で CD // EO より高さが等しくなるから

△CED＝△COD

よって求める面積は

半径 3 cm，中心角 90° のおうぎ形の面積と等しくなる。

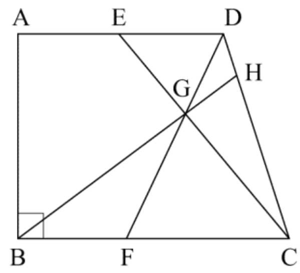
$$\pi \times 3^2 \times \frac{90}{360} = \frac{9}{4}\pi \ \text{cm}^2$$

【問 13】

図で，四角形 ABCD は AD // BC，∠ABC＝90° の台形である。E は辺 AD の中点であり，F は辺 BC 上の点で，BF:FC＝2:3 である。また，G は線分 DF と EC との交点であり，H は辺 DC と直線 BG との交点である。

AB＝AD＝6 cm，BC＝8 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県 A 2017 年度）



(1) 線分 EC の長さは何 cm か，求めなさい。

(2) △GBF の面積は△DGH の面積の何倍か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	倍

解答

(1) $\sqrt{61}$ cm

(2) $\dfrac{16}{3}$ 倍

解説

(1)

点 E から辺 BC に垂直な直線を引きその交点を P とすると△EPC は∠EPC＝90° の直角三角形だから

三平方の定理より $EC^2=EP^2+PC^2=6^2+(8-3)^2=61$　EC＞0 より EC＝$\sqrt{61}$ cm

(2)

BC＝8 cm，BF:FC＝2:3 より BF＝$8\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{16}{5}$ cm，FC＝$8-\dfrac{16}{5}=\dfrac{24}{5}$ cm

辺 AD をのばした直線と線分 BH をのばした直線の交点を Q とする。

AD // BC より△GDQ∽△GFB で相似比は DQ:BF＝DG:GF＝ED:CF＝$3:\dfrac{24}{5}$＝5:8

DQ:$\dfrac{16}{5}$＝5:8　DQ＝2 cm

よって QH:HB＝DQ:CB＝2:8＝1:4，QG:GB＝DQ:FB＝5:8 だから QH:HG:GB＝13:12:40

また△GDQ と△GFB の面積比は $2^2:\left(\dfrac{16}{5}\right)^2=4:\dfrac{256}{25}=1:\dfrac{64}{25}$

△GDQ＝S とおくと△DGH＝$\dfrac{12}{25}S$，△GBF＝$\dfrac{64}{25}S$

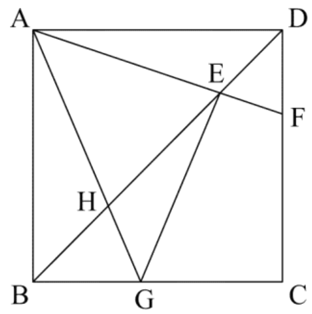
よって△GBF÷△DGH＝$\dfrac{64}{25}S\div\dfrac{12}{25}S=\dfrac{16}{3}$ 倍

【問 14】

図で，四角形 ABCD は正方形である。E は，線分 DB 上の点で，DE：EB＝1：3 であり，F は直線 AE と辺 DC との交点である。また，G は辺 BC 上にあり，線分 AG と GE の長さの和が最小となる点で，H は線分 AG と EB との交点である。

AB＝8 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県 B　2017 年度）



(1) △ABE の面積は△DEF の面積の何倍か，求めなさい。

(2) △AHE の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

解答欄

(1)	倍
(2)	cm^2

解答

(1) 9 倍

(2) $\dfrac{72}{5}$ cm^2

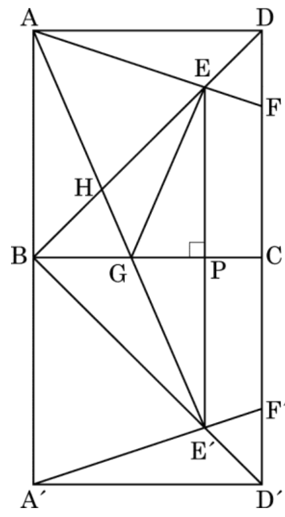
解説

(1)

四角形 ABCD は正方形なので AB // DC より△EFD∽△EAB

よって DE：EB＝1：3 より面積比は△EFD：△EAB＝1^2：3^2＝1：9 で 9 倍

(2)



△ABD＝$\dfrac{1}{2}\times8\times8=32$ cm^2 だから DE：EB＝1：3 より△ABE＝$\dfrac{3}{4}\times32=24$ cm^2

ここで EH：HB がわかれば△AHE の面積が求められる。

まず右の図のように辺 BC を対称の軸として

四角形 ABCD に線対称な図形，四角形 A′BCD′ をかく。

また点 E に対応する点を点 E′ とする。

このとき点 G は点 A と点 E′ を結んだ線分と辺 BC との交点になる。

点 E と点 E′ を結んだ線と辺 BC の交点を P とすると

BE：ED＝3：1 より BP：PC＝3：1 で BP＝6 cm

また EP：DC＝3：4 で EP＝6 cm となるから PE′＝6 cm

AB // EE′ より△HAB∽△HE′E だから

EH：HB＝EE′：BA＝(6＋6)：8＝3：2

したがって△AHE＝$\dfrac{3}{5}\times24=\dfrac{72}{5}$ cm^2

【問 15】

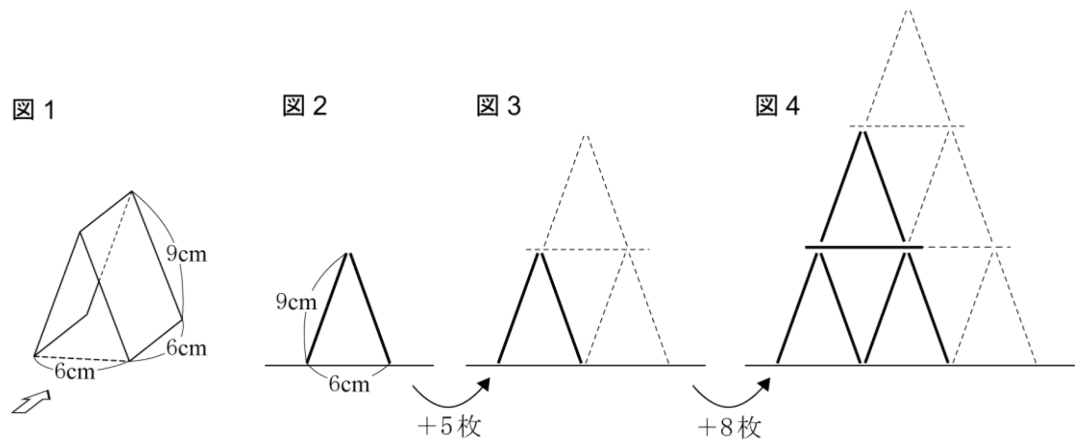
縦 9 cm，横 6 cm のカードを使って塔をつくっています。

塔のつくりかた

> ○ 図1のように，平面に 6 cm の間隔をあけて立てた 2 枚のカードを，両側から立てかけて，1 段の塔をつくります。
>
> ○ 図2は，平面とカード 2 枚で囲まれた部分を，図1の矢印の方向から見たもので，二等辺三角形になっています。
>
> ○ 2 段以上に積み上げるときは，1 段の塔を隣り合わせにつくり，隣り合う 2 つの塔の上にカードを必ず 1 枚のせ，そのカードの上に次の 1 段の塔をつくります。
>
> ○ 図3，図4はそれぞれ，塔の高さを 2 段，3 段にするときのカードの増え方を示したものです。

使えるカードを 40 枚までとして塔をつくるとき，最も高く積み上げた塔の高さを求めなさい。ただし，カードの厚さは考えないものとします。

（滋賀県 2017 年度）



解答欄

cm

解答

$30\sqrt{2}$ cm

解説

1 段から 2 段，2 段から 3 段，3 段から 4 段…にするとき

増えるカードの枚数は 5 枚，8 枚，11 枚…となり 3 枚ずつ増えていく。

このことから

2 段のとき 2＋5＝7 枚,3 段のとき 7＋8＝15 枚,4 段のとき 15＋11＝26 枚,5 段のとき 26＋14＝40 枚となる。

図2の二等辺三角形で高さを h cm とすると

三平方の定理より$(6\div2)^2+h^2=9^2$

$9+h^2=81$

$h^2=72$

$h>0$ だから $h=6\sqrt{2}$

よって求める高さは 5 段のときの高さだから $6\sqrt{2}\times5=30\sqrt{2}$ cm

【問 16】

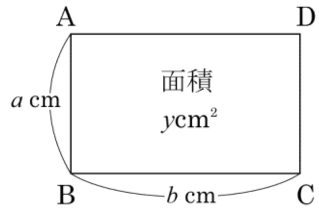
太一さんは，周の長さが 24 cmの長方形をひもでつくり，縦と横の長さがそれぞれ何 cm のときに面積が最大になるのかについて調べています。後の問1から問4に答えなさい。

（滋賀県 2017 年度）

太一さんが調べたこと1

図1のように，周の長さが 24 cm である長方形 ABCD について，縦の長さを a cm，横の長さを b cm，面積を y cm^2 とする。縦の長さ a を 1 cm ずつ変えて面積を調べ，その結果をまとめると下の表のようになった。

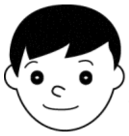
図1



表

縦の長さ a (cm)	1	2	3	4	5	6	7	…
面　積　y (cm^2)	11	20	27	32	35	36	35	…

問1　太一さんが調べたこと1から，縦の長さが 9 cm のとき，長方形 ABCD の面積を求めなさい。



この長方形の面積は，1辺が6cmの正方形になるとき最も大きくなりそうだね。

太一さんは，予想を確かめるために先生に質問したところ，次の 2 つのアドバイスをもらいました。

先生からのアドバイス

まず，＜作図の仕方＞を見て考えてごらん。

＜作図の仕方＞

○周の長さが24cmである長方形ABCDについて，縦の長さをa cm，横の長さをb cmとする。

○右の**図２**のように，辺BCを延長してCE＝CDとなる点Eをとり，線分BEを直径とする半円をかく。

○直線CDと半円との交点をFとする。このときFC＝hとして，1辺の長さがh cmの正方形FCGHをつくる。

図２

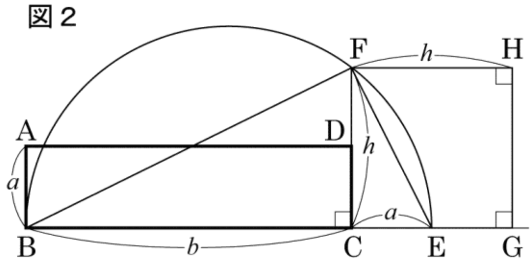
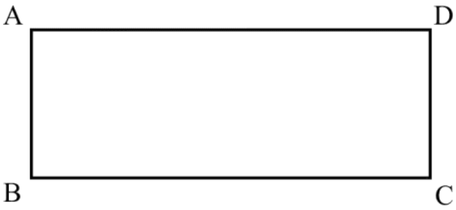


図２で長方形ABCDの縦と横の長さを変えると，それにつれて図形がどのように変化するかな。コンピュータを使って調べてみてはどうかな。何かに気がつくかもしれないよ。

問2　太一さんは，先生からのアドバイスの＜作図の仕方＞の手順にしたがって，まずは下の図3の長方形ABCD の場合について，正方形 FCGH を作図することにしました。正方形 FCGH をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし，作図に使った線は消さないこと。

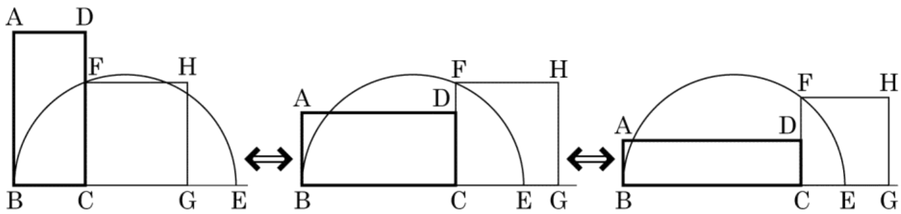
図3

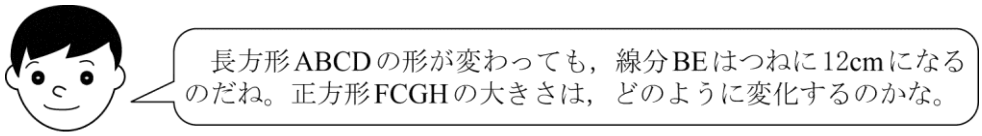


太一さんが調べたこと2

太一さんは，図2をもとにコンピュータを使って，長方形 ABCD の形が変わるとき，それにつれて変化することがらについて調べてみると，図4のようになることがわかりました。

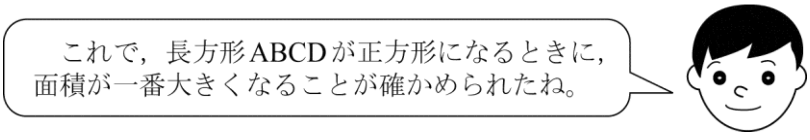
図4



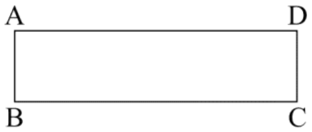


問3　太一さんは，太一さんが調べたこと2から，点 C が線分 BE の中点にあるときに，正方形 FCGH の面積が最大になると考えました。その考えが正しい理由を説明しなさい。

問4　太一さんは，正方形 FCGH の面積が，長方形 ABCD の面積と等しくなると考えました。図2において，相似な三角形に着目し，太一さんの考えが正しい理由を説明しなさい。



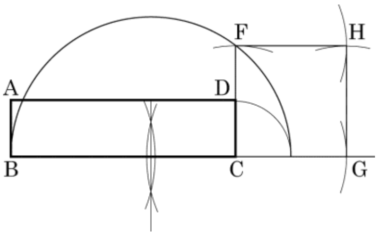
解答欄

問1	cm^2
問2	
問3	
問4	

解答

問1　27 cm^2

問2



問3

正方形 FCGH の面積が最大になるのは
線分 FC の長さが最大のときである。
また線分 FC の長さは
点 F と線分 BE との距離を表していて
線分 BE の長さが一定だから
点 C が線分 BE の中点のとき最大となる。
ゆえに正方形 FCGH の面積が最大になるのは
点 C が線分 BE の中点のときである。

問4

△BCF と△FCE について
∠BCF＝∠FCE＝90°　…①
直径に対する円周角だから
∠BFE＝90°
ここで∠BFC＋∠CFE＝∠BFC＋∠FBC＝90°　なので
∠FBC＝∠EFC…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△BCF∽△FCE
相似な三角形の対応する辺なので
BC：FC＝FC：EC
ゆえに, $b:h=h:a$
$h^2=ab$
$h>0$ より
$h=\sqrt{ab}$
したがって h を 1 辺の長さとする正方形 FCGH の面積は ab であり
長方形 ABCD の面積と等しくなる。

解説
問1
周の長さが 24 cm だから縦の長さと横の長さの和は 24÷2＝12 cm
横の長さは 12－9＝3 cm だから
長方形 ABCD の面積は 9×3＝27 cm^2
問2
次のような手順で作図する。
① 辺 BC を延長する。
② 点 C を中心として点 D を通る円をかく。①の辺 BC の延長との交点を E とする。
③ 線分 BE の垂直二等分線をかく。
④ ③でかいた線分 BE の垂直二等分線と線分 BE との交点を中心として直径 BE の円をかく。
この円と直線 CD との交点を F とする。
⑤ 点 C を中心として点 F を通る円をかく。①の辺 BC の延長との交点を G とする。
⑥ 点 F, 点 G をそれぞれ中心とし⑤でかいた円と同じ半径の円をそれぞれかく。
この 2 つの円との交点を H とする。
⑦ 線分 FH, GH をそれぞれかく。
問3
BE＝12 cm で一定だから半円を固定して考えるとよい。
円において長さが最も長い弦は直径であるから
線分 FC が半円の半径となるとき正方形 FCGH の面積は最大になる。
線分 FC が半円の半径となるのは点 C が線分 BE の中点のときである。
問4
∠FBC＝180°－∠BCF－∠BFC＝90°－∠BFC と
∠EFC＝∠BFE－∠BFC＝90°－∠BFC より
∠FBC＝∠EFC
また∠BCF＝∠FCE＝90° がいえるので
△BCF∽△FCE が成り立つ。
よって BC : FC＝FC : EC より
$b:h=h:a \quad ab=h^2$
このとき正方形 FCGH の面積は
$h\times h=h^2$ cm^2
長方形 ABCD の面積は $a\times b=ab$ cm^2 だから
正方形 FCGH の面積と長方形 ABCD の面積が等しいことがわかる。

【問 17】

△ABC があり，AB＝12 cm，BC＝8 cm，∠ACB＝90°のとき，辺 CA の長さを求めよ。

（京都府　2017 年度　前期）

解答欄

cm

解答

$4\sqrt{5}$ cm

解説

∠ACB＝90°より辺 AB が斜辺となる。

辺 CA の長さを x cm とすると

$8^2+x^2=12^2$

$64+x^2=144$

$x^2=80$

$x>0$ だから

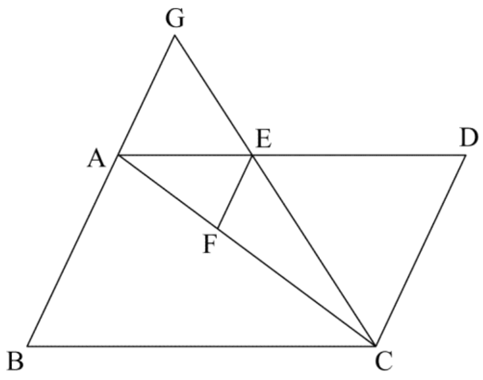
$x=4\sqrt{5}$

【問 18】

右の図のように，平行四辺形 ABCD があり，AB＝5 cm である。辺 AD 上に点 E を AB＝DE となるようにとり，点 E を通り直線 AB に平行な直線と対角線 AC との交点を F とすると，EF＝2 cm であった。また，2 点 C，E を通る直線と直線 AB との交点を G とする。

このとき，次の問1～問3に答えよ。

（京都府　2017 年度　中期）



問1 AF : FC を最も簡単な整数の比で表せ。

問2 線分 AG の長さを求めよ。

問3 点 D から直線 CE にひいた垂線と直線 CE との交点を H とするとき，△AEG と△BCH の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

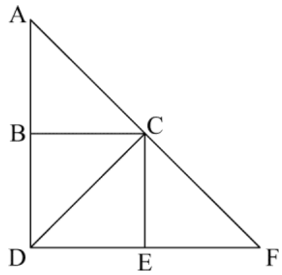
解答欄

問1	AF : FC＝　　　　：
問2	cm
問3	△AEG : △BCH＝　　　　：

解答
問1　AF:FC＝2:3
問2　$\frac{10}{3}$ cm
問3　△AEG:△BCH＝8:15
解説
問1
四角形ABCDは平行四辺形だからDC＝AB＝5 cm
AB // DC, AB // EFより
EF // DCだから△AFE∽△ACD
よってAF:AC＝EF:DC＝2:5だから
AF:FC＝2:(5－2)＝2:3
問2
DE＝AB＝5 cmより
△DECはDE＝DCの二等辺三角形だから∠DEC＝∠DCE
対頂角は等しいから∠AEG＝∠DEC
平行線の錯角は等しいから∠AGE＝∠DCE
よって∠AEG＝∠AGEより
△AEGはAE＝AGの二等辺三角形である。
AE＝x cmとすると
△AFE∽△ACDより
AE:AD＝EF:DC
$x:(x+5)=2:5$
$5x=2(x+5)$
$5x=2x+10$
$3x=10$
$x=\frac{10}{3}$
したがってAG＝AE＝$\frac{10}{3}$ cm
問3
AG // CDより
△AEG∽△DECだから
相似比はAE:DE＝$\frac{10}{3}:5=2:3$
よって面積の比は$2^2:3^2=4:9$なので
△AEG＝$4S$とすると
△DEC＝$9S$
ここでDA:DE＝(3＋2):3＝5:3より
△DAC＝$\frac{5}{3}$△DEC＝$\frac{5}{3}\times 9S=15S$
よって△EBC＝△ABC＝△DAC＝$15S$
△DEHと△DCHにおいて
∠DHE＝∠DHC＝90°
DE＝DC, DH＝DHより
直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから
△DEH≡△DCH
このことからEH＝CHとなり
△BCH＝$\frac{1}{2}$△BCE＝$\frac{1}{2}\times 15S=\frac{15}{2}S$
したがって△AEG:△BCH＝$4S:\frac{15}{2}S=4:\frac{15}{2}=8:15$

【問 19】

右図において，△ABC，△DBC，△DEC，△FEC はすべて合同な直角二等辺三角形であり，∠ABC＝∠DBC＝∠DEC＝∠FEC＝90° である。6 点 A，B，C，D，E，F は同じ平面上の異なる点である。次のア～ウの三角形のうち，△ABC を，C を回転の中心として回転移動したものはどれですか。一つ選び，記号を○で囲みなさい。



（大阪府　2017 年度　A）

ア　△DBC　　　イ　△DEC　　　ウ　△FEC

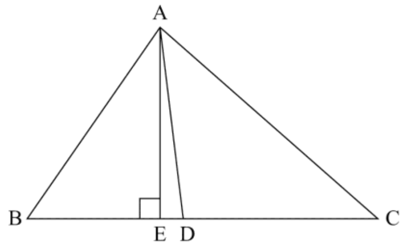
解答欄

解答
イ
解説
△DBC は△ABC を辺 BC を対称の軸として対称移動したもの
△DEC は△ABC を点 C を回転の中心として回転移動したもの
△FEC は△ABC を辺 CD を対称の軸として対称移動したものなので
回転移動したものは△DEC でイ

【問 20】

AB＝8 cm, BC＝12 cm, CA＝10 cm の△ABC がある。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし, 点 A から辺 BC に垂線 AE をひくとき, 次の問いに答えなさい。

（兵庫県　2017 年度）

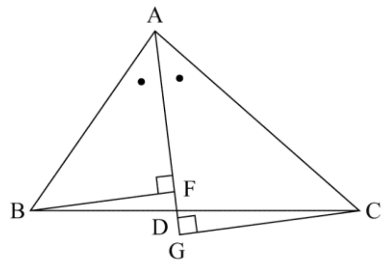


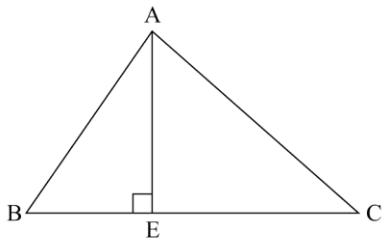
問1 線分 BD, AE の長さを次のようにして求めた。

$\boxed{\text{(i)}}$ と $\boxed{\text{(ii)}}$ にあてはまるものを, あとのア～カからそれぞれ 1 つ選んで, その符号を書きなさい。

また, $\boxed{\text{(iii)}}$ と $\boxed{\text{(iv)}}$ にあてはまる数をそれぞれ求めなさい。

点 B, C から直線 AD に垂線 BF, CG をひく。
△ABF と△ACG において,
∠AFB＝∠AGC＝90°…①
∠BAF＝∠CAG …②
①, ②より, 2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABF∽△ACG
したがって, $\boxed{\text{(i)}}$ ＝AB:AC
＝8:10＝4:5 …③
次に, △BDF と△CDG において,
∠BFD＝∠CGD＝90°…④
$\boxed{\text{(ii)}}$ は等しいから, ∠BDF＝∠CDG …⑤
④, ⑤より, 2 組の角がそれぞれ等しいから
△BDF∽△CDG
したがって, BD:CD＝ $\boxed{\text{(i)}}$ …⑥
③, ⑥より, BD:CD＝4:5 なので, BD＝ $\boxed{\text{(iii)}}$ cm





次に, BE＝x cm とすると
△ABE で三平方の定理より,
AE^2＝ $\boxed{\quad\quad}$ …⑦ と表される。
同様に, △ACE で,
AE^2＝ $\boxed{\quad\quad}$ …⑧ と表される。
⑦, ⑧より, x＝ $\boxed{\quad\quad}$
したがって, AE＝ $\boxed{\text{(iv)}}$ cm

ア AF:AG　イ BF:CG　ウ FD:GD　エ 対頂角　オ 錯角　カ 同位角

問2 線分 AD の長さは何 cm か, 求めなさい。

問3 ∠ADC の二等分線と辺 AC との交点を H とするとき, △ADH の面積は何 cm^2 か, 求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="4">問1</td><td>(ⅰ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(ⅱ)</td><td></td></tr>
<tr><td>(ⅲ)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(ⅳ)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

解答

問1

(ⅰ) イ

(ⅱ) エ

(ⅲ) $\dfrac{16}{3}$ cm

(ⅳ) $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ cm

問2 $\dfrac{20}{3}$ cm

問3 $\dfrac{25\sqrt{7}}{6}$ cm^2

解説

問1

(ⅰ)

△ABF∽△ACG より

AF:AG か BF:CG のどちらかであるが

AF:AG は次に出てくる△BDF∽△CDG につながらない。

(ⅱ)

∠BDF と∠CDG は対頂角である。

(ⅲ)

BD:CD＝4:5 より BD:BC＝4:(4＋5)＝4:9 だから

$BD=\dfrac{4}{9}BC=\dfrac{4}{9}\times12=\dfrac{16}{3}$ cm

(ⅳ)

BE＝x cm とすると△ABE において

三平方の定理より $AE^2=AB^2-BE^2=8^2-x^2=64-x^2$

△ACE において

三平方の定理より $AE^2=AC^2-CE^2=10^2-(12-x)^2=-44+24x-x^2$

よって $64-x^2=-44+24x-x^2$

$-24x=-108$

$x=\dfrac{9}{2}$

したがって $AE^2=64-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{256}{4}-\dfrac{81}{4}=\dfrac{175}{4}$

AE＞0 より $AE=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ cm

問2

△ADE において

三平方の定理より $AD^2=AE^2+DE^2=AE^2+(BD-BE)^2=\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{16}{3}-\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{400}{9}$

よって AD＞0 より $AD=\dfrac{20}{3}$ cm

問3

$BD=\dfrac{4}{9}BC$ だから $CD=\dfrac{5}{9}BC=\dfrac{5}{9}\times12=\dfrac{20}{3}$ cm

また問2より $AD=\dfrac{20}{3}$ cm だから△DCA は DC＝DA の二等辺三角形になる。

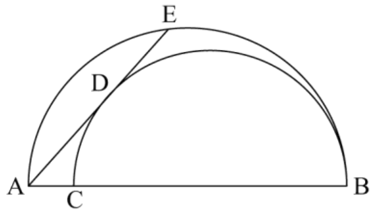
二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するから CH＝AH

よって $\triangle ADH=\dfrac{1}{2}\triangle ADC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{9}\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{9}\times\left(\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\right)=\dfrac{25\sqrt{7}}{6}$ cm^2

【問 21】

図のように，線分 AB 上に点 C があり，線分 AB，BC を直径とする大小 2 つの半円がある。点 A から小さい半円に接線をひき，その接点を D，大きい半円との交点を E とする。$\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DB}=3:10$ であるとき，$\overset{\frown}{AE}:\overset{\frown}{EB}$を求めよ。

（奈良県　2017 年度）



解答欄

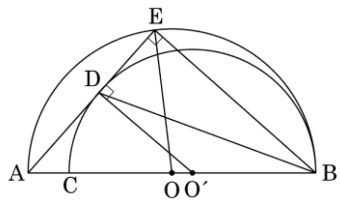
$\overset{\frown}{AE}:\overset{\frown}{EB}=$　　　:

解答

$\overset{\frown}{AE}:\overset{\frown}{EB}=6:7$

解説

線分 AB の中点を O，線分 CB の中点を O′とする。



半円の弧に対する円周角は 90° なので∠AEB＝90°

線分 AE は点 D に対する接線なので∠O′DE＝∠O′DA＝90° となるから

同位角が等しくなりO′D // BE

また$\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DB}=3:10$ より

$\angle DO'C=3k^\circ$ (k は自然数) とすると

$\angle DO'B=10k^\circ$ と表せるから

円周角の定理より$\angle O'BD=\dfrac{1}{2}\angle DO'C=\dfrac{3}{2}k^\circ$

O′B＝O′D より

$\angle O'DB=\angle O'BD=\dfrac{3}{2}k^\circ$

O′D // BE より平行線の錯角は等しいので

$\angle DBE=\angle O'DB=\dfrac{3}{2}k^\circ$

よって$\angle AOE=2\angle ABE=2(\angle ABD+\angle DBE)=2\left(\dfrac{3}{2}k^\circ+\dfrac{3}{2}k^\circ\right)=6k^\circ$

$\angle DO'C+\angle DO'B=13k^\circ=180^\circ$ だから

$\angle EOB=180^\circ-\angle AOE=13k^\circ-6k^\circ=7k^\circ$

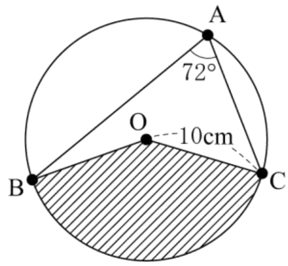
したがっておうぎ形の弧の長さの比は中心角の大きさの比と等しくなるから

$\overset{\frown}{AE}:\overset{\frown}{EB}=6k^\circ:7k^\circ=6:7$

【問 22】

図のように，半径 10 cm の円 O の周上に 3 点 A, B, C がある。∠BAC＝72° のとき，斜線部分の面積を求めなさい。

（島根県　2017 年度）



解答欄

cm^2

解答

$40\pi\ \ cm^2$

解説

円周角の定理より∠BOC＝2∠BAC＝2×72°＝144°

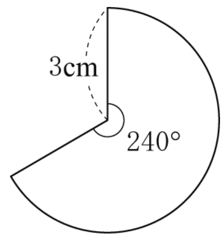
よって斜線部分の面積は

$$\pi\times10^2\times\frac{144}{360}=100\pi\times\frac{2}{5}=40\pi\ \ cm^2$$

【問 23】

右の図のような，半径 3 cm，中心角 240° のおうぎ形がある。このおうぎ形の面積は $\boxed{}$ cm^2 である。

（岡山県　2017 年度　特別）



解答欄

cm^2

解答

$6\pi\ \ cm^2$

解説

$$\pi\times3^2\times\frac{240}{360}=6\pi\ \ cm^2$$

【問 24】

P さんと Q さんのクラスでは，長方形には次の性質があることを学習した。

性質

長方形の面積は，その長方形の対角線の交点を通る直線により二等分される。

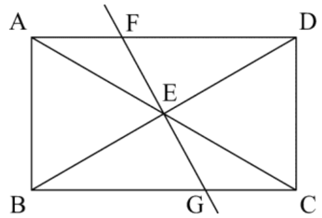
次の問1，問2に答えなさい。

（山口県　2017 年度）

問1　図1のように，長方形 ABCD の対角線の交点を E とし，点 E を通る直線と2辺 AD，BC との交点をそれぞれ F，G とする。

P さんは，長方形 ABCD の面積が，直線 FG により二等分されることを，次のように説明した。

図1



Pさんの説明

AB＝a，BC＝b，AF＝c とすると，

△EFA の面積は $\frac{1}{4}ac$，△EAB の面積は $\boxed{\text{ア}}$，△EBG の面積は $\boxed{\text{イ}}$ であり，台形 ABGF の面積は，これら 3 つの三角形の面積の和と等しく $\frac{1}{2}ab$ となるので，長方形 ABCD の面積の $\frac{1}{2}$ に等しい。

したがって，長方形 ABCD の面積は，対角線の交点を通る直線 FG により二等分される。

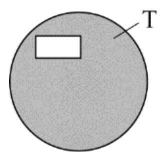
Pさんの説明が正しくなるように，$\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる式を a，b を使って表しなさい。また，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる式を a，b，c を使って表しなさい。

問2　Q さんは，性質を使った問題を，次のようにつくり，クラスで発表した。

Qさんが発表した問題

右の図のように，円とその円の内部に長方形があり，円から長方形を除いた図形（色のついた部分）を T とする。

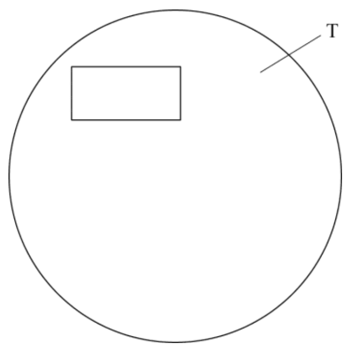
図形 T の面積を，二等分する直線を作図しよう。



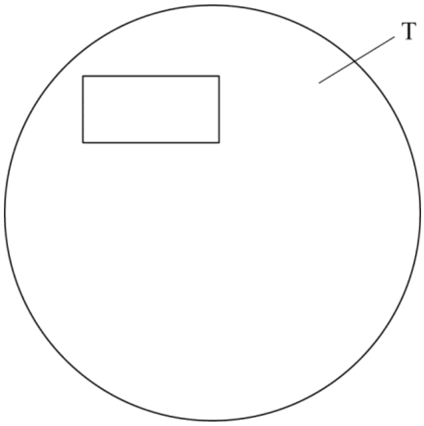
P さんは，Qさんが発表した問題をもとに，図2のように，図形 T をかいた。

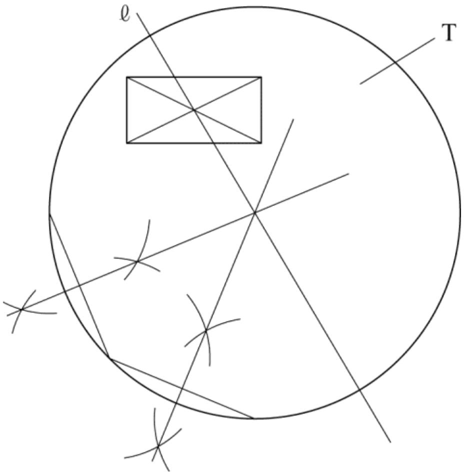
図2で，図形 T の面積を二等分する直線のうち，性質を使ってひくことのできる直線 ℓ を，定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さないこと。

図2



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">〔作図〕図2
</td></tr>
</table>

解答
問1
ア $\dfrac{1}{4}ab$
イ $\dfrac{1}{4}a(b-c)$
問2
〔作図〕図2


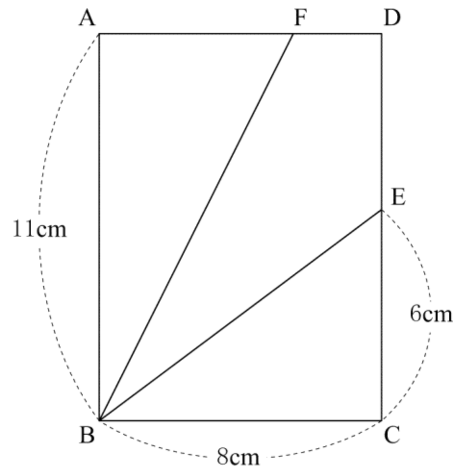
解説
問1
ア
△EABの面積は，$\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{1}{2}b=\dfrac{1}{4}ab$
イ
四角形ABCDは長方形で長方形の対角線はそれぞれの中点で交わるからAE＝CE
また∠AEF＝∠CEG，∠FAE＝∠GCEがいえるので△EFA≡△EGC
よってCG＝AF＝cとなるからBG＝$b-c$
したがって△EBGの面積は$\dfrac{1}{2}\times(b-c)\times\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{4}a(b-c)$
問2
円の面積と長方形の面積をそれぞれ二等分する直線を作図すればよい。
円の面積を二等分する直線は円の中心を通る。
よって円の中心を作図し円の中心と長方形の対角線の交点を通る直線をℓとすればよい。
円の中心は弦の垂直二等分線上にあるから弦の垂直二等分線を2つ作図したときその交点が円の中心となる。

【問 25】

右の図のような長方形 ABCD があり，AB＝11 cm，BC＝8 cm である。点 E は辺 CD 上の点で，CE＝6 cm である。

∠ABE の二等分線をひき，辺 AD との交点を F とするとき，線分 DF の長さは何 cm か。

（香川県　2017 年度）



解答欄

	cm

解答

$\dfrac{5}{2}$ cm

解説

線分 BF を点 F のほうにのばした半直線と辺 CD を点 D のほうにのばした半直線の交点を G とおく。

このとき線分 GD の長さがわかれば AD // BC より平行線と線分の比の関係から線分 DF の長さがわかる。

AB // CG より

平行線の錯角は等しいので

∠ABF＝∠EGB

線分 BF は∠ABE の二等分線なので∠ABF＝∠FBE

だから∠EGB＝∠EBG となり

2 つの角が等しくなるから

△EGB は二等辺三角形。

よって EG＝EB

ここで $EB^2＝EC^2＋CB^2＝36＋64＝100$

EB＞0 より

EB＝10 cm

DE＝11－6＝5 cm より

GD＝10－5＝5 cm

よって GD : DF＝GC : CB より

5 : DF＝16 : 8

DF＝$\dfrac{5}{2}$ cm

【問 26】

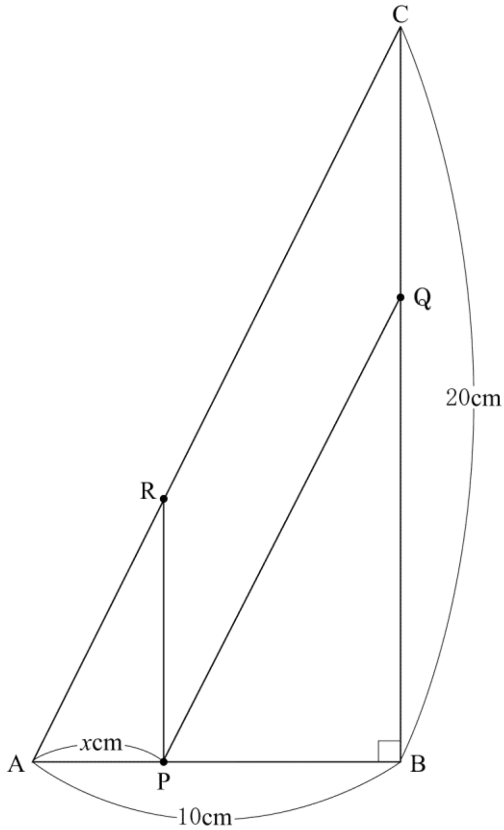
図のように，$\angle ABC=90^\circ$，AB＝10 cm，BC＝20 cm の直角三角形ABC がある。四角形 PQCR が平行四辺形となるように，辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CA 上に点 R をとる。AP＝x cm とするとき，(1)～(3)の各問いに答えなさい。

（佐賀県　2017 年度　一般）

(1) 線分 PR の長さを x を用いて表しなさい。

(2) $x=2$ のとき，平行四辺形 PQCR の面積を求めなさい。

(3) 平行四辺形 PQCR の面積が 42 cm^2 になるとき，線分 AP の長さを求めなさい。ただし，x についての方程式をつくり，答えを求めるまでの過程も書きなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm^2
(3)	

解答
(1)　$2x$ cm
(2)　32 cm^2
(3)
$2x(10-x)=42$
$20x-2x^2=42$
$x^2-10x+21=0$
$(x-3)(x-7)=0$
$x=3,\ 7$
$0<x<10$ だからともに問題にあっている。
答　3 cm または 7 cm
解説
(1)
四角形 PQCR は平行四辺形だから PR // BC
よって PR$=a$ cm とすると
△APR∽△ABC だから
AP:AB＝PR:BC より
$x:10=a:20$
$10a=20x$
$a=2x$
(2)
平行四辺形 PQCR の底辺を QC とすると高さは PB で QC＝PR
ここで $x=2$ だから
2:10＝PR:20 より
　PR＝4 cm
よって PB＝10－2＝8 cm より
求める面積は 4×8＝32 cm^2
(3)
QC＝PR＝$2x$ cm，PB＝$10-x$ cm だから
平行四辺形 PQCR の面積は
$2x(10-x)=20x-2x^2$ cm^2
これを整理すると
$x^2-10x+21=0$
$(x-3)(x-7)=0$
$x=3,\ 7$
$0<x<10$ だから
$x=3$ も $x=7$ も問題にあっている。

【問 27】

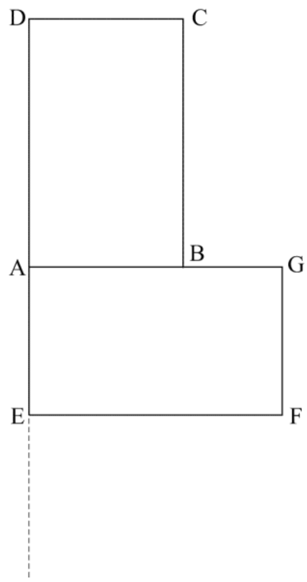
右の図2のように，長方形 ABCD と長方形 AEFG があり，頂点 E が辺 DA を A の方に延長した直線上にある。

このとき，(1)～(3)の各問いに答えなさい。

（佐賀県　2017 年度　一般）

(1) 線分 AC の長さを求めなさい。

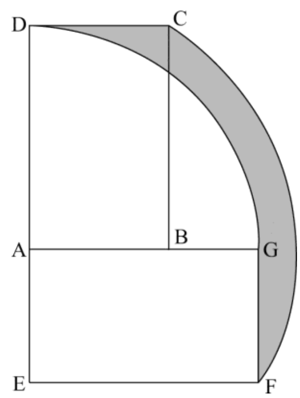
図2



(2) ∠CAF の大きさを求めなさい。

(3) 右の図3は，図2において，おうぎ形 ADG の弧$\overset{\frown}{\mathrm{DG}}$と，おうぎ形 ACF の弧 CF をかいたものである。このとき，図3の色をつけた部分の面積を求めなさい。

図3



解答欄

(1)	cm
(2)	度
(3)	cm^2

解答

(1)　$\sqrt{34}$ cm

(2)　90 度

(3)　$\dfrac{9}{4}\pi$　cm^2

解説

(1)

△ABC において

三平方の定理より

$3^2+5^2=\mathrm{AC}^2$

$\mathrm{AC}^2=34$

AC＞0 だから

AC＝$\sqrt{34}$ cm

(2)

四角形 ABCD≡四角形 AEFG だから

△ABC≡△FGA となる。

$\angle\mathrm{CAF}=\angle\mathrm{CAB}+\angle\mathrm{GAF}=\angle\mathrm{CAB}+\angle\mathrm{BCA}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

(3)

色をつけた部分の面積は

おうぎ形 ACF の面積＋△ACD の面積－おうぎ形 ADG の面積－△AFG の面積㋐で求めることができる。

△ACD の面積と△AFG の面積は等しくなるから

㋐は

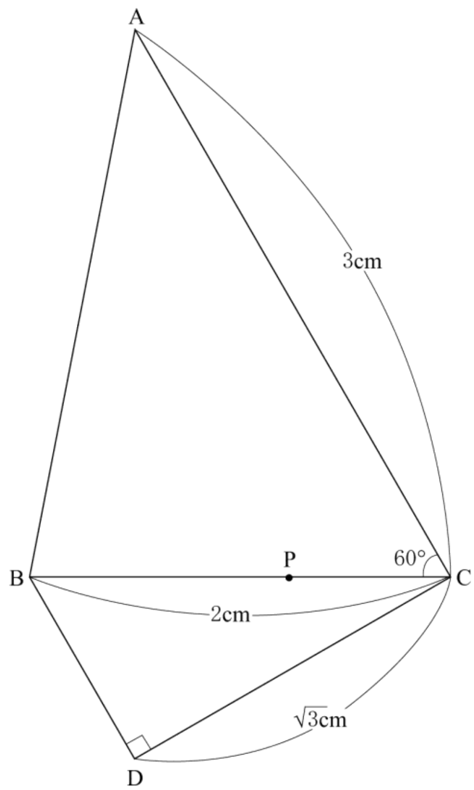
おうぎ形 ACF の面積－おうぎ形 ADG の面積　と表すことができる。

よって$\pi\times(\sqrt{34})^2\times\dfrac{90}{360}-\pi\times5^2\times\dfrac{90}{360}=\pi\times\dfrac{90}{360}\times(34-25)=\pi\times\dfrac{1}{4}\times9=\dfrac{9}{4}\pi$　cm^2

【問 28】

図のように，BC＝2 cm，AC＝3 cm，∠ACB＝60°の三角形 ABC と，DC＝$\sqrt{3}$ cm，∠BDC＝90°の直角三角形 BDC がある。点 P が辺 BC 上を動くとき，問1～問4に答えなさい。

（佐賀県　2017 年度　一般）



問1　AP＋PD が最も長くなるとき，AP＋PD の長さを求めなさい。

問2　AP＋PD が最も短くなるとき，AP＋PD の長さを求めなさい。

問3　点 P が辺 BC の中点であるとき，AP＋PD の長さを求めなさい。

問4　AP＋PD＝4 cm となるとき，AP の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm
問4	cm

解答

問1　$3+\sqrt{3}$ cm

問2　$2\sqrt{3}$ cm

問3　$1+\sqrt{7}$ cm

問4　$\frac{11}{4}$ cm

解説

問1

点 P が点 C 上にあるときだから AP＋PD＝AC＋CD＝$3+\sqrt{3}$ cm

問2

点 P が線分 AD 上にあるときである。ここでは線分 AD の長さを求めればよい。

△BDC において三平方の定理より $BD^2=BC^2-CD^2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

BD＞0 より BD＝1 cm

△BDC の 3 辺の長さの関係から∠BCD＝30°，∠CBD＝60°となる。

よって∠ACD＝∠BCD＋∠ACB＝30°＋60°＝90°　だから

△ACD において三平方の定理より $AD^2=AC^2+CD^2=3^2+(\sqrt{3})^2=12$

AD＞0 より AD＝$2\sqrt{3}$ cm

問3

点 A から辺 BC に垂線をひき交点を E とすると△ACE は 3 つの角が 90°，30°，60°の直角三角形になるから

$CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$ cm

$AE=\sqrt{3}\,CE=\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm

また $BP=CP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 2=1$ cm だから $EP=CE-CP=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ cm

ここで△AEP において三平方の定理より $AP^2=AE^2+EP^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{28}{4}=7$

AP＞0 より AP＝$\sqrt{7}$ cm

△BDP は BD＝BP＝1 cm，∠PBD＝60°　より

∠BDP＝∠BPD＝(180°－60°)÷2＝60°　だから正三角形となる。

よって PD＝1 cm だから AP＋PD＝$\sqrt{7}+1$ cm

問4

辺 BC の中点を M とすると∠DBM＝60°，BM＝BD＝1 cm より△BDM は正三角形となる。

また $BE=BC-CE=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ cm より

BE＝EM だから点 E は△BDM の辺 BM の中点となり DE⊥BM

ここで△BDE は 3 つの角が 90°，30°，60°　の直角三角形だから $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}BD=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

AP＝x cm とすると PD＝$4-x$ cm　となるから△AEP において三平方の定理より

$EP^2=AP^2-AE^2=x^2-\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2$

同様に△DEP において三平方の定理より $EP^2=PD^2-DE^2=(4-x)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

よって $x^2-\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2=(4-x)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$x^2-\frac{27}{4}=16-8x+x^2-\frac{3}{4}$

$8x=22$

$x=\frac{11}{4}$

【問 29】

　正三角形の 1 辺の長さを小数第 1 位を四捨五入したとき 6 cm であった。

この正三角形の 1 辺の長さを a cm とするとき, a の値の範囲を不等号を使って表せ。

（長崎県　2017 年度）

解答欄

解答

$5.5 \leqq a < 6.5$

解説

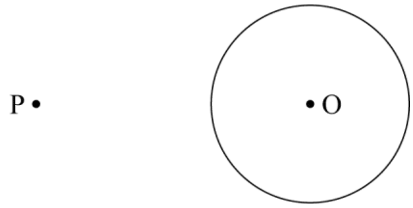
小数第 1 位を四捨五入したとき 6 になる数の範囲は 5.5 以上 6.5 未満である。

ある数 a の小数第 1 位を四捨五入して 6 になるとき a の値の範囲は $5.5 \leqq a < 6.5$ である。

【問 30】

右の図のように，円 O の外部に点 P がある。点 P から円 O に 2 本の接線をひき，接点を A，B とする。次の問1，問2に答えなさい。

（鹿児島県　2017 年度）



問1 点 P から円 O にひいた 2 本の接線を，定規とコンパスを使って作図せよ。ただし，2 点 A，B の位置を示す文字 A，B も書き入れ，作図に用いた線は残しておくこと。

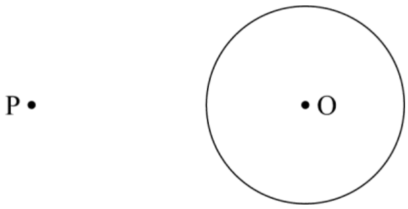
問2 円 O の半径を 2 cm，OP＝4 cm とする。このとき，次の(1)～(3)の問いに答えよ。

(1) 線分 PA の長さは何 cm か。

(2) △PBA の面積は何 cm^2 か。

(3) 点 O を通り線分 AB に平行な直線を ℓ とする。直線 ℓ と接線 PA との交点を C，直線 ℓ と円 O との交点のうち，点 A に近い方の点を D とし，線分 PO と円 O との交点を E とする。線分 PC，CD，PE および点 A を含む $\overset{\frown}{DE}$ で囲まれた部分を，直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体 Q の体積は何 cm^3 か。ただし，はじめに立体 Q の体積を求める過程で，利用する立体の名称をすべて書け。なお，円周率は π とし，求め方や計算過程も書くこと。

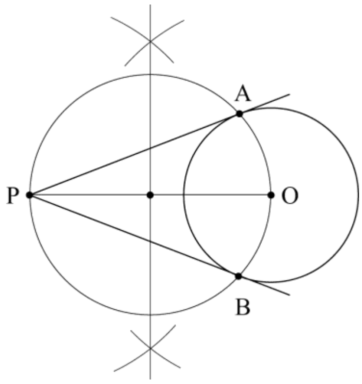
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td>(利用する立体の名称)</td></tr>
<tr><td>〔求め方や計算〕

答　　　　　cm^3</td></tr>
</table>

解答

問1



問2

(1) $2\sqrt{3}$ cm

(2) $3\sqrt{3}$ cm^2

(3)

利用する立体の名称　円すい, 半球 (半球は球でも可)

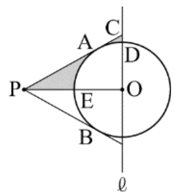
〔求め方や計算〕

求める体積は

△POC を直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる円すいの体積から

中心角 90°のおうぎ形 ODE を直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる半球の体積を引いたものである。

△POC は 3 つの角が 30°, 60°, 90°の直角三角形より



$$\mathrm{OC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{OP}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}$$

円すいの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot4^2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi\ \ \mathrm{cm}^3\ \cdots①$$

半球の体積は

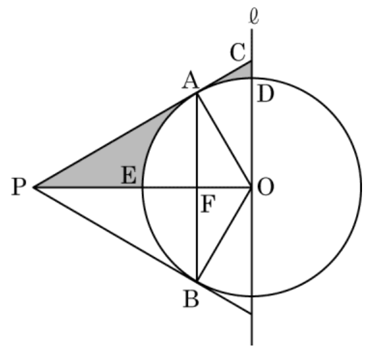
$$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot2^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{16}{3}\pi\ \ \mathrm{cm}^3\ \cdots②$$

①, ②より

$$\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{64\sqrt{3}-48}{9}\pi$$

答　$\dfrac{64\sqrt{3}-48}{9}\pi$　cm^3

解説
問1
半円の弧に対する円周角は直角であることを利用して次のような手順で作図する。
① 線分 PO をかき線分 PO の垂直二等分線をかく。
② ①でかいた線分 PO と垂直二等分線との交点を中心として直径 PO の円をかく。
③ ②でかいた円と円 O が異なる 2 点で交わるのでその 2 点を A, B とし直線 PA, PB をそれぞれひく。
問2
(1)



右の図で
円の接線はその接点を通る半径に垂直であるから OA⊥PA
△APO において
三平方の定理より $PA^2=OP^2-OA^2=4^2-2^2=12$
PA＞0 より
$PA=2\sqrt{3}$ cm
(2)
△APO は 3 辺の長さの比が $1:2:\sqrt{3}$ より
$\angle OAP=90^\circ$, $\angle OPA=30^\circ$, $\angle AOP=60^\circ$ の直角三角形で
$PA=2\sqrt{3}$ cm
△BPO も同様に $\angle OBP=90^\circ$, $\angle OPB=30^\circ$, $\angle BOP=60^\circ$ の直角三角形で
$PB=2\sqrt{3}$ cm
よって△PBA は, 辺の長さが $2\sqrt{3}$ cm の正三角形になるから
点 P から辺 AB に垂線をひきその交点を F とすると
$PF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$cm
したがって△PBA の面積は $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$ cm^2
(3)
右上の図で
かげをつけた部分を直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体が Q である。
△CPO を 1 回転させてできる立体は円錐
おうぎ形 ODE を 1 回転させてできる立体は半球である。
AF // CO より
△APF∽△CPO だから
$AF:CO=PF:PO=3:4$
よって $CO=\dfrac{4}{3}AF=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2}PA=\dfrac{2}{3}\times 2\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
円錐の体積は $\dfrac{1}{3}\times(\pi\times 4^2)\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{64\sqrt{3}}{9}\pi$ cm^3
半球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi\times 2^3\div 2=\dfrac{16}{3}\pi$ cm^3 より
求める体積は $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}\pi-\dfrac{16}{3}\pi=\dfrac{64\sqrt{3}}{9}\pi-\dfrac{48}{9}\pi=\dfrac{64\sqrt{3}-48}{9}\pi$ cm^3

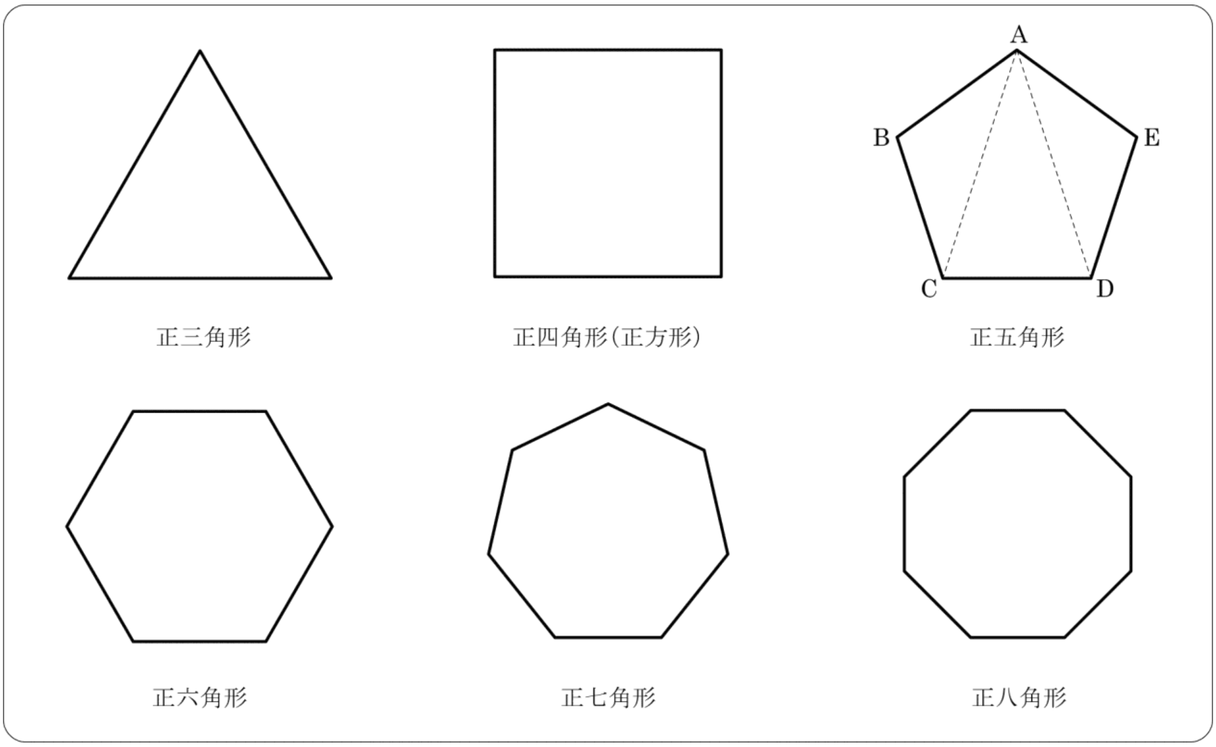
【問 31】

下の図は，頂点の数が 3 から 8 までの正多角形をならべたものである。表は，それぞれの正多角形における「頂点の数」と「1 つの頂点からひける対角線の数」および「対角線の本数」を調べようとしたものである。ここで，多角形では，となり合わない頂点を結んだ直線を対角線といい，「1 つの頂点からひける対角線」とは，下の図の正五角形の頂点 A に注目すると，線分 AC，線分 AD である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県 2017 年度）

図



表

	頂点の数	1 つの頂点からひける対角線の数	対角線の本数
正三角形	3	0	0
正四角形	4	1	2
正五角形	5	2	5
正六角形	6	①	②
正七角形	7		
正八角形	8		

問1 表の ① ，② にあてはまる数を入れなさい。

問2　一朗さんと花子さんは，正 n 角形の対角線の本数を n の式で表すことを考えた。下の《会話》を読んで，次の問いに答えなさい。

《会話》

一朗 ：どの正多角形も 1 つの頂点からひける対角線の数は，頂点の数より $\boxed{③}$ だけ少なくなっているぞ。なぜそうなるのかなあ。

花子 ：正五角形の場合，頂点 A からは A 自身と A ととなり合う頂点 B，E に対角線をひくことはできないからだよ。同じように考えれば，正 n 角形の 1 つの頂点からひける対角線の数は，n の式で（ $\boxed{④}$ ）と表せるね。

一朗 ：なるほど！じゃあ，正五角形は 1 つの頂点から 2 本ずつひけて，頂点が 5 つあるから，対角線の本数は 10 本だ！……あれ？実際にひくと 5 本しかひけないぞ？

(1) $\boxed{③}$ ，$\boxed{④}$ にあてはまる数または式を入れなさい。

(2) 正 n 角形の対角線の本数を n の式で表しなさい。

問3　対角線の本数が 77 本になる正多角形の頂点の数を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td colspan="2">①</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">②</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td rowspan="2">(1)</td><td>③</td><td></td></tr>
<tr><td>④</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)</td><td></td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

解答
問1
①　3
②　9
問2
(1)
③　3
④　$n-3$
(2)　$\dfrac{n(n-3)}{2}$
問3　14
解説
問1
①
正六角形の 1 つの頂点を A とし残りの 5 つの頂点を
頂点 A から反時計回りに B，C，D，E，F とすると
頂点 A からひける対角線は AC，AD，AE の 3 本
②
各頂点からひける対角線は①より 3 本なので $3\times6=18$ 本
しかし対角線 AC と対角線 CA のように同じ対角線を二重に数えているので $18\div2=9$ 本
問2
(1)
③
1 つの頂点からひける対角線の数－頂点の数 を計算してみると
正三角形は $0-3=-3$
正四角形(正方形) は $1-4=-3$
正五角形は $2-5=-3$，…であることから
1 つの頂点からひける対角線の数は
頂点の数より 3 少ないことがわかる。
④
③より
1 つの頂点からひける対角線の数＝頂点の数－3 となるので
正 n 角形の頂点の数は n だから
1 つの頂点からひける対角線の数は $n-3$
(2)
問1②より
同じ対角線を二重に数えているので「÷2」が必要である。
よって$(n-3)\times n\div2=\dfrac{n(n-3)}{2}$ 本
問3
問2(2)で求めた式を利用して $\dfrac{n(n-3)}{2}=77$
整理をすると
$(n+11)(n-14)=0$
$n=-11,\ 14$
このとき $n\geqq3$ だから
$n=-11$ は問題にあっておらず
$n=14$ は問題にあっている。
よって正十四角形の頂点の数は 14