

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2008 年度出題】

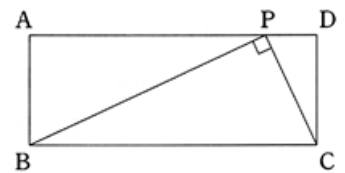
【問 1】

長方形 ABCD がある。

(秋田県 2008 年度)

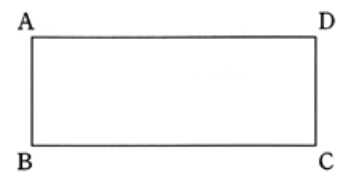
- (1) 図 1 は、辺 AD 上に $\angle BPC = 90^\circ$ となるような点 P をとったものである。このとき、 $\triangle ABP \sim \triangle PCB$ となることを証明しなさい。

図 1

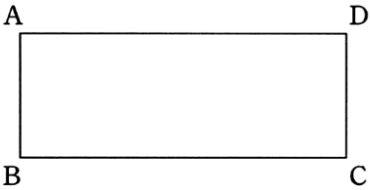


- (2) 図 2 の辺 AD 上に、 $\angle QBC = 60^\circ$ となるような点 Q を、定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし、作図に用いた線は消さないこと。

図 2



解答欄

(1)	証明
(2)	

解答

(1)

証明

$\triangle ABP$ と $\triangle PCB$ において

仮定より

$$\angle BAP = \angle CPB = 90^\circ$$

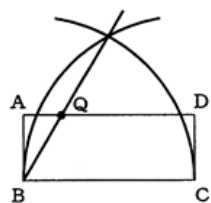
$AD \parallel BC$ より錯角ば等しいから

$$\angle APB = \angle PBC$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABP \sim \triangle PCB$$

(2)



解説

(2)

$\angle QBC = 60^\circ$ より, B, C を中心とする半径 BC の円をかき, その交点を E とする。

BE と AD の交点が求める点 Q である。

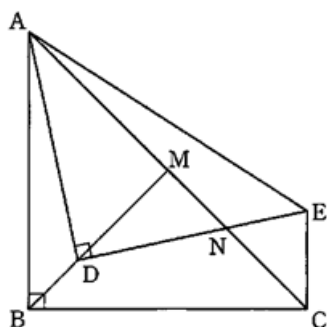
【問 2】

図Ⅰの三角形 ABC は $AB=BC$, $\angle ABC=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。 $\angle ABC$ の二等分線が辺 AC と交わる点を M とする。線分 BM 上に点 D をとり、 $AD=DE$, $\angle ADE=90^\circ$ となる直角二等辺三角形 ADE を、辺 AC と辺 DE が交わるようにつくり、 AC と DE の交点を N とし、 C と E を結ぶ。一郎君は、同じ条件で、 D の位置を変えて図Ⅱをかいてみた。この 2 つの図を見て、一郎君は、 D が BM 上のどの位置にあっても、図の中に相似な三角形ができることと、つねに $\angle BCE=90^\circ$ であることを予想した。

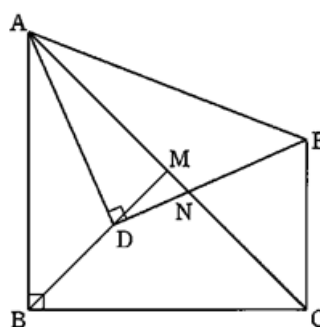
後の問1, 問2に答えなさい。ただし、 D は B, M と一致しないものとする。

(群馬県 2008 年度)

図Ⅰ



図Ⅱ



問1. 三角形 ABD と三角形 AEN が相似であることを証明しなさい。

問2. $\angle BCE=90^\circ$ であることを証明しなさい。

解答欄

問1	証明
問2	証明

解答

問1

$\triangle ABD$ と $\triangle AEN$ において

仮定より

$$\angle ABD = \angle AEN = 45^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC$$

$$= 45^\circ - \angle DAC \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle EAN = \angle EAD - \angle DAC$$

$$= 45^\circ - \angle DAC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle BAD = \angle EAN \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 線の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD \sim \triangle AEN$$

問2

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において

問1より, $\angle BAD = \angle CAE \cdots \textcircled{1}$

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ は直角二等辺三角形だから

$$AB:AC = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{2}$$

$$AD:AE = 1:\sqrt{2} \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$AB:AC = AD:AE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 組の辺の比が等しく, その間の角が等しいので

$$\triangle ABD \sim \triangle ACE$$

対応する角は等しいから

$$\angle ABD = \angle ACE = 45^\circ \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{仮定より, } \angle ACB = 45^\circ \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

$$\angle BCE = \angle ACE + \angle ACB = 90^\circ$$

解説

問2

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ で

$$\angle BAD = 45^\circ - \angle DAC = \angle CAE \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから

$$AB:AC = 1:\sqrt{2}$$

$\triangle ADE$ も直角二等辺三角形だから

$$AD:AE = 1:\sqrt{2}$$

$$\text{よって, } AB:AC = AD:AE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

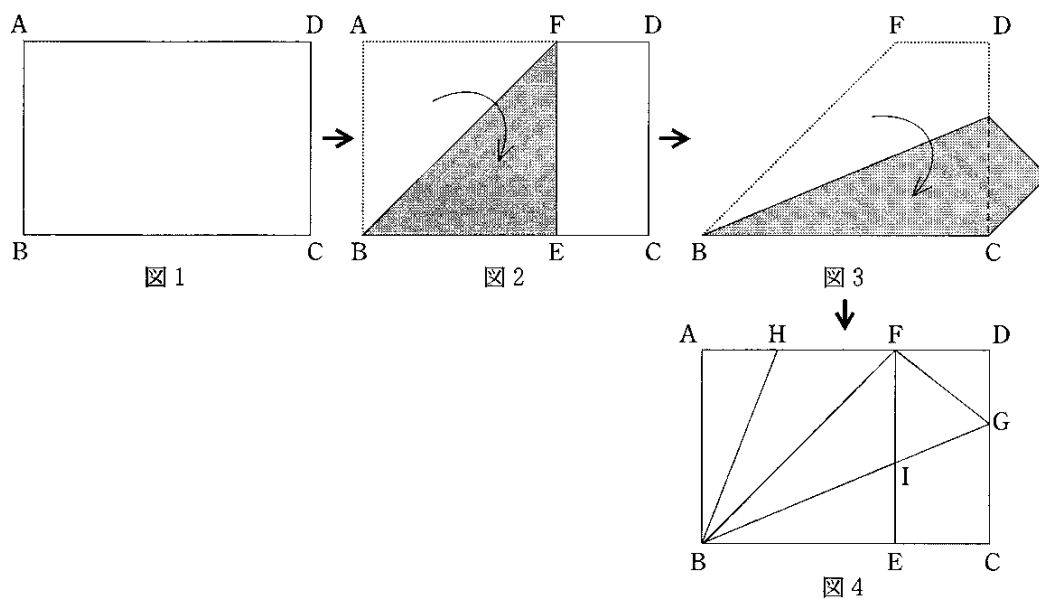
$$\triangle ABD \sim \triangle ACE$$

$$\text{よって } \angle ACE = \angle ABD = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

$$\text{よって } \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

【問 3】

図 1 のような、縦と横の長さの比が $1:\sqrt{2}$ の長方形 ABCD を、次の①～③のように折ります。



- ① 図 2 のように、辺 AB が辺 BC に重なるように折ったとき、点 A が移った点を E とします。また、折り目を BF とし、線分 EF をかきます。
- ② さらに、図 3 のように、線分 BF が辺 BC に重なるように折ったとき、点 F は点 C に重なります。
- ③ 図 4 のようにもとに戻し、②でできた 2 本の折り目の線と辺 CD, AD との交点をそれぞれ G, H とします。また、線分 BF, BG, BH, FG をかき、線分 EF と BG の交点を I とします。

このとき、図 4 をみて、次の各問に答えなさい。なお、この問題用紙の 1 ページ分の辺の比は、 $1:\sqrt{2}$ です。

(埼玉県 2008 年度)

問1. $\triangle ABH$ と $\triangle CBG$ が相似であることを証明しなさい。

問2. $AH=5\text{ cm}$ のとき、FG の長さを求めなさい。ただし、根号はつけたままで答えなさい。

問3. 図 4 の中から、線分 AH と等しい長さの線分をすべて見つけ、その線分を記号で書きなさい。

解答欄

問1	証明	
問2	cm	
問3		

解答

問1

証明

△ABHと△CBGにおいて

$\angle A = \angle C = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

重なるように2回折っているから、 $\angle B$ は4等分されるから、

$\angle ABH = \angle CBG \cdots \textcircled{2}$

①, ②から

2組の角が、それぞれ等しいので

$\triangle ABH \sim \triangle CBG$

問2 $5\sqrt{2}$ cm

問3 EI, DG, FD, EC

解説

問2

$FG = CG = x$ とする。

$\triangle ABH \cong \triangle EBI$ より $EI = AH = 5$

$\triangle BGC$ で $IE \parallel GC$ より

$IE : GC = BE : BC$

$5 : x = 1 : \sqrt{2}$

$x = 5\sqrt{2}$ cm

問3

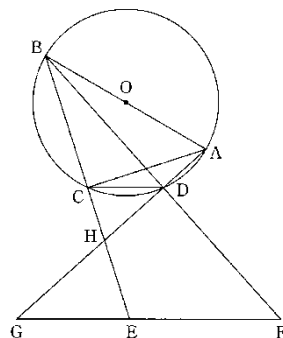
$\triangle ABH \cong \triangle EBI$ より $AH = EI = a$ とおく。

$GF = GC = \sqrt{2} a$ $\triangle FGD$ は $\angle FDG = 90^\circ$ より $FD = DG$ の直角二等辺三角形で $FD = DG = \frac{GF}{\sqrt{2}} = a$

また $FD = EC$ によって AH と等しい長さの線分は EI, DG, FD, EC

【問 4】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に、2 点 A, B とは異なる点 C を $AC < BC$ となるようにとり、点 B をふくまない $\widehat{AC}$ 上に 2 点 A, C とは異なる点 D をとり、点 C と点 D を結ぶ。また、線分 BC の延長上に点 B とは異なる点 E を $BC = CE$ となるようにとり、線分 BD の延長上に点 B とは異なる点 F を $BD = DF$ となるようにとり。さらに、線分 AD の延長と線分 FE の延長との交点を G とし、線分 AG と線分 BE との交点を H とする。このとき、次の問いに答えなさい。



(神奈川県 2008 年度)

問1. 三角形 ABC と三角形 FGD が相似であることを次のように証明した。空欄にあてはまるものとして、 $\boxed{(a)}$ には最も適する弧を記号 $\widehat{\quad}$ を用いて書き、 $\boxed{(b)}$ には最も適する角を記号 $\angle$ を用いて書き、 $\boxed{(c)}$ には最も適する用語を漢字 3 字で書き、 $\boxed{(あ)}$ には最も適するものを【選択群】から 1 つ選びその番号を書きなさい。

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle FGD$ において、

まず、 $\boxed{(a)}$ に対する円周角は等しいから、

$$\angle BAC = \angle BDC \cdots \text{①}$$

ところで、 $\triangle BEF$ において、

仮定より、 $BC = CE$, $BD = DF$ であるから、

$$CD \parallel EF \cdots \text{②}$$

②より、平行線の同位角は等しいから、

$$\boxed{(b)} = \angle BFE \cdots \text{③}$$

$$\text{①, ③より, } \angle BAC = \angle BFE$$

$$\text{よって, } \angle BAC = \angle GFD \cdots \text{④}$$

次に、 $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから、

$$\angle ACB = \angle ADB \cdots \text{⑤}$$

また、 $\boxed{(c)}$ は等しいから、

$$\angle ADB = \angle FDG \cdots \text{⑥}$$

$$\text{⑤, ⑥より, } \angle ACB = \angle FDG \cdots \text{⑦}$$

$$\text{④, ⑦より, } \boxed{(あ)} \text{ から,}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle FGD$$

【選択群】

1. 3 組の辺の比が等しい
2. 2 組の辺の比が等しく、その間の角が等しい
3. 2 組の角がそれぞれ等しい
4. 3 辺がそれぞれ等しい

問2. $\angle BDC = 48^\circ$, $\angle EHG = 66^\circ$ のとき、 $\angle ABD$ の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
	(あ)	
問2	$\angle ABD = \quad \circ$	

解答

問1

(a) $\widehat{BC}$

(b) $\angle BDC$

(c) 対頂角

(あ) 3

問2 $\angle ABD = 18^\circ$

解説

問2

AB は円 O の直径より $\angle BDA = \angle ACB = 90^\circ$

弧 BC の円周角より $\angle BAC = \angle BDC = 48^\circ$

よって $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$

また $\triangle BDH$ において $\angle BDH = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, $\angle BHD = \angle GHE = 66^\circ$

よって $\angle DBH = 180^\circ - 66^\circ - 90^\circ = 24^\circ$

したがって $\angle ABD = 42^\circ - 24^\circ = 18^\circ$

【問 5】

図のような、1 辺の長さが 6cm の立方体がある。頂点 F から対角線 AG に引いた垂線と対角線 AG の交点を P とし、辺 BC の中点を M とする。このとき、次の問1～問4に答えなさい。

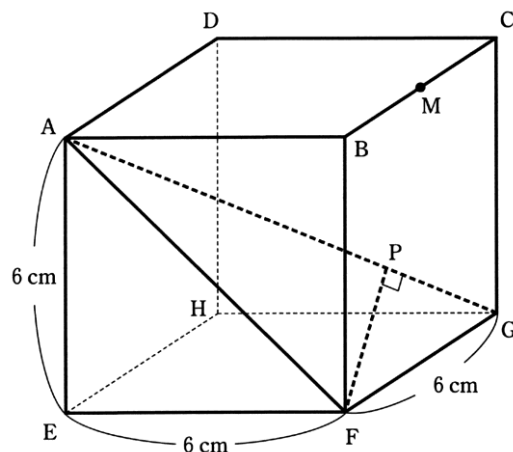
(新潟県 2008 年度)

問1. 対角線 AG の長さを求めなさい。

問2. $\triangle AFG \sim \triangle FPG$ であることを証明しなさい。

問3. $\triangle AFP$ の面積を求めなさい。

問4. 4 点 M, A, F, P を結んでできる三角すいの体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	証明
問3	cm ²
問4	cm ³

解答

問1 $6\sqrt{3}$ cm

問2

証明

辺 FG は平面 AEFB に垂直だからこの平面上にある線分 AF に垂直である。

したがって $\triangle AFG$ と $\triangle FPG$ において

$$\angle AFG = \angle FPG = 90^\circ \cdots \text{ア}$$

また共通な角だから

$$\angle AGF = \angle FGP \cdots \text{イ}$$

ア, イより

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AFG \sim \triangle FPG$ である。

問3 $12\sqrt{2}$ cm²

問4 24 cm³

解説

問3

$\triangle AFG \sim \triangle FPG$ より

$$AG:FG = FG:PG$$

$$6\sqrt{3}:6 = 6:PG$$

$$PG = \frac{6 \times 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{よって } AP = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$AP:PG = 4\sqrt{3}:2\sqrt{3} = 2:1$$

$$\text{したがって } \triangle AFP = \frac{2}{3} \triangle AFG = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times FG \times AF = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

問4

M から平面 AFGD に垂線 MH をひく。

$$MH = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

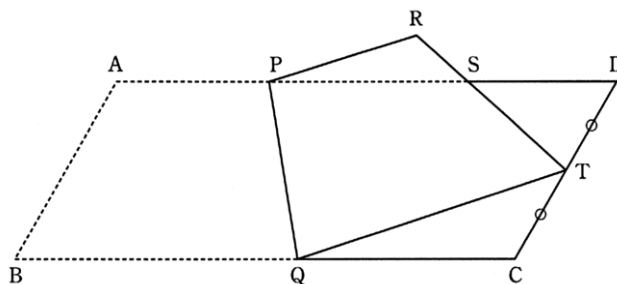
$$\text{よって三角すい MAFP の体積は } \frac{1}{3} \times 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 24 \text{ cm}^3$$

【問 6】

平行四辺形 $ABCD$ の頂点 B を、辺 CD の中点 T に重なるように折り返したら、図のようになった。折り目を線分 PQ とし、頂点 A の移った点を R 、線分 RT と辺 AD との交点を S とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2008 年度)



問1. $\triangle SPR \sim \triangle TQC$ であることを証明せよ。

問2. $AB=2\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$, $\angle ABC=60^\circ$ のとき、

(1) 線分 QT の長さを求めよ。

(2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	証明	
	$\triangle SPR \sim \triangle TQC$	
問2	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答

問1

証明

$\triangle SPR$ と $\triangle TQC$ で

$\angle SRP = \angle TCQ$ (平行四辺形) …①

$\angle PSR = \angle TSD$ (対頂角) …②

また $\angle TSD + \angle SDT = \angle STQ + \angle QTC$ …③

$\angle SDT = \angle STQ$ (平行四辺形) …④

③, ④から $\angle TSD = \angle QTC$ …⑤

②, ⑤から $\angle PSR = \angle QTC$ …⑥

①, ⑥から

2組の角が, それぞれ等しいので

$\triangle SPR \sim \triangle TQC$

問2

(1) $\frac{31}{11} \text{ cm}$

(2) $\frac{17}{22} \sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問2

(1)

QT を $x \text{ cm}$ とすると $QB = QT = x$, $QC = 5 - x$

T から BC の延長線上に垂線 TH をひく。

$$\angle TCH = 60^\circ \text{ だから } CH = \frac{1}{2} TC = \frac{1}{2}, TH = \sqrt{3} CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle TQH \text{ で三平方の定理を利用して } \left(5 - x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2 \quad 11x = 31 \quad x = \frac{31}{11} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle SPR \sim \triangle TQC$ より

$$RS : PR : PS = CT : QC : QT = 1 : \frac{24}{11} : \frac{31}{11}$$

$$\text{よって } PS = a \text{ cm とおくと } PR = PA = \frac{24}{11} a, PS = \frac{31}{11} a$$

$$T \text{ から } SD \text{ に垂線 } TU \text{ をひくと } UD = \frac{1}{2} TD = \frac{1}{2}$$

$$\triangle STU \text{ において } ST = 2 - a, SU = 5 - \frac{1}{2} - \frac{24}{11} a - \frac{31}{11} a = \frac{9}{2} - 5a, TU = \sqrt{3} UD = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ だから}$$

$$\text{三平方の定理を利用して } (2 - a)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - 5a\right)^2$$

$$24a^2 - 41a + 17 = 0$$

$$a^2 - \frac{41}{24} a + \frac{17}{24} = 0$$

$$(a - 1) \left(a - \frac{17}{24}\right) = 0$$

$$a = 1, \frac{17}{24}$$

$$a < 1 \text{ だから } a = \frac{17}{24} \text{ よって } PR = PA = \frac{24}{11} \times \frac{17}{24} = \frac{17}{11}$$

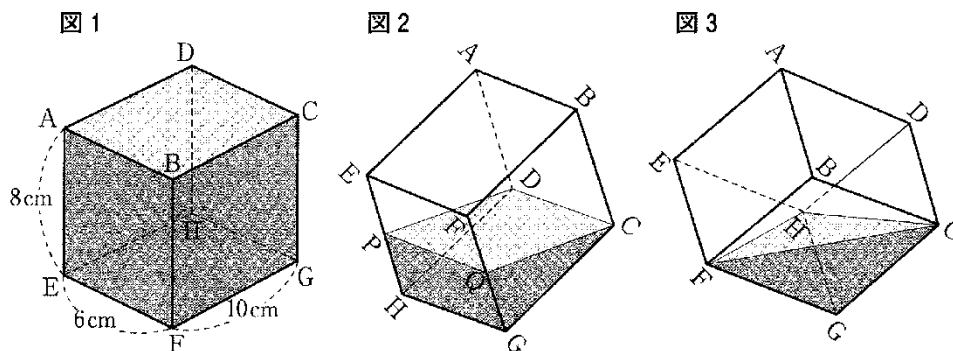
$$A \text{ から } BC \text{ に垂線 } AK \text{ をひくと } AK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$$

$$\triangle PQR = \triangle PQA = \frac{1}{2} \times \frac{17}{11} \times \sqrt{3} = \frac{17}{22} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 7】

図1は、横 10cm、縦 6cm、高さ 8cm の直方体の容器に水をいっぱいに入れたものである。この状態から容器を傾け、水をこぼしていき、容器に残った水の体積を調べる学習をした。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

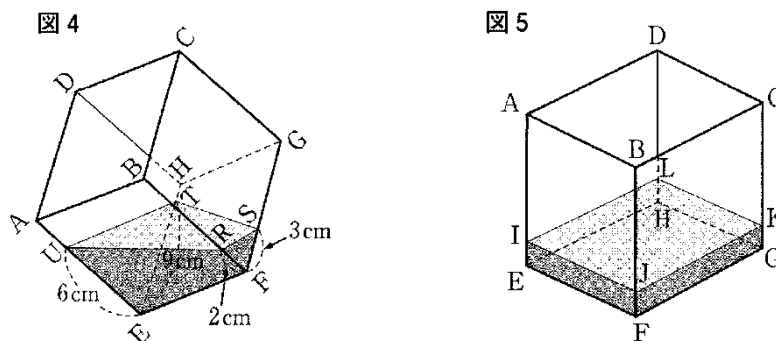


(山梨県 2008 年度)

問1. 図 2 において、点 P、Q はそれぞれ辺 EH、辺 FG の中点である。恵子さんは、図 2 のように水面が四角形 CDPQ となった時点でこぼすのをやめた。このとき、こぼす前の水 (図 1) の体積と、残っている水 (図 2) の体積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

問2. 良夫さんは、図 3 のように水面が三角形 CHF となった時点でこぼすのをやめた。このとき、残っている水の体積を求めなさい。

問3. 律子さんは図 1 の状態から水をこぼしていき、あるところでこぼすのをやめ、傾いた角度を元に戻す途中でとめたところ図 4 のように水面が四角形 RSTU となった。ただし $FR=2\text{cm}$ 、 $FS=3\text{cm}$ 、 $ET=9\text{cm}$ 、 $EU=6\text{cm}$ である。このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。



(1) 図 4 において、 $\triangle FSR \sim \triangle ETU$ となることを証明しなさい。

(2) 図 5 は、図 4 の状態から、さらに角度を元に戻し、底面の長方形 EFGH と水面の長方形 IJKL が平行になった状態である。このときの水の深さ JF を求めなさい。

解答欄

問1	こぼす前の水:残っている水		:
問2	cm ³		
問3	(1)	証明	
	(2)	cm	

解答

問1 こぼす前の水:残っている水=4:1

問2 80cm^3

問3

(1)

証明

$\triangle\text{FSR}$ と $\triangle\text{ETU}$ において

仮定より

$$\text{FR}:\text{EU}=2:6=1:3\cdots\textcircled{1}$$

$$\text{FS}:\text{ET}=3:9=1:3\cdots\textcircled{2}$$

また直方体のそれぞれの面は長方形であるから

$$\angle\text{RFS}=\angle\text{UET}=90^\circ\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺の比が等しくその間の角が等しいので

$\triangle\text{FSR}\sim\triangle\text{ETU}$

$$(2) \frac{13}{10}\text{cm}$$

解説

問2

求める水の体積は三角すい H-GCF の体積だから

$$\frac{1}{3}\times\triangle\text{CGF}\times\text{HG}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times8\times10\times6=80\text{cm}^3$$

問3

(2)

EF, UR, TS の延長線の交点を P とする。

$\triangle\text{PUE}$ において $\text{RF}\parallel\text{UE}$ より

$$\text{PF}:\text{PE}=\text{RF}:\text{UE}$$

$\text{PF}=x\text{cm}$ とすると

$$x:(x+6)=2:6$$

$$2(x+6)=6x$$

$$x=3$$

よって、このときの水の体積は

三角すい P-UET－三角すい P-RFS

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times9\times(6+3)-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times3\times3$$

$$=81-3=78$$

これが直方体 IJKL-EFGH の体積と等しいから

$$6\times10\times\text{JF}=78$$

$$\text{JF}=\frac{13}{10}\text{cm}$$

【問 8】

1 辺が 10 cm の正方形 ABCD がある。点 P は辺 AD 上の点で、頂点 A, D とは異なる位置にある。

下の各問いに答えなさい。

(長野県 2008 年度)

問1. 図 1 で、点 Q は辺 AB 上の点で、頂点 A, B とは異なる位置にある。

$AP=a$ cm, $AQ=b$ cm とする。

(1) $a=3$, $b=2$ のとき、線分 PQ の長さを求めなさい。

(2) 面積が $\frac{(10-a) \times b}{2} + 50$ cm² となる図形を、次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。

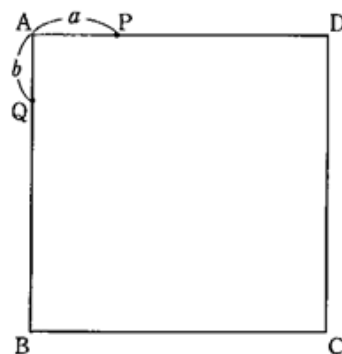
ア $\triangle PQB$

イ 四角形 PBCD

ウ $\triangle PQD$

エ 四角形 PQCD

図 1



問2. 図 2 のように、3 点 A, B, P を通る円 O がある。円 O と BC の交点を E とす

る。また、E から PB に垂線をひき、PB, AB との交点をそれぞれ F, G とする。

(1) 点 P が、 $\widehat{PA}:\widehat{AB}=2:3$ の位置にあるとき、 $\angle APB$ の大きさを求めなさい。

(2) 点 P の位置にかかわらず、 $\triangle PAB \sim \triangle GBE$ となることを証明しなさい。

(3) 点 P が AD の中点にあるとき GB の長さを求めなさい。

(4) 図 3 のように、円 O が DC と接するとき、EF:FG を求めなさい。

図 2

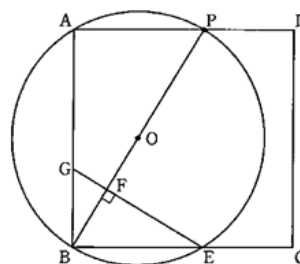
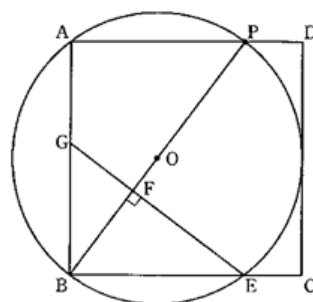


図 3



解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	
問2	(1)	◦
	(2)	証明
	(3)	cm
	(4)	EF:FG= :

解答

問1

(1) $\sqrt{13}$ cm

(2) エ

問2

(1) 54°

(2)

証明

$\triangle PAB$ と $\triangle GBE$ で

四角形 ABCD は正方形だから

$$\angle PAB = \angle GBE \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \angle APB = 90^\circ - \angle ABP$$

$$\angle BGE = 90^\circ - \angle ABP$$

$$\text{だから } \angle APB = \angle BGE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle GBE$$

(3) $\frac{5}{2}$ cm

(4) $EF:FG=16:9$

解説

問2

(3)

$$P \text{ が } AD \text{ の中点であるとき } AP = \frac{AD}{2} = 5$$

$$AB=10 \text{ より } \triangle ABP \text{ で三平方の定理を利用して } PB = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

PとEを結ぶ。

$$PB \text{ は直径より } \angle PEB = 90^\circ$$

$$\text{よって四角形 ABEP は長方形だから } BE = AP = 5$$

$$\triangle PAB \sim \triangle GBE \text{ だから}$$

$$PA:GB = AB:BE$$

$$5:GB = 10:5$$

$$GB = \frac{5 \times 5}{10} = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

(4)

P, Eを結ぶ。

OからDCに垂線をひきPEとの交点をK, DCとの交点をHとする。

また $AP = BE = a$ とする。

$$\triangle PBE \text{ において } OK \parallel BE \text{ より } PK:KE = PO:OB = 1:1$$

$$\text{中点連結定理より } OK = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} a$$

$$\text{また } KH = 10 - a \text{ だから円 O の半径 } OH = \frac{1}{2} a + (10 - a) = 10 - \frac{a}{2}$$

$$\text{よって } PB = 2 \left(10 - \frac{a}{2} \right) = 20 - a$$

$$\triangle PBE \text{ において三平方の定理より } PB^2 = BE^2 + PE^2 \quad (20 - a)^2 = a^2 + 10^2$$

$$\text{これを解いて } a = \frac{15}{2}$$

$$\triangle PAB \sim \triangle GBE \text{ だから } PA:GB = AB:BE \quad \frac{15}{2} : GB = 10 : \frac{15}{2} \quad GB = \frac{45}{8}$$

$$\text{よって } PE \parallel GB \text{ より } EF:FG = PE:BG = 10 : \frac{45}{8} = 16:9$$

【問 9】

図 1 のように、平行四辺形 $OABC$ を、点 O を中心として時計回りに回転させ、点 A, B, C が移動した点を、それぞれ D, E, F とする。後の問 1～問 3 に答えなさい。

(滋賀県 2008 年度)

問 1. $\angle OAB = 70^\circ$ で、図 2 のように線分 EF が点 C を通るとき、 $\angle BCE$ の大きさを求めなさい。

図 1

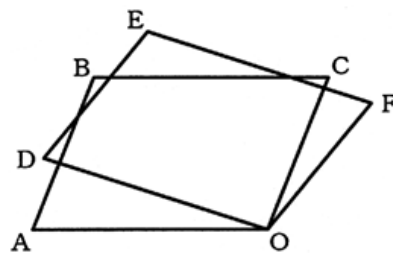
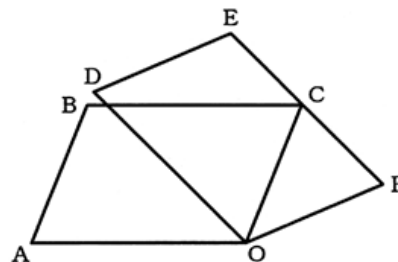
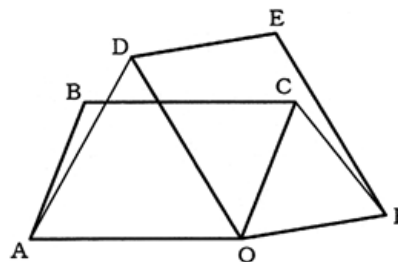


図 2



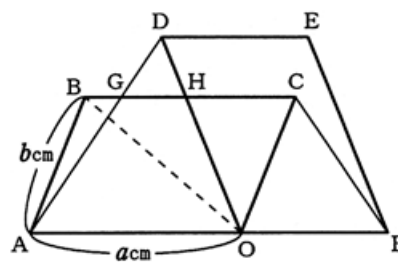
問 2. 図 3 のように、点 C が平行四辺形 $ODEF$ の内部にある場合について、 $\triangle OAD \sim \triangle OCF$ であることを証明しなさい。

図 3



問 3. 図 4 のように、点 C が平行四辺形 $ODEF$ の内部にあり、3 点 A, O, F が一直線上にあるとき、 BC と DA, DO との交点をそれぞれ G, H とする。 $OA = a \text{ cm}$, $AB = b \text{ cm}$ として、次の (1), (2) の問いに答えなさい。

図 4



(1) GH の長さは何 cm か。 a, b を使った式で表しなさい。

(2) さらに、 $OA = OB$ で、 $a = 5, b = 2$ のとき、 $\triangle OCH$ の面積は何 cm^2 か。求めなさい。

解答欄

問1	度	
問2	証明	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1 40 度

問2

証明

△OAD と△OCF で

仮定から OA=OD, OC=OF だから OA:OC=OD:OF…①

仮定から∠AOC=∠DOF

この両辺から∠DOC をひくと

$$\angle AOC - \angle DOC = \angle DOF - \angle DOC$$

$$\angle AOD = \angle COF \dots ②$$

①, ②から

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle OAD \sim \triangle OCF$$

問3

(1) $a-b$ cm

(2) $\frac{8\sqrt{6}}{25}$ cm²

解説

問3

(2)

O から BC に垂線 OP をひく。

△OBC において CP=x とすると三平方の定理を利用して

$$OB^2 - BP^2 = OC^2 - CP^2 \quad 5^2 - (5-x)^2 = 2^2 - x^2 \quad x = \frac{2}{5} \quad OP = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

また OC=OH より, CH=2CP= $\frac{4}{5}$

$$\text{よって} \triangle OCH = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{8\sqrt{6}}{25} \text{ cm}^2$$

【問 10】

写真のようなブランコをモデルにした問題である。図 I，図 IIにおいて，線分 OA の長さは 12 cm である。 B は線分 OA 上の点であり， $\triangle BAC$ は $\angle BAC=90^\circ$ ， $BA=2\text{ cm}$ ， $AC=4\text{ cm}$ の直角三角形である。線分 OD と $\triangle EDF$ とは，それぞれ線分 OA と $\triangle BAC$ とを点 O を中心として同じ向きに同じ角度だけ回転させたものであり， $EF \parallel AC$ となっている。このとき， $OA=OD$ ， $\triangle BAC \equiv \triangle EDF$ である。 $\angle AOD$ の大きさを α° とし， $0 < \alpha < 90$ とする。



円周率を π として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

(大阪府 2008 年度 前期)

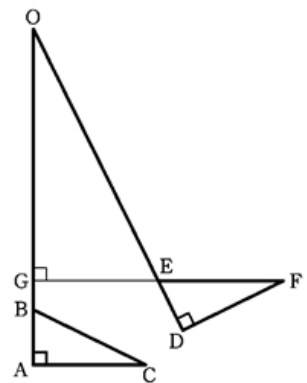
図 I において， G は直線 OA と直線 EF との交点である。このとき， $OA \perp GF$ である。

(1) 0° より大きく 180° より小さい角 $\angle OEF$ の大きさを α を用いて表しなさい。

(2) 線分 BC の長さを求めなさい。

(3) ㊦ $\triangle OGE \sim \triangle FDE$ であることを証明しなさい。

㊦ 線分 OG の長さを求めなさい。求め方も書くこと。



解答欄

(1)	度	
(2)	cm	
	㊦	(証明)
	㊧	求め方
(3)		cm

解答

(1) $a+90$ 度

(2) $2\sqrt{5}$ cm

(3)

㊦

証明

$\triangle OGE$ と $\triangle FDE$ において

$OA \perp GF$, $\angle FDE = 90^\circ$ だから

$\angle OGE = \angle FDE \cdots \text{㊦}$

対頂角は等しいから

$\angle OEG = \angle FED \cdots \text{㊧}$

㊦, ㊧より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OGE \sim \triangle FDE$

㊩

求め方

$OA = OD$, $\triangle BAC \equiv \triangle EDF$ だから

$FD = 4$ cm, $FE = 2\sqrt{5}$ cm

$OE = OD - ED = 10$ cm

$\triangle OGE \sim \triangle FDE$ だから

$OG : FD = OE : FE$

$OG = x$ cm とすると

$x : 4 = 10 : 2\sqrt{5}$

これを解くと $x = 4\sqrt{5}$

$4\sqrt{5}$ cm

解説

(1)

三角形の1つの外角はそれと隣り合わない2つの内角の和であるから

$\angle OEF = \angle EOG + \angle OGE = a^\circ + 90^\circ$

(2)

$\triangle ABC$ で

三平方の定理より $BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

(3)

㊩

$\triangle OGE \sim \triangle FDE$ より

$OG : FD = OE : FE$

$FD = CA = 4$

$OE = OD - ED = OA - BA = 12 - 2 = 10$

$FE = CB = 2\sqrt{5}$ より

$OG : 4 = 10 : 2\sqrt{5}$

$2\sqrt{5} OG = 4 \times 10$

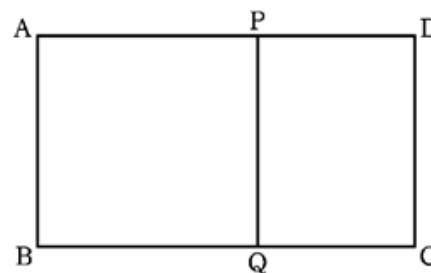
$OG = 4\sqrt{5}$ cm

【問 11】

図Ⅰ～図Ⅲにおいて四角形 $ABCD$ は $AB=9\text{ cm}$, $AD=16\text{ cm}$ の長方形である。 P は辺 AD 上にあって A , D と異なる点である。 Q は辺 BC 上にあって B , C と異なる点である。 $PD=QC$ である。 P と Q とを結ぶ。 $PD=x\text{ cm}$ とし $0 < x < 16$ とする。 次の問いに答えなさい。

(大阪府 2008 年度 後期)

図Ⅰ



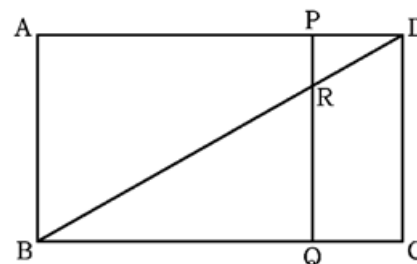
問1. 図Ⅰにおいて,

(1) 四角形 $ABQP$ の周の長さを x を用いて表しなさい。

(2) 四角形 $ABQP$ の周の長さが四角形 $PQCD$ の周の長さの 2 倍になるときの x の値を求めなさい。

問2. 図Ⅱ, 図Ⅲにおいて, R は, B と D とを結んでできる線分 BD と線分 PQ との交点である。

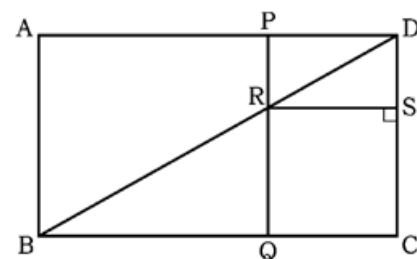
図Ⅱ



(1) 図Ⅱにおいて,

㊦ $\triangle PRD \sim \triangle QRB$ であることを証明しなさい。

図Ⅲ



㊦ $PR:QR=1:3$ となるときの x の値を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2) 図Ⅲにおいて, S は, R から辺 DC にひいた垂線と辺 DC との交点である。四角形 $RQCS$ が正方形になるときの x の値を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm	
	(2)		
問2	(1)	㉞	証明
		㉟	求め方
	(2)		

解答

問1

(1) $50-2x$

(2) $\frac{7}{3}$

問2

(1)

㊦

$\triangle PRD$ と $\triangle QRB$ において

四角形 $ABCD$ は長方形だから $AD \parallel BC$

よって

$$\angle DPR = \angle BQR (\text{錯角}) \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle PDR = \angle QBR (\text{錯角}) \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle PRD \sim \triangle QRB$

④

求め方

$\triangle PRD \sim \triangle QRB$ だから

$$PD:QB = PR:QR = 1:3$$

$$\text{よって } QB = 3PD = 3x \text{ cm}$$

$$QB + QC = BC \text{ だから } 3x + x = 16$$

これを解くと $x = 4$

答 4

(2) $\frac{144}{25}$

解説

問2

(2)

四角形 $RQCS$ が正方形のとき $RS = PD = x$, $DS = 9 - x$ と表せる。

$\angle DSR = \angle DCB = 90^\circ$ より

同位角が等しいので $RS \parallel BC$

よって $RS:BC = DS:DC$

$$x:16 = (9-x):9$$

$$16(9-x) = 9x$$

$$25x = 144$$

$$x = \frac{144}{25}$$

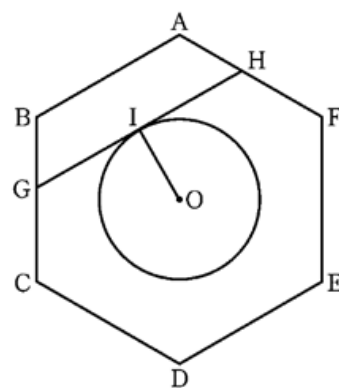
【問 12】

図Ⅰ～図Ⅲにおいて、図形 $ABCDEF$ は 1 辺の長さが 8 cm の正六角形である。点 O は正六角形 $ABCDEF$ の対称の中心である。点 O を中心とする円 O と正六角形 $ABCDEF$ について考える。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2008 年度 後期)

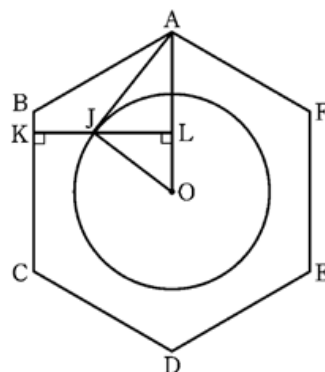
図Ⅰ



- 問1. 図Ⅰにおいて、 G は辺 BC 上にあって B, C と異なる点であり、 H は辺 AF 上にあって A, F と異なる点である。 $BG=AH$ である。 G と H とを結んでできる線分 GH は円 O と接している。 I は、線分 GH と円 O との接点である。 I と O とを結ぶ。 $BG=x\text{ cm}$ とし、 $0<x<8$ とする。このとき、線分 GH の長さと円 O の半径をそれぞれ x を用いて表しなさい。

- 問2. 図Ⅱにおいて、 J は円 O 上の点であり、直線 AJ と円 O とは J において接している。また、 J から直線 BC にひいた垂線は辺 BC と交わっている。 K は、 J から直線 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。 $BK=1\text{ cm}$ である。 A と O 、 J と O とをそれぞれ結ぶ。このとき、直線 KJ は線分 AO と垂直に交わる。 L は、直線 KJ と線分 AO との交点である。

図Ⅱ

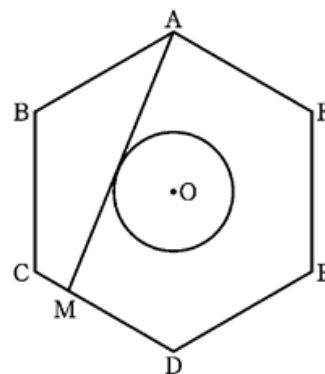


- (1) $\triangle AJO \sim \triangle JLO$ であることを証明しなさい。

- (2) 円 O の半径を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

- 問3. 図Ⅲにおいて、 M は辺 CD 上の点であり、 $CM=2\text{ cm}$ である。直線 AM は円 O と接している。このとき、円 O の半径を求めなさい。

図Ⅲ



解答欄

問1	線分 GH の長さ		cm
	円 O の半径		cm
問2	(1)	証明	
	(2)	求め方	
問3	cm		

解答

問1

線分 GH の長さ $8+x$

円 O の半径 $4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

問2

(1)

証明

$\triangle AJO$ と $\triangle JLO$ において

$\angle AOJ = \angle JOL$ (共通) $\cdots \textcircled{ア}$

J は円 O と直線 AJ との接点だから

$\angle AJO = 90^\circ \cdots \textcircled{イ}$

$AO \perp KL$ だから $\angle JLO = 90^\circ \cdots \textcircled{ウ}$

$\textcircled{イ}$, $\textcircled{ウ}$ より $\angle AJO = \angle JLO \cdots \textcircled{エ}$

$\textcircled{ア}$, $\textcircled{エ}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AJO \sim \triangle JLO$

(2)

求め方

O から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を N とすると

$BN = 4\text{cm}$ だから $KN = BN - BK = 3\text{cm}$

四角形 KNOL は長方形だから $LO = KN = 3\text{cm}$

$\triangle AJO \sim \triangle JLO$ より $AO:JO = JO:LO$ だから

$JO = y\text{cm}$ とすると $8:y = y:3$

これを解くと

$y > 0$ より $y = 2\sqrt{6}$

答 $2\sqrt{6}$

問3 $\frac{12}{7}\sqrt{3}$

解説

問3

AC を結び B から AC に垂線をひき交点を N とする。

$BA = BC = 8$, $\angle ABC = 120^\circ$ より $\angle ABN = 60^\circ$

$AN = CN = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$

$AC = 4\sqrt{3} \times 2 = 8\sqrt{3}$

$\triangle ACM$ で

三平方の定理より $AM = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 2^2} = 14$

AD を結ぶ。

O から AM に垂線をひき交点を P とし, M から AD に垂線をひき交点を Q とする。

$MD = 8 - 2 = 6$

$\angle MDQ = 60^\circ$, $\angle MQD = 90^\circ$ より

$MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} MD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

$\triangle AOP$ と $\triangle AQM$ は

$\angle OAP = \angle QAM$, $\angle AOP = \angle AQM = 90^\circ$ より

2組の角がそれぞれ等しいので相似である。

よって $OP:QM = AO:AM$

$OP:3\sqrt{3} = 8:14$

$14OP = 3\sqrt{3} \times 8$

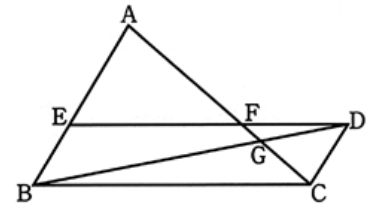
$OP = \frac{12}{7}\sqrt{3}\text{cm}$

【問 13】

$AB=8\text{ cm}$, $BC=12\text{ cm}$, $\angle ABC$ が 90° より小さい角である三角形 ABC がある。図 1 のように、辺 AB 上に点 E をとり、線分 EB , BC を 2 辺とする平行四辺形 $EBCD$ をつくる。線分 AC と、線分 ED , BD との交点をそれぞれ F , G とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

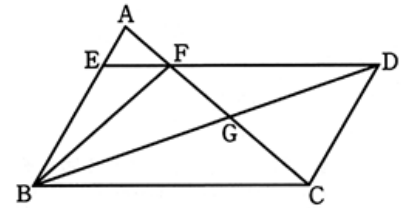
図 1



(愛媛県 2008 年度)

問1. 図 2 のように、 $AE=2\text{ cm}$ であるとき、

図 2

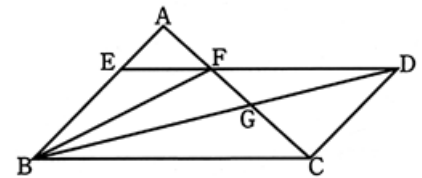


(1) $\triangle EBF \sim \triangle CBD$ であることを証明せよ。

(2) 線分 BF の長さを $a\text{ cm}$ とするとき、線分 GD の長さを a を使って表せ。

問2. 図 3 のように、 $\angle ABC=45^\circ$ で、 $AE:EB=1:2$ であるとき、

図 3



(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) $\triangle FBG$ の面積を求めよ。

解答欄

問1	(1)	証明	
	(2)	cm	
問2	(1)	cm ²	
	(2)	cm ²	

解答

問1

(1)

証明

$\triangle EBF$ と $\triangle CBD$ において

四角形 $EBCD$ は平行四辺形だから

$$\angle FEB = \angle DCB \cdots \textcircled{1}$$

また $EB = DC = AB - AE = 6 \text{ cm}$ だから

$$EB : CB = 6 : 12 = 1 : 2 \cdots \textcircled{2}$$

$EF \parallel BC$ だから $AE : AB = EF : BC$ から

$$2 : 8 = EF : 12$$

よって $EF = 3 \text{ cm}$ だから

$$EF : CD = 3 : 6 = 1 : 2 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$EB : CB = EF : CD \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ で

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle EBF \sim \triangle CBD$$

$$(2) \quad \frac{6}{7}a \text{ cm}$$

問2

$$(1) \quad 24\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$(2) \quad \frac{32\sqrt{2}}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

(2)

$\triangle EBF \sim \triangle CBD$ より

$$BF : BD = BE : BC$$

$$a : BD = 6 : 12$$

$$BD = 2a$$

$CD \parallel BA$ だから, $GD : GB = CD : AB = 6 : 8 = 3 : 4$

$$\text{よって } GD = \frac{3}{7} BD = \frac{3}{7} \times 2a = \frac{6}{7}a \text{ cm}$$

問2

(1)

A から BC に垂線 AH をひく。

$\angle ABH = 45^\circ$ だから $\triangle ABH$ は, $AH : BH : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形である。

$$\text{よって } AH = \frac{1}{\sqrt{2}} \times AB = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8 = 4\sqrt{2}$$

$$\text{したがって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

(2)

$\triangle ABC$ において $EF \parallel BC$ より $AF : FC = AE : EB = 1 : 2$

$$\text{よって } \triangle BCF = \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2}{3} \times 24\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

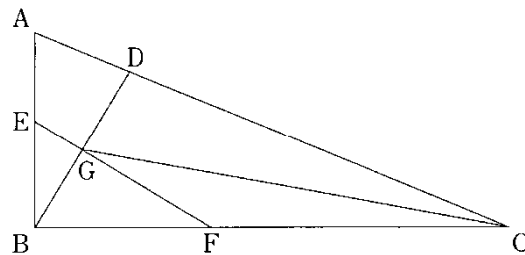
また $EF : BC = AE : AB = 1 : 3$ $BC = ED$ より $FD : BC = (3 - 1) : 3 = 2 : 3$

よって $FD \parallel BC$ より $FG : GC = FD : BC = 2 : 3$

$$\triangle FBG = \frac{2}{5} \triangle BCF = \frac{2}{5} \times 16\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{5} \text{ cm}^2$$

【問 14】

$AB=5\text{ cm}$, $BC=12\text{ cm}$, $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。図のように、辺 AC 上に $AD:DC=1:4$ となる点 D をとり、点 B と点 D を結ぶ。線分 BD の垂直二等分線をひき、辺 AB , BC と交わる点を、それぞれ E , F とする。線分 BD と線分 EF の交点を G とし、点 C と点 G を結ぶ。



次の問1は指示にしたがって答え、問2、問3は の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

(福岡県 2008 年度)

問1. 図において、相似な三角形を1組選び、その2つの三角形が相似であることを の中に証明せよ。

(証明)

問2. $\triangle GCD$ の面積は cm^2 である。

問3. 線分 BE の長さは cm である。

解答欄

問1	証明	
問2		
問3		

解答

問1

証明

△EBFと△BGFにおいて

仮定から

$$\angle EBF = \angle BGF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

共通な角だから

$$\angle EFB = \angle BFG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

△EBF ∽ △BGF

問2 12

問3 $\frac{68}{25}$

解説

問3

DからABに垂線DHをひく。

$\angle AHD = \angle ABC = 90^\circ$ より同位角が等しいので $DH \parallel CB$

$$\text{よって } DH:CB = AD:AC \quad DH:12 = 1:5 \quad DH = \frac{12}{5}$$

$$\text{また } AH:HB = AD:DC = 1:4 \text{ より } HB = \frac{4}{5} AB = 4$$

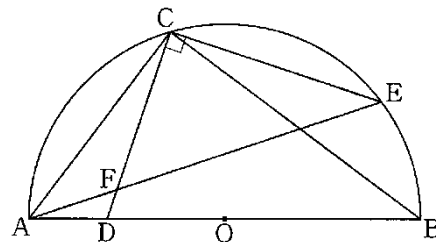
DとEを結ぶ。

EFは線分BDの垂直二等分線なので $DE = BE = x$ とすると $HE = 4 - x$

$$\triangle DEH \text{ において, 三平方の定理より } (4-x)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = x^2 \text{ これを解いて, } x = \frac{68}{25} \text{ cm}$$

【問 15】

図は、線分 AB を直径とする半円で、点 O は AB の中点である。点 C は弧 $\widehat{AB}$ 上にあり、点 D は線分 OA 上にある。点 E は弧 $\widehat{BC}$ 上にあって、 $CE \perp CD$ である。また、点 F は線分 CD と線分 AE との交点である。



このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2008 年度)

問1. $\triangle ADC \sim \triangle FDA$ であることを証明しなさい。

問2. $AB=5$ cm, $AC=3$ cm, $AD=1$ cm であるとき、線分 AF の長さを求めなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

解答欄

問1	証明
問2	cm

解答

問1

証明

$\triangle ADC$ と $\triangle FDA$ において

2つの三角形に共通な角だから

$$\angle ADC = \angle FDA \cdots \textcircled{1}$$

AB は半円の直径だから $\angle BCA = 90^\circ$

また $CE \perp CD$ だから $\angle ECD = 90^\circ$

よって $\angle DCA + \angle BCD = 90^\circ$

$\angle ECB + \angle BCD = 90^\circ$ だから

$$\angle DCA = \angle ECB \cdots \textcircled{2}$$

$\angle DAF$ と $\angle ECB$ は $\widehat{BE}$ に対する円周角だから

$$\angle DAF = \angle ECB \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle DCA = \angle DAF \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \sim \triangle FDA$$

$$\text{問2} \quad \frac{3\sqrt{10}}{8} \text{ cm}$$

解説

問2

AB は直径より $\angle ACB = 90^\circ$

$\triangle ABC$ において, 三平方の定理より

$$BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

C から AB に垂線 CK をひく。

$\triangle ABC \sim \triangle ACK$ となるから

$$AC : AK = BC : CK = AB : AC = 5 : 3$$

$$3 : AK = 5 : 3 \text{ より } AK = \frac{9}{5}$$

$$4 : CK = 5 : 3 \text{ より } CK = \frac{12}{5}$$

$$DK = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

$\triangle CDK$ において

$$CD = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

$\triangle ADC \sim \triangle FDA$ より

$$AC : FA = CD : AD$$

$$3 : FA = \frac{4\sqrt{10}}{5} : 1$$

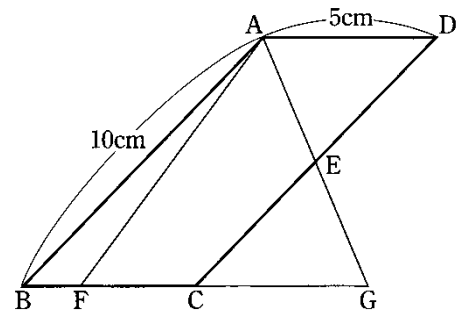
$$FA = \frac{3\sqrt{10}}{8} \text{ cm}$$

【問 16】

図のような、平行四辺形 $ABCD$ があり $AB=10\text{ cm}$, $AD=5\text{ cm}$, $\angle ABC$ は鋭角である。点 E は辺 CD の中点であり、点 F は辺 BC 上の点で、 $BF:FC=1:2$ である。また、点 G は、線分 AE を延長した直線と辺 BC を延長した直線の交点である。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(宮崎県 2008 年度)



問1. $\angle BCD=134^\circ$ のとき、 $\angle EAB$ の大きさを求めなさい。

問2. 図の中から、相似な 2 つの三角形を選び、書きなさい。ただし、相似比が $1:1$ の場合は除く。また、その 2 つの三角形が相似であることを証明しなさい。

問3. 対角線 BD をひき、線分 AF , AE との交点をそれぞれ、 P , Q とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 PQ の長さは、対角線 BD の長さの何倍になりますか。

(2) 頂点 A から線分 BG に垂線をひき、その垂線と線分 BG との交点を H とする。 $AH=8\text{ cm}$ のとき、五角形 $FCEQP$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	∠EAB= 度	
問2	選んだ三角形	
	証明	
問3	(1)	倍
	(2)	cm ²

解答

問1 $\angle EAB = 67^\circ$

問2

証明

$\triangle GEC$ と $\triangle GAB$ で

$AB \parallel DC$ より

同位角は等しいので

$$\angle GEC = \angle GAB \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle GCE = \angle GBA \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle GEC \sim \triangle GAB$$

証明

$\triangle DAE$ と $\triangle BGA$ で

$AD \parallel BG$ より

錯角は等しいので

$$\angle DAE = \angle BGA \cdots \textcircled{1}$$

平行四辺形の向かいあう角は等しいので

$$\angle ADE = \angle GBA \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle DAE \sim \triangle BGA$$

問3

$$(1) \frac{5}{12} \text{ 倍}$$

$$(2) 15 \text{ cm}^2$$

解説

問3

(1)

$$AD \parallel BF \text{ より } BP:PD = BF:AD = 1:3$$

$$\text{よって } BP = \frac{1}{4} BD \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } AD \parallel CG \text{ より } AD:CG = DE:EC = 1:1$$

$$\text{よって } CG = 5 \text{ より } BG = 10$$

$$AD:BG = 1:2$$

$$BQ:QD = BG:AD = 2:1$$

$$QD = \frac{1}{3} BD \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } PQ = BD - \frac{1}{4} BD - \frac{1}{3} BD = \frac{5}{12} BD$$

$$\text{よって } PQ \text{ は } BD \text{ の } \frac{5}{12} \text{ 倍}$$

(2)

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} (\text{平行四辺形 } ABCD) = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 20$$

$$BP:PD = 1:3 \text{ より } \triangle BCP = \frac{1}{4} \triangle BCD = \frac{1}{4} \times 20 = 5$$

$$BF:FC = 1:2 \text{ より } \triangle BFP = \frac{1}{3} \triangle BCP = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$$

$$BQ:QD = 2:1 \text{ より } \triangle CQD = \frac{1}{3} \triangle BCD = \frac{1}{3} \times 20 = \frac{20}{3}$$

$$CE:ED = 1:1 \text{ より } \triangle QED = \frac{1}{2} \triangle CQD = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{よって五角形 } FCEQP = \triangle BCD - \triangle BFP - \triangle QED = 20 - \frac{5}{3} - \frac{10}{3} = 15 \text{ cm}^2$$