

5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2021 年度出題】

【問 1】

四角形 ABCD があり、点 A と C、点 B と D をそれぞれ結ぶ。次の《条件》にしたがって、点 E、F、G、H を、それぞれ辺 AB、BC、CD、DA 上にとり、四角形 EFGH をつくる。

(秋田県 2021 年度)

《条件》

- ・ $AE=EB$, $BF=FC$
- ・ $EH \parallel BD$, $FG \parallel BD$

- (1) [詩織さんの説明] が正しくなるように、㉑にあてはまる言葉を書きなさい。

[詩織さんの説明]

図 2 において、四角形 EFGH は平行四辺形になります。

[証明]

仮定より、 $AE=EB$, $BF=FC$ だから

$EH : BD = FG : BD = 1 : 2$

したがって、 $EH=FG$ …①

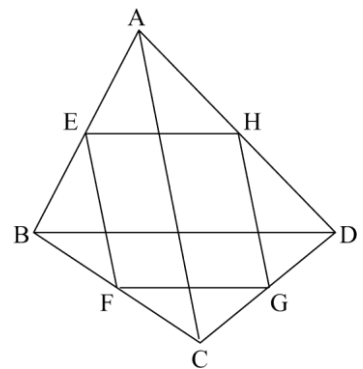
$EH \parallel BD$, $FG \parallel BD$ だから

$EH \parallel FG$ …②

①, ②より ㉑ から

四角形 EFGH は平行四辺形である。

図 2



- (2) [詩織さんの説明] を聞いた健太さんは、四角形 EFGH がひし形になる場合について考えた。
[健太さんの説明] が正しくなるように、㉒にあてはまるものを下のア～オから 1 つ選んで記号を書きなさい。

[健太さんの説明]

詩織さんが説明しているように、四角形 EFGH は平行四辺形になります。さらに、四角形 ABCD の条件として、㉒ を加えます。このとき、《条件》にしたがって四角形 EFGH をつくと、四角形 EFGH はいつでもひし形になります。



- ア $\angle BAC = \angle BDC$
- イ $\angle BAC = \angle DCA$
- ウ $\angle ACB = \angle ADB$
- エ $AC = BD$
- オ $AC = AD$

解答欄

(1)	㉔	
(2)	㉕	

解答

(1)

㉔ 1組の対辺が平行でその長さが等しい

(2)

㉕

解説

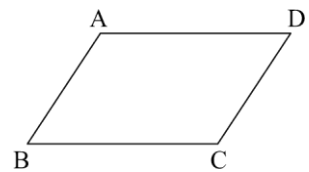
(2)

ひし形は、全ての辺の長さが等しい平行四辺形である。
つまり、 $EF=EH$ となれば、平行四辺形 $EFGH$ はひし形になる。
中点連結定理より、 $EF=\frac{1}{2}AC$ 、 $EH=\frac{1}{2}BD$ なので
 $EF=EH$ となるために、 $AC=BD$ となればよいことが分かる。

【問 2】

次の文の () に当てはまる条件として最も適切なものを、ア，イ，ウ，エのうちから 1 つ選んで，記号で答えなさい。

(栃木県 2021 年度)



平行四辺形 ABCD に，() の条件が加わると，平行四辺形 ABCD は長方形になる。

- ア $AB=BC$
- イ $AC \perp BD$
- ウ $AC=BD$
- エ $\angle ABD = \angle CBD$

解答欄

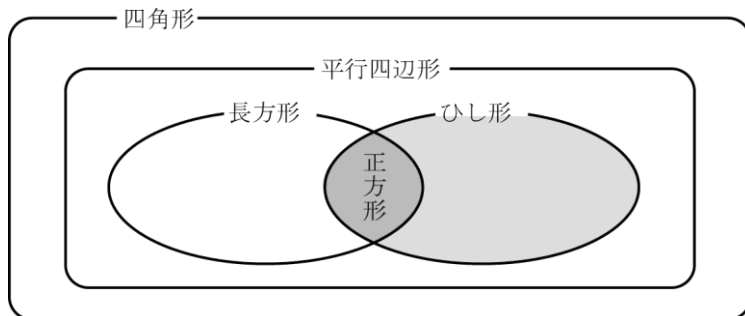
解答
ウ

【問 3】

次の図は、四角形、平行四辺形、長方形、ひし形、正方形の関係を表したものである。例えば、四角形に「1組の対辺が平行でその長さが等しい」という条件が加わると、平行四辺形になるといえる。

後の問 1、問 2 に答えなさい。

(群馬県 2021 年度 後期)



問 1 平行四辺形に、ある条件が加わると、長方形やひし形になる。次の ① , ② に当てはまる条件として正しいものを、後のア～オからそれぞれ 1 つずつ選び、記号で答えなさい。

平行四辺形に「 ① 」という条件が加わると、長方形になる。
 平行四辺形に「 ② 」という条件が加わると、ひし形になる。

- ア 対角線がそれぞれの中点で交わる
- イ 1組の隣り合う辺の長さが等しい
- ウ 1組の隣り合う角の大きさが等しい
- エ 2組の対辺の長さがそれぞれ等しい
- オ 2組の対角の大きさがそれぞれ等しい

問 2 長方形に、対角線に関するある条件が加わると、正方形になる。その「対角線に関する条件」を、簡潔に書きなさい。

解答欄

問 1	(1)	
	(2)	
問 2		

解答

問 1

(1) ウ

(2) イ

問 2 対角線が垂直に交わる

解説

ひし形…4 つの辺の長さが全て等しい四角形。対角線が垂直に交わる。

長方形…4 つの角の大きさが全て等しい四角形。対角線の長さが等しい。

エとオの条件は平行四辺形の性質にすでに含まれている。

【問 4】

右の図 1 で、四角形 ABCD は、 $AB > AD$ の長方形であり、点 O は線分 AC を直径とする円の中心である。

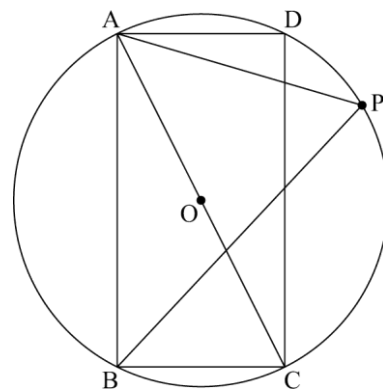
点 P は、頂点 A を含まない $\widehat{CD}$ 上にある点で、頂点 C、頂点 D のいずれにも一致しない。

頂点 A と点 P、頂点 B と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

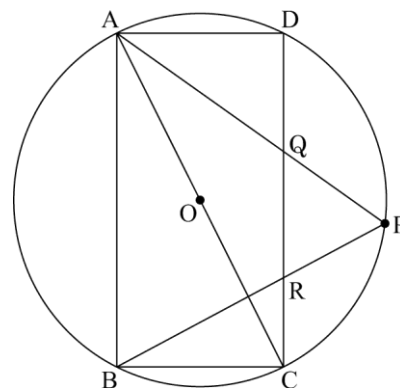
(東京都 2021 年度)

図 1



問 1 図 1 において、 $\angle ABP = a^\circ$ とするとき、 $\angle PAC$ の大きさを表す式を、次のア～エのうちから選び、記号で答えよ。

図 2



ア $(45 - \frac{1}{2}a)$ 度

イ $(90 - a)$ 度

ウ $(90 - \frac{1}{2}a)$ 度

エ $(135 - 2a)$ 度

問 2 右の図 2 は、図 1 において、辺 CD と線分 AP との交点を Q、辺 CD と線分 BP との交点を R とし、 $AB = AP$ の場合を表している。

次の (1)、(2) に答えよ。

(1) $\triangle QRP$ は二等辺三角形であることを証明せよ。

(2) 次の 中の「お」「か」「き」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図 2 において、頂点 C と点 P を結んだ場合を考える。

AB = 16 cm, AD = 8 cm のとき、 $\triangle PRC$ の面積は、 $\frac{\text{おか}}{\text{き}} \text{ cm}^2$ である。

解答欄

問 1			
問 2	(1)	〔証明〕	
	(2)	お	
		か	
き			

解答

問 1 イ

問 2

(1)

〔証明〕

仮定から、 $AB=AP$ だから

$\triangle ABP$ は二等辺三角形である。

二等辺三角形の底角は等しいから

$$\angle ABP = \angle APB$$

よって

$$\angle ABP = \angle QPR \cdots (1)$$

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$AB \parallel DC$

平行線の同位角は等しいから

$$\angle ABP = \angle QRP \cdots (2)$$

(1), (2)より

$$\angle QPR = \angle QRP$$

よって、 $\triangle QRP$ において

2つの角が等しいから

($\triangle QRP$ は二等辺三角形である。)

(2)

お 4

か 8

き 5

解説

問 1

① 問題文から情報をさがすと、長方形、AC を直径とする円 O の 2 つが見つかる。

② 長方形からは、「4 つの内角がすべて 90° 」「2 組の対辺がそれぞれ平行→同位角、錯角」「2 組の対辺がそれぞれ等しい」「対角線の長さが等しい」、円 O からは、「円周角の定理」「半径 2 つで二等辺三角形→底角が等しい(図 1)」「直径→ 90° (図 2)」などが発想として出てくる。

③ 今回は角の大きさを求める問題なので、②の中でも「4 つの内角がすべて 90° 」「同位角、錯角」「円周角の定理」「直径→ 90° 」を利用する可能性が高いことがわかる。以上のことに注目して解いていこう。

$\widehat{PC}$ に対する円周角なので、 $\angle PAC = \angle PBC$

また、 $\angle ABP + \angle PBC = 90^\circ$ なので、 $a^\circ + \angle PAC = 90^\circ \Rightarrow \angle PAC = (90 - a)^\circ$

問 2

(1)

① 問 1 で見つけた条件に、問 2 で新たに登場した条件 $AB = AP$ も加えて考えよう。

② 問 1 の発想に加えて、 $AB = AP$ から、「 $\triangle ABP$ が二等辺三角形である」が発想として出てくる。

③ 今回は、 $\triangle QRP$ が二等辺三角形であることの証明なので、「 $\triangle ABP$ が二等辺三角形である」ことがポイントになりそう。

(2)

問 1、問 2 で見つけた条件や発想を使おう。今回は、面積を求める問題なので、辺の長さを求めたり、面積比を用いたりする可能性があることから、「4 つの内角がすべて 90° →三平方の定理、相似」や「2 組の対辺がそれぞれ平行→平行線と線分の比」を使う可能性があると考えよう。

$\triangle PRC = \triangle BCP - \triangle BCR$ であることを利用して面積を求める。

まずは、 $\triangle BCP$ の面積を求めよう。

$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形なので、三平方の定理より、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 8^2 = 320 \quad AC > 0 \text{ より、} AC = 8\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$\triangle ABC$ と $\triangle BEC$ において、 $\angle ABC = \angle BEC = 90^\circ$ 、 $\angle ACB = \angle BCE$ より、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABC \sim \triangle BEC$ (図 3)

$$\text{よって、} AB : BE = AC : BC \Rightarrow 16 : BE = 8\sqrt{5} : 8 \Rightarrow 16 : BE =$$

$$\sqrt{5} : 1 \Rightarrow \sqrt{5}BE = 16 \Rightarrow BE = \frac{16\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

$$\text{また、} BC : EC = AC : BC \Rightarrow 8 : EC = \sqrt{5} : 1 \Rightarrow \sqrt{5}EC = 8 \Rightarrow EC = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

$\triangle ABE$ と $\triangle APE$ において、 $AB = AP$ 、 $AE = AE$ 、 $\angle AEB = \angle AEP = 90^\circ$ より、直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABE \cong \triangle APE$

$$\text{よって、} BE = PE = \frac{16\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)} \quad \text{すなわち、} BP = \frac{16\sqrt{5}}{5} \times 2 = \frac{32\sqrt{5}}{5} \text{ (cm)}$$

$$\triangle BCP = BP \times EC \times \frac{1}{2} = \frac{32\sqrt{5}}{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{128}{5} \text{ (cm}^2\text{)}$$

次に、 $\triangle BCR$ を求めよう。

$\triangle BEC$ と $\triangle BCR$ において、 $\angle BEC = \angle BCR = 90^\circ$ 、 $\angle EBC = \angle CBR$

より、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle BEC \sim \triangle BCR$ (図 4)

よって、 $EC : CR = BE : BC$

$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{5}}{5} : CR = \frac{16\sqrt{5}}{5} : 8 = 2\sqrt{5} : 5 \Rightarrow 2\sqrt{5}CR = 8\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow CR = 4 \text{ (cm)} \quad \triangle BCR = BC \times CR \times \frac{1}{2} = 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{よって、} \triangle PRC = \triangle BCP - \triangle BCR = \frac{128}{5} - 16 = \frac{48}{5} \text{ (cm}^2\text{)}$$

図 1

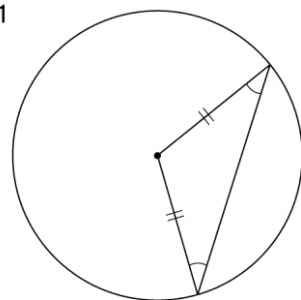


図 2

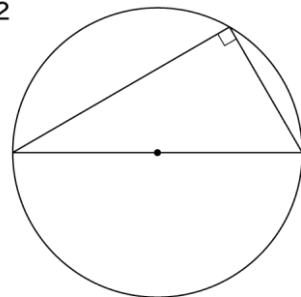


図 3

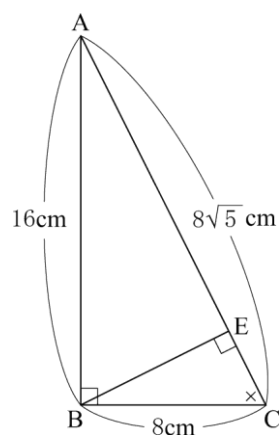
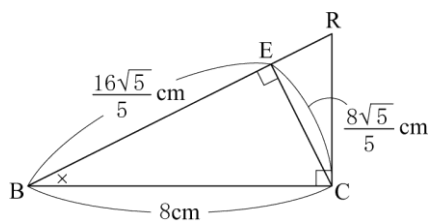


図 4

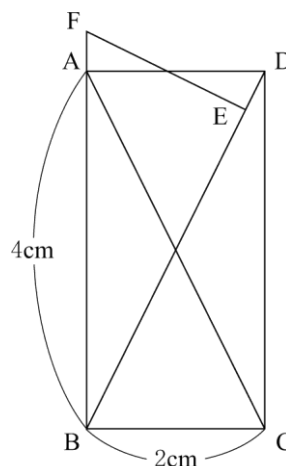


【問 5】

右の図 1 のように、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $BC=2\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ があり、 $\triangle ACD \equiv \triangle FBE$ となるように、対角線 BD 上に点 E を、辺 BA の延長上に点 F をそれぞれとる。このとき、次の問 1、問 2 に答えなさい。

(新潟県 2021 年度)

図 1



問 1 線分 DE の長さを答えなさい。

問 2 次の文は、ある中学校の数学の授業での、先生と生徒の会話の一部である。この文を読んで、あとの(1)～(4)の問いに答えなさい。

先生：厚紙に、上の図 1 の $\triangle FBE$ と合同な $\triangle PQR$ を作図し、これを切り取ります。また、次のページの図 2 のように、半直線 OX と、 OX に垂直な半直線 OY を紙にかきます。この紙の上に、切り取った $\triangle PQR$ を、次のページの図 3 のように、頂点 Q を点 O と、辺 PQ を半直線 OY と、それぞれ重ねて置き、次の手順 I、II に従って動かします。このとき、頂点 R の動きについて、何か気づくことはありますか。

手順

- I 図 3 の $\triangle PQR$ の位置から、頂点 P を半直線 OY 上で、頂点 Q を半直線 OX 上で、それぞれ矢印の向きに動かす。次のページの図 4 は、頂点 P が半直線 OY 上のある点を、また、頂点 Q が半直線 OX 上のある点を、それぞれ通るときのようすを表したものである。
- II 次のページの図 5 のように、頂点 P が点 O と重なったとき、 $\triangle PQR$ を動かすことを終了する。

ケン：頂点 R は、ある 1 つの直線上を動いているような気がします。不思議ですね。

ナミ：ある 1 つの直線上を動くのなら、その直線は点 O を通りそうです。

先生：それが正しいかどうかを確かめるために、 $\angle ROX$ に注目してみましょう。

ナミ：図 3 では、 $\angle QRP$ の大きさが $\boxed{\text{ア}}$ 度だから、 $\angle ROX$ の大きさは $\angle RPQ$ の大きさと等しくなります。

先生：そうですね。では、図 4 で、点 O と頂点 R を結ぶと同じことが言えるでしょうか。

リエ：図 4 で、3 点 P 、 Q 、 R を通る円をかくと、 $\angle QRP$ の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ 度だから、 $\triangle PQR$ の辺 $\boxed{\text{イ}}$ はその円の直径になります。

先生：今のリエさんの考え方を使って、 $\angle ROX$ の大きさは $\angle RPQ$ の大きさと等しくなることが証明できます。この証明をノートに書いてみましょう。

ナミ：できました。

ケン：私もできました。図 5 でも、 $\angle ROX$ の大きさは $\angle RPQ$ の大きさと等しくなるので、頂点 R は、点 O を通る 1 つの直線上を動くと言えます。

先生：そのとおりです。よくできました。次に、手順 I、II に従って $\triangle PQR$ を動かしたときの頂点 R の道のりを、頂点 R の動きをふまえて求めてみましょう。

リエ：はい。頂点 R が動いた道のりは $\boxed{\text{ウ}}$ cm です。

図 2

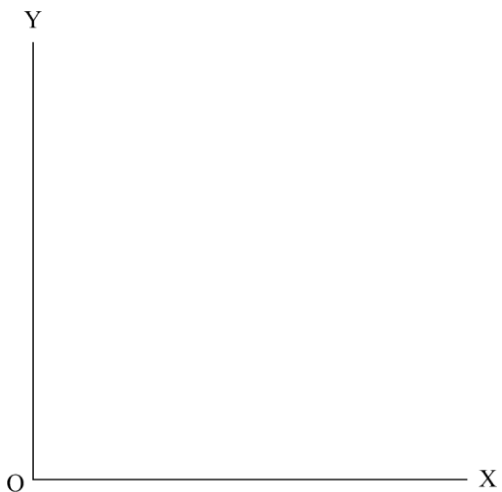


図 3

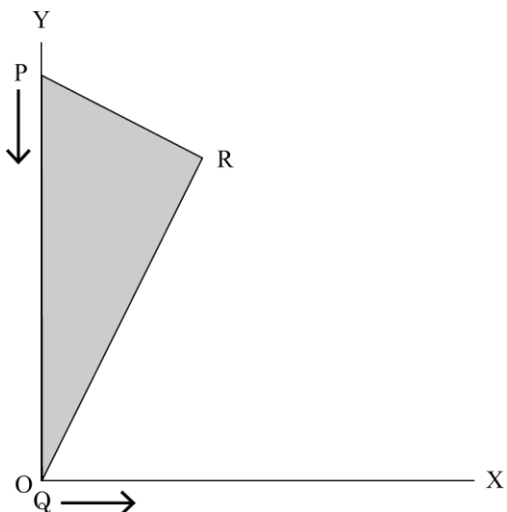


図 4

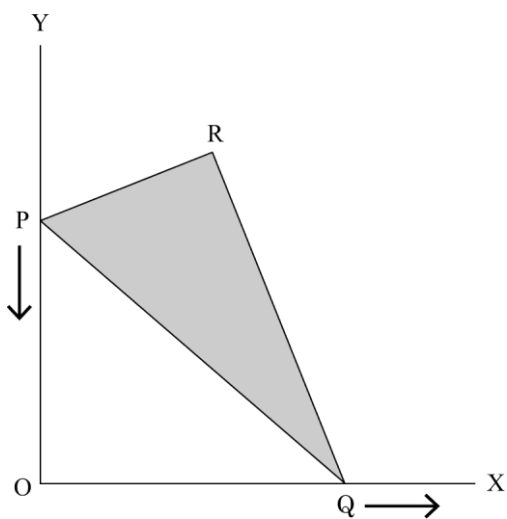
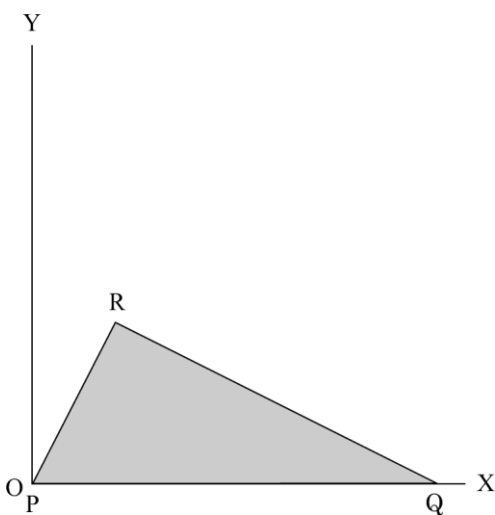


図 5



(1) に入る値を答えなさい。

(2) に入る， $\triangle PQR$ の辺はどれか，答えなさい。

(3) 下線部分について，リエさんの考え方を使って，図 4 で $\angle ROX$ の大きさが $\angle RPQ$ の大きさと等しくなることを証明しなさい。

(4) に入る値を求めなさい。

解答欄

問 1	cm	
問 2	(1)	
	(2)	
	(3)	〔証明〕
	(4)	〔求め方〕 答 cm

解答

問1 $2\sqrt{5}-4$ cm

問2

(1) 90

(2) PQ

(3)

〔証明〕

3点 P, O, Q を通る円をかくと, $\angle POQ=90^\circ$ だから, 辺 PQ はこの円の直径になる。3点 P, Q, R を通る円も PQ が直径になるので, 4点 P, O, Q, R は同じ円周上にあることがわかる。したがって, 円周角の定理から $\angle ROX=\angle RPQ$

(4)

〔求め方〕

線分 OR の長さが最も長くなるのは $\angle RQO=90^\circ$ になるときである。このときの頂点 P, Q, R をそれぞれ P', Q', R' とおく。

辺 PQ と半直線 OY が重なっているときの R を考えると

$RR'=2\sqrt{5}-4$ である。また, 辺 PQ と半直線 OX が重なっているときの R を R'' とおくと, $R'R''=2\sqrt{5}-2$

よって, 求める道のりは $2\sqrt{5}-4+2\sqrt{5}-2=4\sqrt{5}-6$

答 $4\sqrt{5}-6$ cm

解説

問1

$\triangle DBC$ は, $BC=2\text{cm}$, $DC=4\text{cm}$, $\angle BCD=90^\circ$ の直角三角形だから, 三平方の定理より,

$DB^2=BC^2+DC^2=2^2+4^2=20$ $DB>0$ より, $DB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(\text{cm})$

$\triangle ACD\equiv\triangle FBE$ より, $BE=CD=4\text{cm}$ だから, $DE=DB-BE=2\sqrt{5}-4(\text{cm})$

問2

(4)

頂点 R は, 右の図の直線 OR 上を R から R' へ動いた後, R' から R'' へ動く。

$\triangle ACD\equiv\triangle FBE$ であり, $\triangle PQR\equiv\triangle FBE$,

$\triangle P'Q'R'\equiv\triangle PQR$ だから, 問1より,

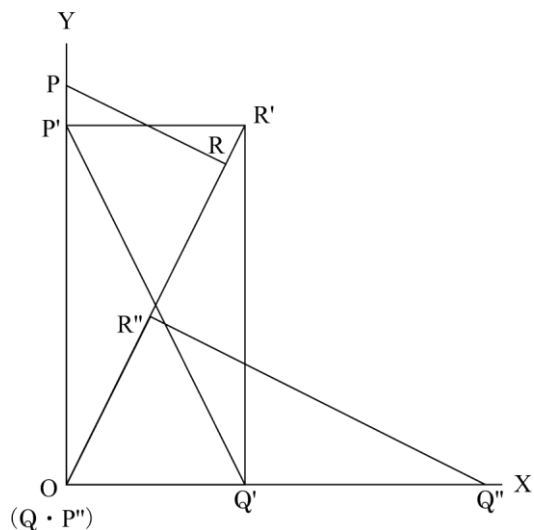
$RR'=DE=2\sqrt{5}-4(\text{cm})$

また, $OR'=DB=2\sqrt{5}(\text{cm})$, $\triangle P'Q'R''\equiv\triangle PQR$ より $P'R''=$

$PR=2\text{cm}$ だから, $R'R''=OR'-P'R''=2\sqrt{5}-2(\text{cm})$

よって, 頂点 R が動いた道のりは,

$RR'+R'R''=2\sqrt{5}-4+2\sqrt{5}-2=4\sqrt{5}-6(\text{cm})$

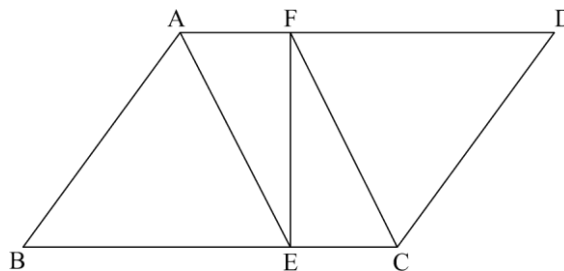


【問 6】

右の図のように，平行四辺形 $ABCD$ があり，辺 BC 上に点 E を， $BE : EC = 5 : 2$ となるようにとる。また，辺 AD 上に点 F を， $\angle AEF = \angle CFE$ となるようにとる。

このとき，次の問 1・問 2 に答えよ。

(京都府 2021 年度 前期)



問 1 四角形 $AECF$ は平行四辺形であることを証明せよ。

問 2 線分 AC と線分 EF との交点を G ，直線 AE と直線 CD との交点を H とするとき，四角形 $CGEH$ と平行四辺形 $ABCD$ の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問 1	
問 2	四角形 $CGEH$: 平行四辺形 $ABCD =$:

解答

問 1

四角形 AECF で

平行四辺形 ABCD において $AD \parallel BC$ であるから

$AF \parallel EC \cdots \textcircled{1}$

錯角 $\angle AEF$ と $\angle CFE$ が等しいから

$AE \parallel FC \cdots \textcircled{2}$

①, ②から

2 組の向かいあう辺が, それぞれ平行であるから, 四角形 AECF は平行四辺形である。

問 2 (四角形 CGEH : 平行四辺形 ABCD =) 9 : 70

解説

問 2

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において, 平行四辺形の 2 組の対辺はそれぞれ等しいので, $AB=CD$, $BC=DA$

共通な辺だから, $AC=CA$ より, 3 辺がそれぞれ等しいので, $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

よって, $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square ABCD$

$BE : EC = 5 : 2$ より, $\triangle AEC = \frac{2}{7} \triangle ABC = \frac{1}{7} \square ABCD$

AC , EF は $\square AECF$ の対角線なので, $AG=GC$ よって, $\triangle$

$GEC = \frac{1}{2} \triangle AEC = \frac{1}{14} \square ABCD$

$AB \parallel CH$ より, $AE : EH = BE : EC = 5 : 2$ よって, $\triangle ECH = \frac{2}{5} \triangle AEC = \frac{2}{35} \square ABCD$

(四角形 CGEH) $= \triangle GEC + \triangle ECH = \frac{1}{14} \square ABCD + \frac{2}{35} \square ABCD = \frac{9}{70} \square ABCD$

よって, (四角形 CGEH) : $\square ABCD = 9 : 70$

