9. 式の証明の問題（2015 年度出題）

【問 1】

右の図のようなカレンダーがあります。二重線で囲んだ数のように，右上から左ななめ下に並んだ 3 つの数を考えます。この 3 つの数のうち，真ん中の数の 2 乗から他の 2 つの数の積をひくと，常に一定の値となることを，次のように説明するとき，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる式を，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数を，それぞれ書きなさい。

（北海道　2015 年度）

日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(説明)

右上から左ななめ下に並んだ 3 つの数のうち，真ん中の数を n とすると，他の 2 つの数は，それぞれ n を使って，

$\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イ}}$

と表すことができる。

真ん中の数の 2 乗から他の 2 つの数の積をひいた式を，n を使って表すと，

$\boxed{\text{ウ}}$

となり，これを計算すると $\boxed{\text{エ}}$ となる。

したがって，真ん中の数の 2 乗から他の 2 つの数の積をひくと，

常に一定の値 $\boxed{\text{エ}}$ となる。

解答欄

ア	
イ	
ウ	
エ	

解答

ア　$n-6$

イ　$n+6$

ウ　$n^2-(n-6)(n+6)$　例

エ　36

解説

右上から左ななめ下に並んだ 3 つの数のうち真ん中の数を n とすると他の 2 つの数は，$n-6$，$n+6$ と表せる。

よって真ん中の数の 2 乗から他の 2 つの数の積をひいた式を n を使って表すと

$n^2-(n-6)(n+6)=n^2-(n^2-36)=36$

したがって真ん中の数の 2 乗から他の 2 つの数の積をひくと一定の値 36 になる。

【問 2】

健司さんと美咲さんは，次の《ルール》で，かけ算九九表の中から $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ のように，縦，横 2 つずつ並んだ 4 つの数を四角形の枠で囲み，囲んだ数の和の性質について考えた。

> 《ルール》
>
> 4 つの数を四角形の枠で囲むとき，左上の数 a は，かけられる数とかける数が等しくなるようにする。

次の問1～問3に答えなさい。

（秋田県　2015 年度）

問1　健司さんは，四角形の枠で囲んだ数の和の性質について，考えたことを説明した。[健司さんの説明 1]が正しくなるように，アには式を，イには数を書き，完成させなさい。

［健司さんの説明 1］

表　かけ算九九表の一部

かける数

かけられる数	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

表にある $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 6 \\ \hline 6 & 9 \\ \hline\end{array}$ は，左上の数 a が，かけられる数とかける数が 2 であるように囲んだ場合です。このとき，囲んだ数の和は，

$$a+b+c+d=4+6+6+9$$
$$=25$$
$$=5^2$$

次に $\begin{array}{|c|c|}\hline 25 & 30 \\ \hline 30 & 36 \\ \hline\end{array}$ と，a が，かけられる数とかける数が 5 であるように囲んだ場合，囲んだ数の和は，

$$a+b+c+d=\boxed{\text{ア}}$$
$$=\boxed{\text{イ}}^2$$

これらのことから，この《ルール》で囲んだとき，囲んだ数の和は奇数の 2 乗であるという性質が成り立ちそうです。

問2　[健司さんの説明　1]を聞いた美咲さんは，健司さんの予想した性質が成り立つことを文字を使って説明した。[美咲さんの説明]が正しくなるように，ウ，エ，カには式を，オには式をつくって計算の過程を，キには説明の続きを書き，完成させなさい。

[美咲さんの説明]

左上の数 a のかけられる数を m とすると，かける数も m であるから，$a=m^2$ と表すことができます。また，a と同じように右上の数 b，左下の数 c ，右下の数 d を m を使って表すと，b と c は等しい数となり，$b=c=$ $\boxed{\text{ウ}}$ ，$d=$ $\boxed{\text{エ}}$ となります。

$a+b+c+d$ を計算すると，

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\text{オ}\qquad\qquad\qquad}$$

$=(2\,m+1)^2$

m は自然数であるから，$2m+1$ は奇数になるので，四角形の枠で囲んだ数の和は奇数の 2 乗になることがわかります。

さらに，$(2m+1)^2=\left\{m+\left(\boxed{\text{カ}}\right)\right\}^2$ と表すことができるので，囲んだ数の和は，m からはじまる $\boxed{\qquad\text{キ}\qquad}$ の和の 2 乗になることがわかります。

問3　健司さんは，[美咲さんの説明]でわかった四角形の枠で囲んだ数の和の性質が，かけ算九九表を 10 の段，11 の段，…と広げた場合でも成り立つことに気づき，その性質を利用した。[健司さんの説明　2]が正しくなるように，ク，ケ，コに数を書き，完成させなさい。

[健司さんの説明 2]

囲んだ4つの数が

a	380
380	400

となる場合は，$a=$ $\boxed{\text{ク}}^2$ となり，

囲んだ数の和は，$\left(\boxed{\text{ク}}+\boxed{\text{ケ}}\right)^2$ になります。

また，四角形の枠で囲んだ数の和が 625 となるのは，左上の数が $\boxed{\text{コ}}^2$ のときです。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	
	エ	
	オ	
	カ	
	キ	
問3	ク	
	ケ	
	コ	

解答
問1
ア　$25+30+30+36$
イ　11
問2
ウ　$m(m+1)$
エ　$(m+1)^2$
オ
$m^2+m(m+1)+m(m+1)+(m+1)^2$
$=4m^2+4m+1$
カ　$m+1$
キ　連続する 2 つの自然数
問3
ク　19
ケ　20
コ　12
解説
問1
a がかけられる数とかける数が 5 であるように囲んだ数の和は
$a+b+c+d=25+30+30+36$
$=121$
$=11^2$
問2
a のかけられる数が m, かける数が m のとき
$a=m^2$, $b=c=m(m+1)$, $d=(m+1)^2$ と表せる。
よって $a+b+c+d$
$=m^2+2m(m+1)+(m+1)^2$
$=m^2+2m^2+2m+m^2+2m+1$
$=4m^2+4m+1$
$=(2m+1)^2$
$(2m+1)^2=\{m+(m+1)\}^2$ と表すことができるので
囲んだ数の和は m からはじまる連続する 2 つの自然数の和の 2 乗になることがわかる。
問3
$400=20^2$ より, $a=19^2$
よって囲んだ 4 つの和は$(19+20)^2$
また四角形の枠で囲んだ数の和が 625 となるのは
$625=25^2$ より
$m+m+1=25$
$m=12$
よって左上の数が 12^2 のとき。

【問 3】

ある中学校で，K さんが作った問題をみんなで考えた。

次の問いに答えよ。

（東京都　2015 年度）

先生は，［K さんが作った問題］をもとにして，次の問題を作った。

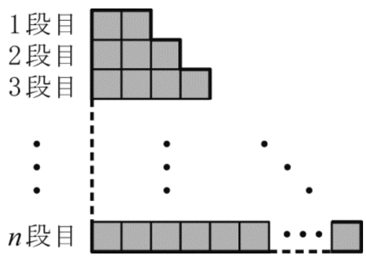
［先生が作った問題］

右の図2のように，1 段目に 2 枚，2 段目に 3 枚，3 段目に 4 枚と，1 辺の長さが 1 cm の正方形の紙を 1 枚ずつ増やし，n 段目まで隙間なく並べてできる図形を考える。

この図形の面積を T cm^2 とするとき，

$\mathrm{T}=\dfrac{1}{2}n(n+3)$ となることを示しなさい。

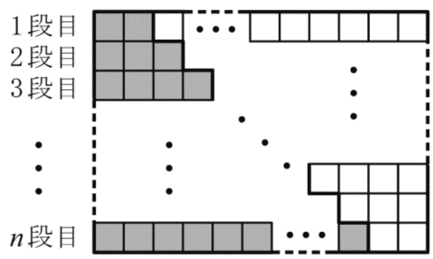
図2



［先生が作った問題］で，M さんは，自分の考え方を右のような図で表し，$\mathrm{T}=\dfrac{1}{2}n(n+3)$ となることを示した。

M さんの考え方を文章で表し，M さんの考え方を用いて，$\mathrm{T}-\dfrac{1}{2}n(n+3)$となることを示せ。

〈M さんの考え方を図で表したもの〉



解答欄

〔証明〕

T＝

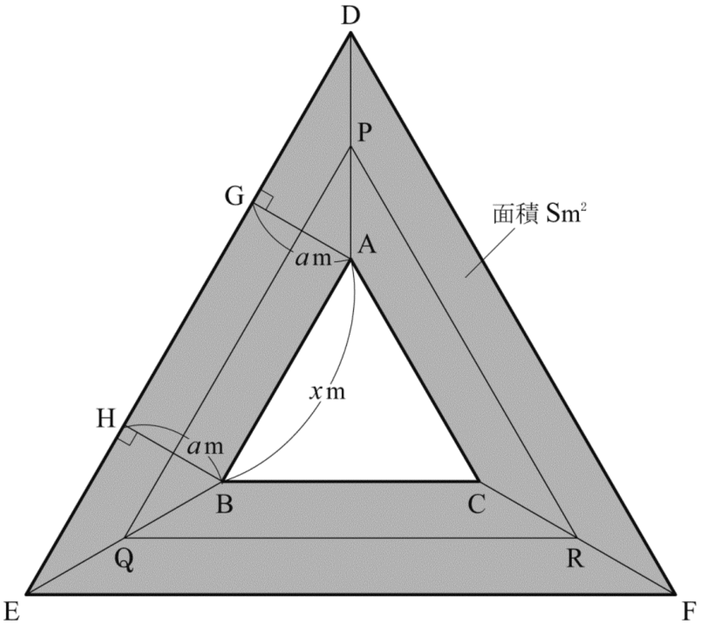
解答
〔証明〕
面積が T cm^2 の図形は
1 段増えると正方形の紙が 1 枚増えるから
2 つ組み合わせると
どの段も同じ枚数の紙が並んだ長方形となる。
この長方形の面積の $\frac{1}{2}$ 倍が T となる。
面積が T cm^2 の図形の各段の紙は(段の数＋1) 枚だから
n 段目は $(n+1)$ 枚となる。
したがって長方形の n 段目の紙は$\{(n+1)+2\}$枚となり
どの段も $(n+3)$ 枚となる。
正方形の紙の 1 辺の長さは 1 cm だから
長方形の直角をはさむ 2 辺の長さは n cm，$(n+3)$ cm となる。
よって $\mathrm{T}=n\times(n+3)\times\frac{1}{2}$
$\mathrm{T}=\frac{1}{2}n(n+3)$
解説
同じ図形を 2 つ組み合わせると
M さんの考えた縦に n 枚横に$(n+3)$枚の正方形の紙がしきつめられた長方形ができる。
この長方形の面積は T の 2 倍であることから説明する。

【問 4】

下の図のように，1 辺の長さが x m の正三角形 ABC の外側に正三角形 DEF があり，AB // DE，AC // DF，BC // EF，AD＝BE＝CF である。また，2 点 A，B から線分 DE に引いた垂線と線分 DE との交点をそれぞれ G，H とすると，AG＝BH＝a m である。

線分 AD，BE，CF の中点をそれぞれ P，Q，R とし，正三角形 PQR をつくる。△PQR の周の長さを ℓ m，△DEF の内側であり，△ABC の外側である部分の面積を S m^2 とするとき，次の問1，問2に答えなさい。

（新潟県　2015 年度）



問1　次の文中の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまる数を，それぞれ答えなさい。

> x＝4，a＝$\sqrt{3}$ のとき，
>
> DG＝EH＝ $\boxed{ア}$ m だから，DE＝ $\boxed{イ}$ m
>
> よって，S の値を計算すると，S＝ $\boxed{ウ}$
>
> また，ℓ の値を計算すると，ℓ ＝ $\boxed{エ}$
>
> したがって，S＝$a\ell$ が成り立つ。

問2　次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　ℓ を x と a を用いて表しなさい。

(2)　S＝$a\ell$ であることを証明しなさい。

解答欄

問1	ア		イ		ウ		エ	
問2	(1)	$\ell =$						
	(2)	〔証明〕						

解答
問1
ア 3
イ 10
ウ $21\sqrt{3}$
エ 21
問2
(1)　$\ell=3x+3\sqrt{3}\,a$
(2)
〔証明〕例
正三角形 DEF の面積は
$\frac{1}{2}\times(x+2\sqrt{3}\,a)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+3a\right)$
$=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+3\,ax+3\sqrt{3}\,a^2$ m^2
正三角形 ABC の面積は
$\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ m^2
よって S＝△DEF－△ABC
$=3ax+3\sqrt{3}\,a^2$…㋐
また $\ell=3x+3\sqrt{3}\,a$ より
$a\ell=3\,ax+3\sqrt{3}\,a^2$…㋑
したがって㋐，㋑より
$S=a\ell$
解説
問1
点 D から線分 EF に垂線をひき線分 BC 線分 EF との交点をそれぞれ U, V, AG と PQ の交点を X とする。
$x=4$, $a=\sqrt{3}$ のとき△DAG は∠DGA＝90°，∠DAG＝60°，∠GDA＝30°の直角三角形だから
AG:DG＝1: $\sqrt{3}$ より DG＝$\sqrt{3}$ AG＝$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$m
また△DAG≡△EBH だから DG＝EH＝3m，DE＝4＋3×2＝10m
△ABU は AB:AU＝2: $\sqrt{3}$ より AU＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$AB＝$\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$ m
同様に DV＝$\frac{\sqrt{3}}{2}\times10=5\sqrt{3}$ m
よって S＝△DEF－△ABC＝$\frac{1}{2}\times10\times5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=25\sqrt{3}-4\sqrt{3}=21\sqrt{3}$
AB // DE で AP＝PD，BQ＝QE より AB // PQ // DE よって PX:DG＝1:2
PX＝$\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$ m よって PQ＝$4+2\times\frac{3}{2}=7$m
$\ell=3\times7=21$　$a\ell=\sqrt{3}\times21=21\sqrt{3}$
よって $S=a\ell$ が成り立つ。
問2
(1)
DG＝$\sqrt{3}\,a$ m
PX＝$\frac{1}{2}$DG＝$\frac{\sqrt{3}}{2}a$　$\ell=3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}a\times2\right)=3x+3\sqrt{3}\,a$
(2)
S＝△DEF－△ABC
$=\frac{1}{2}\times(x+2\sqrt{3}\,a)\times\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2\sqrt{3}\,a)-\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+3ax+3\sqrt{3}\,a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=3ax+3\sqrt{3}\,a^2$
また(1)より $a\ell=a(3x+3\sqrt{3}\,a)=3ax+3\sqrt{3}\,a^2$
よって $S=a\ell$

【問 5】

2 つの奇数の積は奇数であることを，A さんは次のように証明した。

【A さんの証明】

n を整数とすると，2 つの奇数は $2n+1$，$2n+3$ と表される。 このとき，2 つの奇数の積は， $(2n+1)(2n+3)=4n^2+8n+3$ $\qquad\qquad\qquad\;=2(2n^2+4n+1)+1$ $2n^2+4n+1$ は整数だから，これは奇数である。 よって，2 つの奇数の積は奇数である。

このとき，次の問いに答えよ。

（福井県　2015 年度）

問1　A さんの証明は正しくない。その理由を書け。

〔理由〕

問2　2 つの奇数の積は奇数であることを証明せよ。

〔証明〕

解答欄
解答は問題文中の枠に書きなさい。
解答
問1
〔理由〕
A さんの証明は連続する 2 つの奇数の場合のみを示していて
すべての場合を証明してはいないから。
問2
〔証明〕
2 つの奇数は整数 m, n を使って $2m+1$, $2n+1$ で表される。
このとき 2 つの奇数の積は

$$(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1$$
$$=2(2mn+m+n)+1$$

$2mn+m+n$ は整数だからこれは奇数である。
よって 2 つの奇数の積は奇数である。
解説
問1
$2n+1$ と $2n+3$ は連続する 2 つの奇数だから
連続する 2 つの奇数の場合のみ成り立つことを 証明している。
すべての 2 つの奇数について成立するかどうかはいえない。
問2
2 つの奇数を文字を使って表しその積を求める。
本問では m, n を整数とし 2 つの奇数を $2m+1$, $2n+1$ と表して証明している。

【問 6】

n を整数とする。連続する 2 つの奇数のうち，小さい数を $2n+1$ とするとき，大きい数を n を用いて表しなさい。

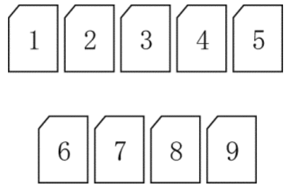
（長野県　2015 年度）

解答欄

解答
$2n+3$
解説
連続する 2 つの奇数のうち小さい数が $2n+1$ のとき
大きい数はそれよりも 2 大きいので $2n+1+2=2n+3$

【問 7】

右の図のように，1 から 9 までの数が書かれたカードが 1 枚ずつある。この中から 3 枚のカードを 1 枚ずつ取り出し，そのカードに書かれた数を，取り出した順に百の位，十の位，一の位として 3 けたの整数をつくる。また，その整数の百の位と一の位の数を入れかえて別の整数をつくる。この 2 つの整数のうち，値が大きい方を M，小さい方を N とすると，$M-N$ は必ず 99 の倍数になる。このことを，M の百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c として証明せよ。



（京都府　2015 年度　前期）

解答欄

解答
条件より $M=100a+10b+c$ と表される。
また $N=100c+10b+a$ と表される。
このとき $M-N=(100a-10b+c)-(100c+10b+a)$
$=99(a-c)$
$a-c$ は整数だから
$99(a-c)$は 99 の倍数である。
つまり $M-N$ は 99 の倍数である。
解説
それぞれ $M=100a+10b+c$，$N=100c+10b+a$ と表せる。
$M-N=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99a-99c=99(a-c)$
$a-c$ は整数だから $99(a-c)$は 99 の倍数である。
よって $M-N$ は必ず 99 の倍数になる

【問 8】

次のア～エの式のうち，十の位の数が x，一の位の数が y である 2 けたの自然数を表しているものはどれですか。一つ選び，記号を○で囲みなさい。

（大阪府　2015 年度　前期）

ア　$x+y$　　　イ　$10x+y$　　　ウ　xy　　　エ　$10xy$

解答欄

ア　イ　ウ　エ

解答
イ
解説
十の位が x，一の位が y の 2 けたの自然数は
$10\times x+y=10x+y$
よって選択肢はイ

【問 9】

連続する五つの自然数の和が 2015 になるとき，この五つの自然数のうちの最大の自然数を求めなさい。

（大阪府　2015 年度　後期）

解答欄

解答
405
解説
連続する五つの自然数を $x-2$，$x-1$，x，$x+1$，$x+2$ とする。
この和が 2015 より
$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=2015$
$5x=2015$
$x=403$
よって最大の数は $403+2=405$

【問 10】

サッカーの試合を何チームかで行い，次のルールにしたがって順位をつける。

＜ルール＞

1 自分のチーム以外のすべてのチームと 1 試合ずつ対戦する。(総当たり方式)

2 試合に勝ったチームには 3 点，負けたチームには 0 点，引き分けたチームには 1 点を勝ち点として与える。

3 勝ち点の合計の大きいチームの順位が上位で，勝ち点の合計が等しい場合は同じ順位とする。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県　2015 年度）

問1　A, B, C, D の 4 チームで試合を行い，すべての対戦が終了した。勝ちを○，負けを×，引き分けを△として勝敗を表1にまとめ，順位などの結果を表2にまとめた。表1を見ると，B は A に負け，C に勝ち，D と引き分けたことがわかる。表2の ① ～ ③ にあてはまる数を求めなさい。

表1

	対戦チーム			
	A	B	C	D
A		○	△	○
B			○	△
C	△			
D				

表2

チーム	勝ち試合の数	負け試合の数	引き分け試合の数	勝ち点の合計	順位
A	2	0	1	7	1
B	1	1	1	4	2
C	1			②	③
D	①				

問2　A, B, C, D, E, F の 6 チームで試合を行い，すべての対戦が終了した。この結果を表3，表4にまとめたい。次の情報ア～オがわかっているとき，あとの問いに答えなさい。

ア　順位は A が 1 位，B, C, D が 2 位，E, F が 5 位であった。

イ　A の勝ち点の合計は 9 であった。

ウ　A は負け試合の数が他のどのチームよりも少なかった。

エ　B, C, D は引き分け試合の数が等しく，0 ではなかった。

オ　E, F は引き分け試合の数が 0 であった。

(1)　表4の中の a, b, c の値を求めなさい。

(2)　表4の中の x, y, z の値を求めなさい。

表3

	対戦チーム					
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

表4

チーム	勝ち試合の数	負け試合の数	引き分け試合の数	勝ち点の合計	順位
A	a	b	c	9	1
B	x		y		2
C			y		2
D			y		2
E	z		0		5
F			0		5

解答欄

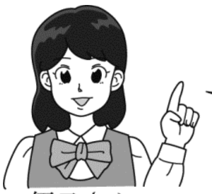
問1	①	
	②	
	③	
問2	(1)	$a=$
		$b=$
		$c=$
	(2)	$x=$
		$y=$
		$z=$

解答
問1
① 0
② 4
③ 2
問2
(1)
$a=2$
$b=0$
$c=3$
(2)
$x=2$
$y=1$
$z=2$
解説
問1
C が勝ち数 1 なので C と D との対戦は C が勝って D が負けたことがわかる。
これより
① 0
② $3+0+1=4$
③ D の勝ち点が 1 点より C の順位は B と同じ 2 位。
問2
(1)
A は 5 試合の勝ち点の合計が 9 点より $3+3+1+1+1=9$ または $3+3+3+0+0=9$
勝ちが 2 回引き分け 3 回とすると負けが 0 回になる。
勝ちが 3 回負けが 2 回とすると引き分けが 0 回になる。
それぞれの場合について負けの回数が
A が他のどのチームよりも少ないことや順位から問題に合うものを選ぶと
$a=2$
$b=0$
$c=3$
(2)
$a=2,\ b=0,\ c=3$ のとき
引き分けの試合数の合計は偶数になるので y は奇数になる。
$y=1$ とすると勝負のついた試合の数は $15-3=12$ $2+3x+2z=12$ $3x+2z=10$
順位と負け試合の回数が
A が他のどのチームよりも少ないことからあてはまるものを考えると
$x=2$
$z=2$
順に $y=3,\ y=5$ と考えても問題に合うものはない。
よって $x=2,\ y=1,\ z=2$

【問 11】

優子さんは，数学の授業で数の規則性についての話を聞いて興味をもち，自然数のうち 4，8，12 のような，3 つの連続する 4 の倍数について調べた。その結果から，優子さんは次のような予想をした。＜優子さんの予想＞を読み，問1～問3に答えなさい。

（岡山県　2015 年度　特別）



優子さん

＜優子さんの予想＞

3つの連続する4の倍数の和は，6の倍数になる。

問1　＜優子さんの予想＞が正しいことは，次のように説明できる。 $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(3)}$ に適当な式を書き入れなさい。

> n は自然数とし，3 つの連続する 4 の倍数のうち，最も小さい数を 4 n とおくと，
> 中央の数は $\boxed{(1)}$ ，最も大きい数は $\boxed{(2)}$ と表すことができる。
> したがって，3 つの連続する 4 の倍数の和は，
> $4n+\boxed{(1)}+\boxed{(2)}=6(\boxed{(3)})$
> $\boxed{(3)}$ は整数だから，3 つの連続する 4 の倍数の和は，6 の倍数である。

問2　さらに優子さんは，3 つの連続する 4 の倍数の和から，その 3 つの数の組み合わせを求める方法を考えた。＜優子さんの考え＞の $\boxed{(4)}$ に当てはまるものとして最も適当なのは，ア～エのうちではどれですか。一つ答えなさい。また， $\boxed{(5)}$ に当てはまる数を書き入れなさい。

＜優子さんの考え＞

> 3 つの連続する 4 の倍数の和は，3 つの連続する 4 の倍数の $\boxed{(4)}$ の 3 倍になります。したがって，和を 3 で割ることで，3 つの連続する 4 の倍数の $\boxed{(4)}$ を求めることができます。
> さらに，そこから他の 2 つの数も求めることができます。例えば，和が 372 である 3 つの連続する 4 の倍数のうち，最も大きい数は $\boxed{(5)}$ となります。

ア　積　　　イ　最も小さい数　　　ウ　中央の数　　　エ　最も大きい数

問3　優子さんは，右の表のように，3 つの連続する 4 の倍数とその和を書きあげるうちに，和がある自然数の 2 乗になる組み合わせがあり，そのうち 8，12，16 の和が最も小さいことに気づいた。
和が自然数の 2 乗になる 3 つの連続する 4 の倍数の組み合わせのうち，2 番目に和が小さい組み合わせを求め，その中央の数を答えなさい。

表

3 つの連続する 4 の倍数の組み合わせ	和
4，8，12	$4+8+12=24$
8，12，16	$8+12+16=36=6^2$
12，16，20	$12+16+20=48$

解答欄

問1	(1)	
	(2)	
	(3)	
問2	(4)	
	(5)	
問3		

解答
問1
(1)　$4n+4$
(2)　$4n+8$
(3)　$2n+2$
問2
(4)　ウ
(5)　128
問3　48
解説
問1
n を自然数とし 3 つの連続する 4 の倍数のうち
最も小さい数を $4n$ とおくと中央の数は $4n+4$ 最も大きい数は $4n+8$ と表すことができる。
したがって 3 つの連続する 4 の倍数の和は
$4n+4n+4+4n+8=12n+12=6(2n+2)$
$2n+2$ は整数だから $6(2n+2)$は 6 の倍数である。
よって 3 つの連続する 4 の倍数の和は，6 の倍数である。
問2
3 つの連続する 4 の倍数の和は $12n+12=3(4n+4)$ より
3 つの連続する 4 の倍数の中央の数の 3 倍になっている。
よって和が 372 のとき $372=3\times124$ より
3 つの連続する 4 の倍数のうち最も大きい数は $124+4=128$
問3
3 つの連続する 4 の倍数の和は $12n+12=2^2\times3\times(n+1)$ より
和がある数の 2 乗になるとき $n+1$ は $3\times(\text{自然数})^2$ になる。
よって最も和が小さいのは自然数が 1 のときで
2 番目に和が小さくなるのは自然数が 2 のときである。
このとき $n+1=3\times2^2=12$
よって $n=11$ だから
3 つの連続する 4 の倍数の中央の数は $4\times11+4=48$

【問 12】

連続する 3 つの整数を小さい順に a, b, c とします。このとき，c^2-4b は a^2 となります。このわけを，a を使った式を用いて説明しなさい。

（広島県　2015 年度）

解答欄

解答
a, b, c は連続する 3 つの整数であるから
$b=a+1$, $c=a+2$ と表すことができる。
$c^2-4b=(a+2)^2-4(a+1)=(a^2+4a+4)-(4a+4)=a^2$ であるから
c^2-4b は a^2 となる。
解説
問題文の条件より
$b=a+1$, $c=a+2$ と表せる。
$c^2-4b=(a+2)^2-4(a+1)=a^2+4a+4-4a-4=a^2$ より
$c^2-4b=a^2$ となる。

【問 13】

S さんと T さんは，11 の倍数の性質について調べた。次は，そのときの 2 人の会話のようすである。これを読んで，下の問1～問3に答えなさい。

（山口県 2015 年度）

S さん：「<u>3 けたの整数で，百の位の数と十の位の数を，それぞれ十の位の数，一の位の数とした 2 けたの整数から，もとの 3 けたの整数の一の位の数をひいた差が 11 の倍数ならば，もとの 3 けたの整数は 11 の倍数である</u>」ことがわかったよ。

T さん：わかりやすく教えてくれないかな。

S さん：例えば，253 で説明するね。メモのように，25 から 3 をひいた差が 22 で，22 は 11 の倍数だから，253 は 11 の倍数になるよ。

メモ

2 5 3

25 − 3 ＝ 22

11の倍数

T さん：それなら，メモと同じようにして，3 けたの整数 $\boxed{\text{ア}}$ で試してみるね。

$\boxed{\text{ア}}$ の百の位の数と十の位の数を，それぞれ十の位の数，一の位の数とした 2 けたの整数から，$\boxed{\text{ア}}$ の一の位の数をひいた差は 77。この 77 は 11 の倍数だから，

$\boxed{\text{ア}}$ は 11 の倍数になるはずだね。

S さん：そうだよ。今，話したことを文字を使って，ノートに書きながら説明しよう。

＜下線部について，S さんが説明するときに書いたノートの一部＞

3 けたの整数を M とする。
M の百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とすると

$M = 100a + 10b + c$ ……①

と表される。
また，M の百の位の数と十の位の数を，それぞれ十の位の数，一の位の数とした 2 けたの整数から，M の一の位の数をひいた差が 11 の倍数ならば，
n を整数として

$\boxed{\text{イ}} - c = 11n$ ……②

と表される。
②から

$c = \boxed{\text{イ}} - 11n$ ……③

①，③から

$M = 11(\boxed{\text{イ}} - n)$

$\boxed{\text{イ}} - n$ は整数だから，$11(\boxed{\text{イ}} - n)$ は 11 の倍数である。
したがって，もとの 3 けたの整数 M は 11 の倍数である。

問1 $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる3けたの整数のうち，800以下の奇数を求めなさい。

問2 $\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる式を a，b を使って表しなさい。

問3 Tさんは，11の倍数の性質についてさらに調べ，次のことがわかった。

> 3けたの整数で，百の位の数と一の位の数の和が，十の位の数と等しいならば，この3けたの整数は11の倍数である。

このことを，3けたの整数を M，M の百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c として，説明しなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	〔説明〕

解答
問1　781
問2　$10a+b$
問3
〔説明〕
3 けたの整数 M は $M=100a+10b+c$…①
と表される。
また M の百の位の数と一の位の数の和が十の位の数と等しいならば
$a+c=b$…②
と表される。
①, ②から
$M=100a+10(a+c)+c$
$\quad=100a+10a+10c+c$
$\quad=110a+11c$
$\quad=11(10a+c)$
$10a+c$ は整数だから $11(10a+c)$は 11 の倍数である。
したがってこの 3 けたの整数 M は 11 の倍数である。
解説
問1
3 けたの整数を $100a+10b+c$ とすると
百の位を十の位，十の位を一の位にした整数は
$10a+b$
$10a+b-c=77$ で
$100a+10b+c$ は 800 以下の奇数より
$a=7$
c は奇数で $b-c=7$ より
$b=8$
$c=1$
よって 3 けたの整数は 781
問2
3 けたの整数を $100a+10b+c$ とすると
百の位を十の位，十の位を一の位にした整数は $10a+b$
問3
3 けたの整数を $100a+10b+c$ とすると
百の位と一の位の和が十の位の数と等しいので $b=a+c$
これより $100a+10b+c=100a+10(a+c)+c=100a+10a+10c+c=110a+11c=11(10a+c)$
$10a+c$ は整数だから $11(10a+c)$は 11 の倍数である。

【問 14】

まさとさんは，右のように，縦 5 つ，横 5 つのマス目の中に，左上から順に右へ 5 つずつ，1 から 25 までの整数を書き並べた表をつくった。この表をもとに，この表の中に並んでいる数について，どんなきまりがあるかを予想し，このことについて，文字式を使って証明した。次は，まさとさんがまとめたノートの一部である。このとき，下の問1・問2に答えなさい。

（高知県　2015 年度　A）

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

まさとさんのノート

表の中の，縦，横 2 つずつの正方形の形に並んでいる 4 つの整数において，下 2 つの数の積から上 2 つの数の積をひくと，

例 1 の 4 つの数 1，2，6，7 では，40

例 2 の 4 つの数 2，3，7，8 では，50

となった。

このことから，<u>下 2 つの数の積から上 2 つの数の積をひくと，その差は 10 の倍数になる</u>と予想できる。

例1

1	2
6	7

例2

2	3
7	8

【予想したことの証明】

正方形の形に並んだ 4 つの整数について，左上の数を整数 n とすると，右上の数は $\boxed{\text{ア}}$ ，左下の数は $\boxed{\text{イ}}$ ，右下の数は $\boxed{\text{ウ}}$ と表される。このとき，

$\boxed{\quad\text{エ}\quad}$

問1 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる文字式をそれぞれ書け。

問2 $\boxed{\text{エ}}$ には，証明の続きが入る。$\boxed{\text{エ}}$ に入る内容を，言葉と式を使って書け。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

解答
問1
ア　$n+1$
イ　$n+5$
ウ　$n+6$
問2
下 2 つの数の積から上 2 つの数の積をひいた差を n を用いて表すと
$(n+5)(n+6)-n(n+1)$
$=n^2+11n+30-n^2-n$
$=10n+30$
$=10(n+3)$
n は整数なので $n+3$ も整数となり $10(n+3)$は 10 の倍数である。
したがって下 2 つの数の積から上 2 つの数の積をひくとその差は 10 の倍数になる。
解説
問1
左上の数を n とすると右上の数は $n+1$, 左下の数は $n+5$, 右下の数は $n+6$ と表せる。
問2
下 2 つの数の積から上 2 つの数の積をひくと
$(n+5)(n+6)-n(n+1)=n^2+11n+30-n^2-n=10n+30=10(n+3)$
$n+3$ は整数より $10(n+3)$ は 10 の倍数である。
よって 4 つの整数について下 2 つの数の積から上 2 つの数の積をひくとその差は 10 の倍数になる。

【問 15】

異なる 2 つの奇数において，大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は，4 でわりきれることの証明を完成せよ。

（福岡県　2015 年度）

解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕例

整数 m，n を使って大きい方の奇数を 2 $m+1$，小さい方の奇数を $2n+1$ とする。

大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は

$(2m+1)^2-(2n+1)^2$

$=(4m^2+4m+1)-(4n^2+4n+1)$

$=4m^2+4m-4n^2-4n$

$=4(m^2+m-n^2-n)$

m^2+m-n^2-n は整数だから $4(m^2+m-n^2-n)$ は 4 でわりきれる。

したがって，大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の 2 乗をひいた差は，4 でわりきれる。

解説

m，$n(m>n)$ を整数とすると

異なる 2 つの奇数を $2m+1$，$2n+1$ と表し

大きい方の奇数の 2 乗から小さい方の奇数の2乗をひいた式を 4×(整数)の形にして 4 で割り切れることを示す。

【問 16】

2 けたの正の整数 X と Y がある。整数 X は，十の位の数が a，一の位の数が b であり，整数 Y は，十の位の数が b，一の位の数が a である。ただし，$a<b$ とする。

このとき，問1～問4に答えなさい。

（佐賀県　2015 年度　一般）

問1　2 つの整数 X と Y の積 XY を a，b を用いて表しなさい。

問2　$ab=6$，$a^2+b^2=37$ のとき，積 XY の値を求めなさい。

問3　問2のとき，整数 X を求めなさい。

問4　積 XY が 2268 のとき，整数 X を求めなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	
問4	

解答
問1　$10a^2+101ab+10b^2$
問2　976
問3　16
問4　36
解説
問1
$X=10a+b$, $Y=10b+a$ と表すことができる。
よって $XY=(10a+b)(10b+a)=100ab+10a^2+10b^2+ab=10a^2+101ab+10b^2$
問2
$XY=10a^2+101ab+10b^2=10a^2+10b^2+101ab=10(a^2+b^2)+101ab$
$ab=6$
$a^2+b^2=37$ を代入すると
$10\times37+101\times6=976$
問3
$976=2^4\times61$
X, Y は十の位と一の位が入れ替わる 2 けたの整数だから
2 つの積は 16×61
$a<b$ より
$a=1$
$b=6$
$X=16$
問4
$XY=(10a+b)(10b+a)=100ab+10(a^2+b^2)+ab$
これが 2268 となるとき一の位が 8 より
ab の積の一の位は 8
よって $a<b$ より
$(a, b)=(1, 8), (2, 4), (2, 9), (3, 6), (4, 7), (6, 8)$
　$2268=2^2\times3^4\times7$ より $10a+b$ または $10b+a$ は 7 の倍数になるので
$(a, b)=(2, 4), (3, 6)$
$(a, b)=(2, 4)$のとき XY の値は $24\times42=2^4\times3^2\times7$ となる。
また$(a, b)=(3, 6)$のとき XY の値は $36\times63=2^2\times3^4\times7$
よって$(10a+b)(10b+a)=2268$ となるのは
$(a, b)=(3, 6)$のときで 36

【問 17】

次の会話は，連続する 5 つの自然数について，中学生のゆうかさんと兄である高校生のけんじさんが交わしたものである。

会話を読んで，問1～問3に答えなさい。

（大分県 2015 年度）

けんじさん：今から，数あてをするよ。

連続する 5 つの自然数を何でもいいから頭に思い浮かべてみて。

ゆうかさん：思い浮かべたわ。

けんじさん：その 5 つの自然数のうち，もっとも大きい自然数と 2 番目に大きい自然数の積からもっとも小さい自然数と 2 番目に小さい自然数の積をひいてみて。

計算が終わったら，その結果を教えて。

ゆうかさん：計算結果は，42 になったわ。

けんじさん：ということは，ゆうかが思い浮かべた連続する 5 つの自然数は，5，6，7，8，9 だね。

ゆうかさん：どうしてわかったの？

けんじさん：連続する 5 つの自然数について，いつでも成り立つことがらを利用したんだ。

たとえば，連続する 5 つの自然数として，2，3，4，5，6 を考えた場合，もっとも大きい自然数と 2 番目に大きい自然数の積からもっとも小さい自然数と 2 番目に小さい自然数の積をひくと，「$6\times5-2\times3=24$」となるよね。

10，11，12，13，14 の場合は，「$14\times13-10\times11=72$」だ。

ゆうかの計算結果やこれらの計算結果と，それぞれの場合の真ん中の自然数との関係を調べると，連続する 5 つの自然数について，何か成り立つことがらを予想できないかな？

ゆうかさん：えーっと，次のように予想できるわ。

［ゆうかさんの予想］

連続する 5 つの自然数について，もっとも大きい自然数と 2 番目に大きい自然数の積からもっとも小さい自然数と 2 番目に小さい自然数の積をひいた差は，真ん中の自然数の $\boxed{ア}$ 倍になる。

けんじさん：うん。ゆうかの予想は正しいよ。ぼくも，ゆうかが予想したことがらを利用して，連続する 5 つの自然数をあてることができたんだ。

ゆうかの予想したことがらが，いつでも成り立つことを，連続する 5 つの自然数のうち，もっとも小さい自然数を n として，説明してごらん。

問1　会話の中で，けんじさんが言ったように，［ゆうかさんの予想］はいつでも成り立つ。

会話の中の $\boxed{ア}$ に適する数を入れ，［ゆうかさんの予想］を完成させなさい。

問2　下の［説明］は，会話の中の［ゆうかさんの予想］がいつでも成り立つことを，連続した 5 つの自然数のうち，もっとも小さい自然数を n として説明したものである。

下の $\boxed{イ}$ に続きを書き，［説明］を完成させなさい。

［説明］

連続する 5 つの自然数のうち，もっとも小さい自然数を n とすると，

問3　ゆうかさんは，けんじさんから教えてもらったことを参考にして，連続する 5 つの奇数について成り立つことがらを見つけて，友人のひろ子さんに，次の質問をした。

［ゆうかさんがひろ子さんにした質問］

連続する 5 つの奇数を頭に思い浮かべてください。

その 5 つの奇数のうち，もっとも大きい奇数と 2 番目に大きい奇数の積からもっとも小さい奇数と 2 番目に小さい奇数の積をひいて，その計算結果を教えてください。

ひろ子さんからは，「計算結果は，156 になったわ。」と返事があった。

ひろ子さんの計算結果が正しいものとして，ひろ子さんが思い浮かべた連続する 5 つの奇数を小さい順に書きなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td>ア</td><td>倍</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">〔説明〕
連続する5つの自然数のうち，もっとも小さい自然数を n とすると，
イ</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">ひろ子さんが思い浮かべた連続する5つの奇数
，　，　，　，</td></tr>
</table>

解答
問1
ア　6倍
問2
〔説明〕
連続する5つの自然数のうちもっとも小さい自然数を n とすると
連続する5つの自然数は小さい方から順に n，$n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$ と表すことができる。
このときもっとも大きい自然数と2番目に大きい自然数の積から
もっとも小さい自然数と2番目に小さい自然数の積をひいた差は
$(n+4)(n+3)-n(n+1)$
$=n^2+7n+12-n^2-n$
$=6n+12$
$=6(n+2)$
となるから真ん中の自然数の6倍である。
したがってもっとも大きい自然数と2番目に大きい自然数の積から
もっとも小さい自然数と2番目に小さい自然数の積をひいた差は
真ん中の自然数の6倍になる。
問3
ひろ子さんが思い浮かべた連続する5つの奇数
9，11，13，15，17
解説
問1
連続する5つの自然数が2，3，4，5，6のとき $6\times5-2\times3=24=4\times6$
連続する5つの自然数が10，11，12，13，14のとき $14\times13-10\times11=72=12\times6$
よって真ん中の数の6倍になると予想される。
問2
連続する5つの自然数のうちもっとも小さい自然数を n として
連続する5つの自然数を表すと n，$n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$ と表せる。
このときもっとも大きい自然数と2番目に大きい自然数の積は $(n+4)(n+3)$
小さい自然数と2番目に小さい自然数の積は $n(n+1)$ となり
その積の差は $(n+4)(n+3)-n(n+1)=n^2+7n+12-n^2-n=6n+12=6(n+2)$
$n+2$ は真ん中の大きさの自然数だから積の差の6倍になると説明できる。
問3
連続する5つの奇数を $2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$，$2n+7$ とする。
もっとも大きい奇数と2番目に大きい奇数の積からもっとも小さい奇数と2番目に小さい奇数の積をひくと
$(2n+7)(2n+5)-(2n-1)(2n+1)=4n^2+24n+35-4n^2+1=24n+36=12(2n+3)$
よって真ん中の数の12倍になるから
計算結果が156のとき $156\div12=13$ より
連続する5つの奇数は9，11，13，15，17