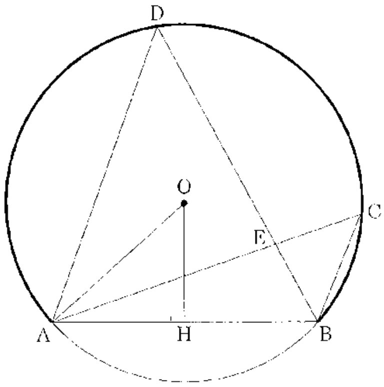
5．合同･相似以外の証明･その他複合問題【2009 年度出題】

【問 1】

図のように，半径 OA が 9 cm の円 O に，弦 AB を点 O からの距離が 6 cm となるようにひきます。また，太い線で表した$\overset{\frown}{AB}$上に，点 C，D を，BC＝6 cm，BC // AD となるようにとります。さらに，点 O から弦 AB にひいた垂線と AB との交点を H，線分 AC と線分 BD との交点を E とします。

あとの(1)～(3)の問いに答えなさい。

（宮城県　2009 年度）



(1)　△EBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。

(2)　点 B から線分 AC に垂線をひき，その交点を I とします。線分 BI の長さを求めなさい。

(3)　線分 AC と線分 OH との交点を F とし，点 B と点 F を結ぶ線分をひきます。△BEF の周の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm
(3)	cm

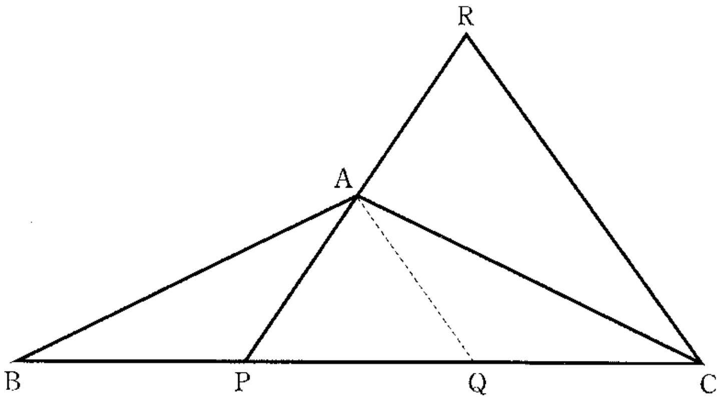
解答
(1)
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$に対する円周角は等しいから
∠ADB＝∠ACB
平行線の錯角は等しいから
∠ADB＝∠DBC
よって∠DBC＝∠ACBより
∠EBC＝∠ECB
したがって△EBCにおいて，2つの角が等しいから
△EBCは二等辺三角形である。
(2) $2\sqrt{5}$ cm
(3) $4\sqrt{10}+4$ cm
解説
問3
(2)
△OAHにおいて
三平方の定理より AH＝$\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$ cm
△AOHと△BCIにおいて
∠AHO＝∠BIC＝90°…①
OBを結ぶ。
△OABはOA＝OBの二等辺三角形で，OH⊥ABだから
∠AOH＝∠BOH＝$\frac{1}{2}$∠AOB
円周角の定理より
∠AOB＝2∠ADB＝2∠ACB
よって∠AOH＝∠ACB…②
①，②より
2組の角がそれぞれ等しいので
△AOH∽△BCI
したがってOA:CB＝AH:BI
$9:6=3\sqrt{5}:\mathrm{BI}$
BI＝$2\sqrt{5}$ cm
(3)
FB＝FA，EB＝ECだから
FB＋FE＋EB＝FA＋FE＋EC＝AC＝AI＋IC
三平方の定理より
△ABIにおいて
AI＝$\sqrt{(6\sqrt{5})^2-(2\sqrt{5})^2}=4\sqrt{10}$ cm
△BCIにおいて
IC＝$\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$cm
よって△BEFの周の長さは$4\sqrt{10}+4$cm

【問 2】

図のように，AB＝AC である二等辺三角形 ABC がある。辺 BC を 3 等分する 2 点を点 B に近い方からそれぞれ P，Q とする。線分 PA の延長上に点 R を PA＝AR となるようにとる。このとき，RP＝RC であることを次のように証明した。

次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2009 年度）



証明

△ABP と△ACQ において，

△ABC が AB ＝ AC の二等辺三角形だから，

AB＝AC　…①

∠ABP＝∠ACQ　…②

点 P，Q は辺 BC を 3 等分する点だから，

BP＝ ア 　…③

①，②，③から， イ ので，

△ABP≡△ACQ

対応する辺だから，AP＝AQ　…④

ウ

問1． ア にはあてはまる線分を表す記号を， イ にはあてはまる三角形の合同条件をそれぞれ書きなさい。

問2． ウ には証明の続きを書き，RP＝RC であることの証明を完成させなさい。ただし，(証明) の中の①～④で示されている関係を使う場合は，①～④の番号を用いてもよい。また新たな関係に番号をつける場合は，⑤以降の番号を用いなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	

解答
問1
ア　CQ
イ　2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい
問2
ウ
△PCR において
点 Q, A はそれぞれ辺 PC, PR の中点なので
中点連結定理から RC＝2AQ…⑤
また, PA＝AR より RP＝2AP…⑥
④, ⑤, ⑥から
RP＝RC
解説
問2
△PRC において
PA＝AR, PQ＝QC だから
中点連結定理より RC＝2AQ
また RP＝PA＋AR＝2AP＝2AQ
よって RP＝RC

【問 3】

図 1 のような，縦と横の長さの比が 1: $\sqrt{2}$ の長方形 ABCD を，次の①～③のように折ります。

図 1

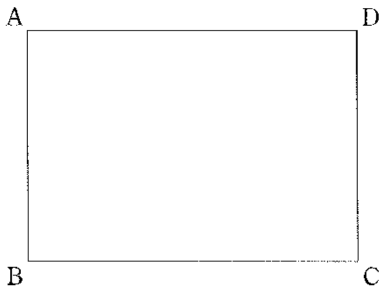


図 2

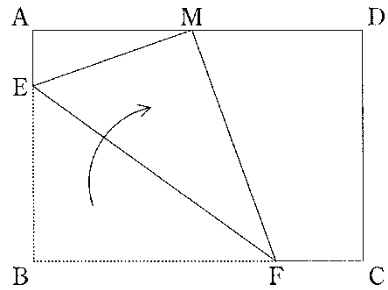


図 4

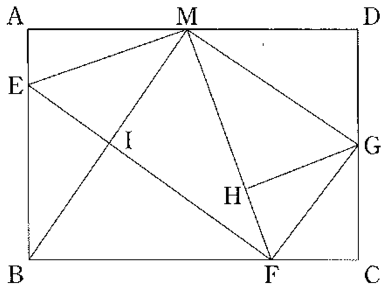
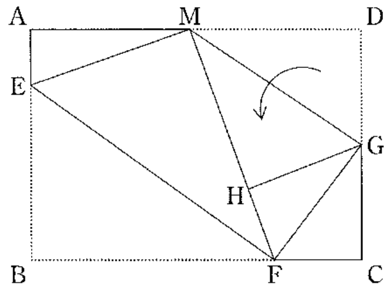


図 3



① 図 2 のように，辺 AD の中点を M とし，頂点 B が点 M に重なるように折ります。このときの折り目の線と辺 AB, BC との交点をそれぞれ E, F とし，線分 EM, MF をかきます。

② 図 3 のように，線分 MD が線分 MF に重なるように折ったとき，点 D の移った点を H とします。また，折り目を MG とし，線分 HG, FG をかきます。

③ 図 4 のようにもとに戻し，折り目の線分 EF, MG と線分 BM をかき，線分 BM と EF の交点を I とします。

このとき，次の各問に答えなさい。なおこの問題用紙の 1 ページ分の辺の比は，1: $\sqrt{2}$ です。

（埼玉県 2009 年度）

問1．線分 EF と線分 MG が平行になることを証明しなさい。

問2．線分 AE と EB の長さの比を求めなさい。

問3．四角形 MIFG と長方形 ABCD の面積の比を求めなさい。

解答欄

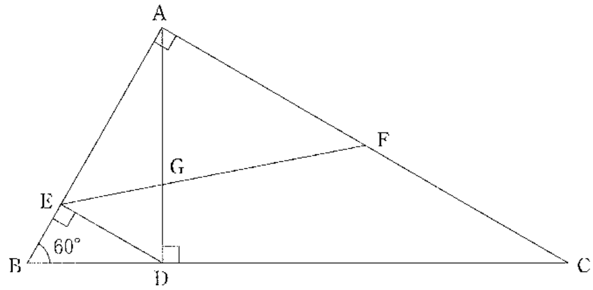
問1	証明
問2	AE:EB＝　　　　　　:
問3	四角形 MIFG:長方形 ABCD＝　　　　:

解答
問1
証明
長方形ABCDはAD$/\!/$BCで錯角は等しいので
$\angle$BFM＝$\angle$DMF
また$\angle$BFM，$\angle$DMFをそれぞれ半分に折っているので
$\angle$EFM＝$\angle$GMF
これは線分EFと線分MGの錯角が等しいので
EF$/\!/$MG
問2　AE：EB＝1：3
問3　四角形MIFG：長方形ABCD＝3：8
解説
問2
AE＝x，AB＝1とするとAD＝$\sqrt{2}$ AB＝$\sqrt{2}$
MはADの中点よりAM＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
EM＝EB＝$1-x$と表せる。
△AEMにおいて三平方の定理よりEM^2＝AE^2＋AM^2
$(1-x)^2=x^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
$-2x=-\dfrac{1}{2}$
$x=\dfrac{1}{4}$
よってAE：EM＝$x:(1-x)=\dfrac{1}{4}:\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}:\dfrac{3}{4}=1:3$
問3
△BFE≡△MFEより$\angle$BFE＝$\angle$MFE＝a°とおく。
FB＝FMだからBI＝MI，FI⊥BM　，$\angle$FBE＝90°より
$\angle$IBE＝90°－$\angle$FBI＝90°－(180°－90°－a°)＝a°
またAD$/\!/$BCより$\angle$FMD＝$\angle$MFB　$\angle$DMG＝$\dfrac{1}{2}$$\angle$FMD＝$\dfrac{1}{2}$$\angle$MFB＝$a^\circ$
よって△ABMと△DMGにおいて
$\angle$ABM＝$\angle$DMG，$\angle$BAM＝$\angle$MDG＝90°より
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABM∽△DMG
AM：DG＝BA：MD
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$：DG＝1：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
DG＝$\dfrac{1}{2}$
GC＝$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$
△DMG≡△HMGよりHG＝DG＝$\dfrac{1}{2}$
△HGFと△CGFにおいて
$\angle$GHF＝$\angle$GCF＝90°，GFは共通，GH＝GCより
直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいので
△HGF≡△CGF
よって△IFM＝△IFB，△HMG＝△DMG，△HGF＝△CGF
したがって(四角形MIFG)：(長方形ABCD)＝[{(長方形ABCD)－△ABM}÷2]：(長方形ABCD)
$=\left\{\left(1\times\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times1\right)\div2\right\}:(1\times\sqrt{2})=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}:\sqrt{2}=3:8$

【問 4】

図のように，∠BAC＝90°，∠ABC＝60° の直角三角形 ABC がある。点 A から辺 BC に垂線 AD をひき，点 D から辺 AB に垂線 DE をひく。辺 AC の中点を F とし，2 点 E, F を通る直線と，線分 AD との交点を G とすると，AG：GD＝2：1 となる。下の $\boxed{}$ の中は，AG：GD＝2：1 の証明を途中まで示してある。

次の問1，問2に答えなさい。



（千葉県 2009 年度）

> 証明
> △GFA と△GED において，
> 対頂角は等しいから，
> ∠AGF＝∠DGE …①
> 仮定より，∠CAB＝∠DEB＝90° なので，
> 同位角が等しいから，
> AC // ED …②
> よって，平行線の錯角は等しいから，
> ∠ GAF＝ $\boxed{(a)}$ …③
> ①，③から，$\boxed{\quad(b)\quad}$ ので
> △GFA∽△GED …④
> (続く)

問1. $\boxed{}$ の中の $\boxed{(a)}$，$\boxed{\quad(b)\quad}$ の中に入る最も適当なものを，次のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。

ア ∠GFA
イ ∠GDE
ウ ∠GED
エ 3 組の辺の比がすべて等しい
オ 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
カ 2 組の角がそれぞれ等しい

問2. $\boxed{}$ の中の証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし $\boxed{}$ の中の①～④に示されている関係を使う場合，番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
問2		

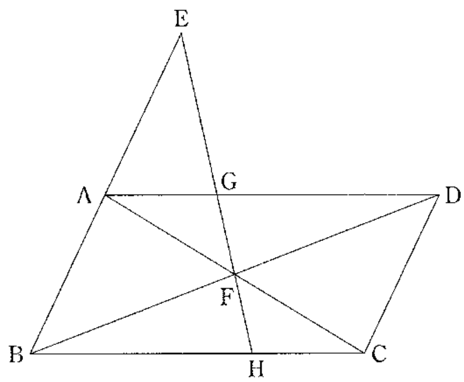
解答
問1
(a)　イ
(b)　カ
問2
仮定より
△ABC と△DBA はともに 60° の角をもつ直角三角形だから
BC：BA＝BA：BD＝2：1
よって BC：BD＝4：1…⑤
△ABC において
②と⑤から平行線の錯角は等しいから
BC：BD＝AC：ED＝4：1…⑥
仮定より
AC：AF＝2：1 なので⑥から
AF：ED＝2：1…⑦
したがって④と⑦から
AG：GD＝2：1
解説
問2
△ABC と△EBD は 60° の角をもつ直角三角形だから
BC＝2AB＝2×2BD＝4BD
∠BED＝∠BAC＝90° より同位角が等しいので ED∥AC
よって AC：ED＝BC：BD＝4BD：BD＝4：1
AG：GD＝AF：ED＝$\frac{1}{2}$AC：ED＝2：1

【問 5】

図のように，平行四辺形 ABCD において，線分 BA を延長し，その上に BA＝AE となるように点 E をとる。対角線の交点を F とし，線分 EF と AD の交点を G，線分 EF を延長し，BC との交点を H とする。このとき AG：GD＝1：2 であることを，下のように証明した。

次の問1，問2に答えなさい。

（石川県 2009 年度）



問1. $\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる三角形の相似条件を書きなさい。

問2. $\boxed{\text{イ}}$ の部分に入る証明の続きを書きなさい。

証明

△EAG と△EBH において

∠E は共通 …①

平行線の同位角は等しいから

∠EAG＝∠EBH …②

①，②より，$\boxed{\text{ア}}$ から

△EAG∽△EBH

したがって，EA：EB＝AG：BH＝1：2 …③

イ

解答欄

問1	ア	
問2	イ	証明の続き

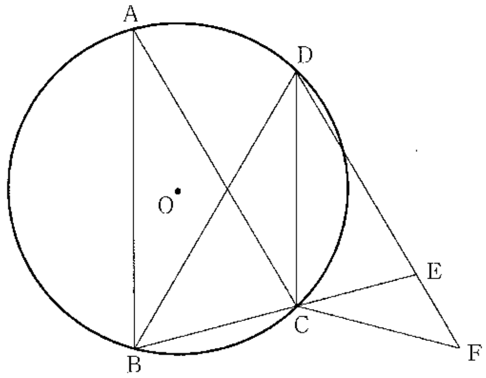
解答
問1　2組の角がそれぞれ等しい
問2
イ
△FBH と△FDG において
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから
FB＝FD…④
平行線の錯角は等しいから
∠FBH＝∠FDG…⑤
対頂角は等しいから
∠BFH＝∠DFG…⑥
④, ⑤, ⑥より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△FBH≡△FDG
したがって
BH＝DG…⑦
③, ⑦より
AG：GD＝1：2
解説
問2
AG：BH＝1：2 が証明され
結論が AG：GD＝1：2 なので
BH と GD が等しくなることを示せばよい。
よって△FBH と△FDG が合同であることを証明する。

【問 6】

図において，3 点 A，B，C は円 O の円周上の点であり，AB＝AC である。点 C を通り，BA に平行な直線と円 O との交点を D とする。点 D を通り AC に平行な直線と BC の延長との交点を E とし，DE の延長上に∠ACD＝∠ECF となる点 F をとる。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（静岡県　2009 年度）



問1．DB＝DF であることを証明しなさい。

問2．円 O の半径が 3 cm で，∠CBD＝42° のとき，∠BAC の大きさを求めなさい。また，$\overset{\frown}{BC}$の長さを求めなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>∠BAC</td><td>度</td></tr>
<tr><td>$\overset{\frown}{BC}$の長さ</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1
証明
△DCBと△DCFにおいて
DCは共通…①
円周角の定理より
∠CDB＝∠CAB…②
AB∥DCより
∠CAB＝∠ACD…③
AC∥DFより
∠ACD＝∠CDF…④
②，③，④より
∠CDB＝∠CDF…⑤
AB＝ACより
∠ACB＝∠ABC…⑥
AB∥DCより
∠ABC＝∠DCE…⑦
⑥，⑦より
∠ACB＝∠DCE…⑧
仮定より
∠ACD＝∠ECF…⑨
⑧，⑨より
∠ACB＋∠ACD＝∠DCE＋∠ECF
よって
∠DCB＝∠DCF…⑩
①，⑤，⑩より
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△DCB≡△DCF
よって
DB＝DF
問2
∠BAC　32度
$\overset{\frown}{BC}$の長さ　$\frac{16}{15}\pi$　cm
解説
問2
$\angle BAC = x^\circ$とする。
AB∥CDより$\angle ACD = \angle BAC = x^\circ$
また円周角の定理より
$\angle ACD = \angle ABD = x^\circ$
AB＝ACより$\angle ACB = \angle ABC = x^\circ + 42^\circ$
よって△ABCにおいて
$x^\circ + (x^\circ + 42^\circ) \times 2 = 180^\circ$
$x = 32^\circ$
$\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 32^\circ = 64^\circ$
弧BCの長さは$2\pi \times 3 \times \frac{64}{360} = \frac{16}{15}\pi$　cm

【問 7】

2 つの線分 AB, CD が線分 AB の中点 O で交わっている。このとき, AC // BD ならば, AC＝BD であることを証明したい。

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) にあてはまる最も適当なものを, 下のアからカまでの中からそれぞれ選んで, そのかな符号を書け。

（愛知県 2009 年度 A）

証明
△OAC と△OBD で,
O は線分 AB の中点だから,
OA＝OB …①
(Ⅰ) から,
∠AOC＝∠BOD …②
AC // BD から, (Ⅱ) ので,
∠OAC＝∠OBD …③
①, ②, ③から (Ⅲ) ので,
△OAC≡△OBD
よって, AC＝BD

ア 平行線の錯角は等しい
イ 平行線の同位角は等しい
ウ 対頂角は等しい
エ 2 組の角が, それぞれ等しい
オ 2 辺とその間の角が, それぞれ等しい
カ 1 辺とその両端の角が, それぞれ等しい

解答欄

Ⅰ (　　　　　), Ⅱ (　　　　　), Ⅲ (　　　　　)

解答
Ⅰ ウ
Ⅱ ア
Ⅲ カ

【問 8】

平行四辺形ABCDで，辺AD上に点Eがあるとき，CD＝ECならば，AC＝BEであることを証明したい。(　Ⅰ　)，(　Ⅱ　) にあてはまる式として最も適当なものを，下のアからオまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書け。ただし，E は D とは異なる点とする。

（愛知県 2009 年度 B）

証明

△ACD と△BEC で，

条件より，CD＝EC …①

四角形 ABCD は平行四辺形だから，

AD＝BC …②

△CDE は二等辺三角形だから，

∠ADC＝∠CED …③

また，AD∥BC だから，

(　Ⅰ　) …④

③，④から，

(　Ⅱ　) …⑤

①，②，⑤から，2 辺とその間の角が，それぞれ等しいので，

△ACD≡△BEC

よって，AC＝BE

ア ∠ADC＝∠CBA

イ ∠DAC＝∠BCA

ウ ∠CED＝∠BCE

エ ∠ADC＝∠BCE

オ ∠DAC＝∠CBE

解答欄

Ⅰ (　　　　　　)，Ⅱ (　　　　　　)

解答

Ⅰ ウ

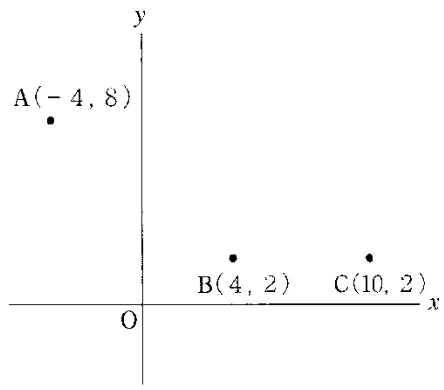
Ⅱ エ

【問 9】

図 1 のように，3 点 A (－4, 8), B (4, 2), C (10, 2) がある。
次の問1～問3に答えなさい。

（和歌山県　2009 年度）

図 1



問1. 次の文中の(ア), (イ)にあてはまる数を求めなさい。

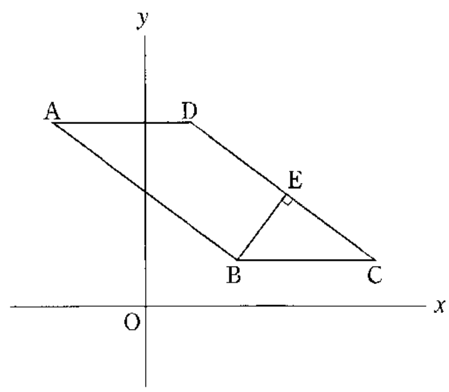
直線 $y = ax - 2$ のグラフが線分 BC と交わるとき

a の値の範囲は (ア) $\leqq a \leqq$ (イ) である。

問2. △AOB が直角三角形であることを証明しなさい。

問3. 図 2 のように，四角形 ABCD が平行四辺形となるように点 D をとる。さらに，点 B から直線 CD に垂線をひき，CD との交点を E とする。このとき，BE の長さを求めなさい。

図 2



解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
問2	証明	
問3	BE＝	

解答
問1

(ア) $\dfrac{2}{5}$

(イ) 1

問2

△AOB で

$AO^2=4^2+8^2=16+64=80$

$BO^2=4^2+2^2=16+4=20$

$AB^2=8^2+6^2=64+36=100$

よって $AO^2+BO^2=AB^2$ が成り立つ。

三平方の定理の逆より

△AOB は∠AOB＝90° の直角三角形となる。

問3 $BE=\dfrac{18}{5}$

解説

問1

$y=ax-2$ が線分 BC と交わるとき $a>0$ で

a の値は点 C を通るときその値は最小で点 B を通るとき最大となる。

C (10, 2) を通るとき $2=10a-2$ $a=\dfrac{2}{5}$

B (4, 2) を通るとき $2=4a-2$ $a=1$

よって $\dfrac{2}{5}\leqq a\leqq 1$

問3

四角形 ABCD は平行四辺形より AD ∥BC, AD＝BC＝10－4＝6

よって点 D の x 座標は－4＋6＝2 y 座標は 8 D (2, 8)

三平方の定理より $CD=\sqrt{(10-2)^2+(8-2)^2}=10$

△DBC の面積の関係より $\dfrac{1}{2}\times(10-4)\times(8-2)=\dfrac{1}{2}\times10\times BE$

これを解いて $BE=\dfrac{18}{5}$

【問 10】

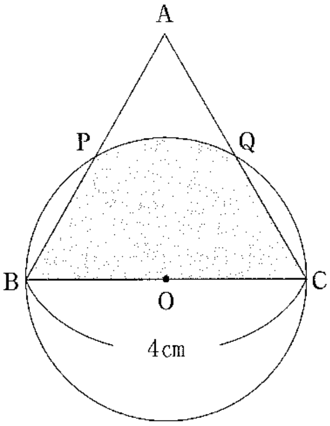
図 1～図 3 のように，円 O と正三角形がある。
次の問1，問2に答えなさい。

（和歌山県 2009 年度）

問1. 図 1，図 2 のように，円 O とその直径を 1 辺とする正三角形 ABC がある。また，辺 AB，AC と円 O との交点をそれぞれ P，Q とする。
次の(1)，(2)に答えなさい。

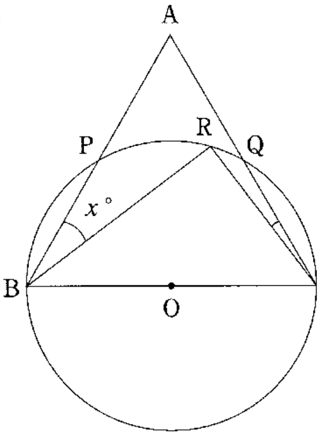
(1) 図 1 のように，直径 BC＝4 cm とする。このとき，▒の部分の面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

図 1



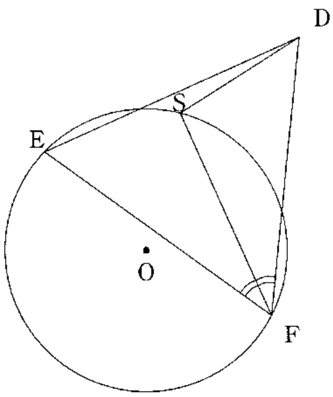
(2) 図 2 のように，$\overset{\frown}{PQ}$上に点 R をとり，∠ABR＝x° とする。このとき，∠ACR の大きさを，x の式で表しなさい。

図 2



問2. 図 3 のように，円 O の弦 EF を 1 辺とする正三角形 DEF がある。ただし，EF の長さは，円 O の半径より長いものとする。∠EFD の二等分線が円 O の円周と交わる点を S とするとき，線分 DS と円 O の半径が等しいことを証明しなさい。

図 3



解答欄

問1	(1)	cm^2
	(2)	∠ACR＝　　　　度
問2	証明	

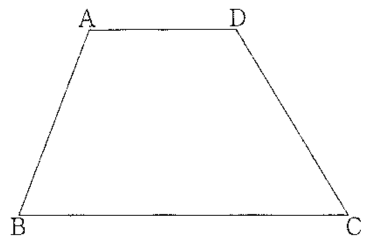
解答
問1
(1) $\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
(2) ∠ACR＝$30-x$ 度
問2
証明
点 E と S を結ぶ。
△FSE と△FSD で
△DEF は正三角形だから
FE＝FD…①
辺 FS は∠EFD の二等分線だから
∠SFE＝∠SFD…②
FS＝FS…③
①, ②, ③から
2 辺とその間の角が, それぞれ等しいので
△FSE≡△FSD
よって
ES＝DS…④
一方点 E, S と円の中心 O をそれぞれ結ぶと△OSE で OE＝OS となる。
また∠SFE＝30°だから
円周角の定理より∠SOE＝60°となり
△OSE は正三角形である。
よって OE＝ES…⑤
④, ⑤より
DS＝OE
したがって線分 DS と円 O の半径は等しい。
解説
問1
(1)
OP, OQ を結ぶ。
△OPQ は OP＝OB＝$\frac{4}{2}$＝2cm
∠PBO＝60° より正三角形である。
同様に△OQC も合同な正三角形。
よって∠POQ＝180°－60°－60°＝60°
P から BO に垂線 PH をひく。
BH＝OH＝$\frac{2}{2}$＝1cm
PH＝$\sqrt{3}$ BH＝$\sqrt{3}$ cm
△OPQ＝△OQC＝$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
よって求める面積は$\pi\times 2^2\times\frac{60}{360}+2\times\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
(2)
OP, OQ を結ぶ。
円周角の定理より
∠POR＝2∠PBR＝$2x$
∠ROQ＝2∠QCR＝2∠ACR∠POR＋∠ROQ＝∠POQ＝60° より
$2x$＋2∠ACR＝60
2∠ACR＝60－$2x$
∠ACR＝$30-x$°

【問 11】

AD∥BC の台形 ABCD がある。

このとき，次の問いに答えなさい。

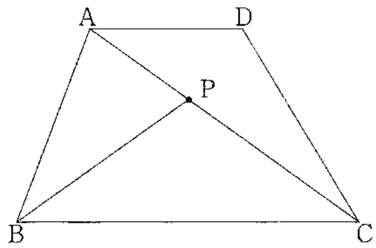
（沖縄県　2009 年度）



問1．辺 BC の垂直二等分線を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。

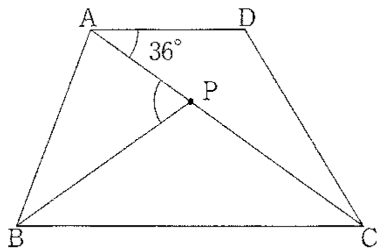
ただし，作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

問2．問 1 で作図した垂直二等分線と対角線 AC の交点を P，辺 BC との交点を M とする。

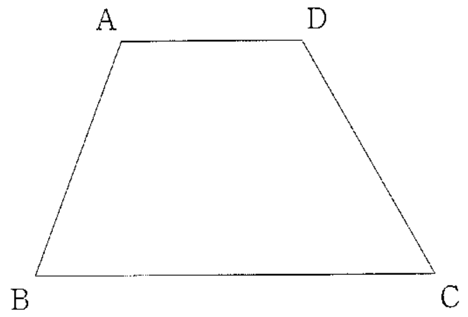


(1)　PB＝PC となることを三角形の合同条件を用いて証明しなさい。

(2)　∠DAC＝36°のとき，∠APB の大きさを求めなさい。

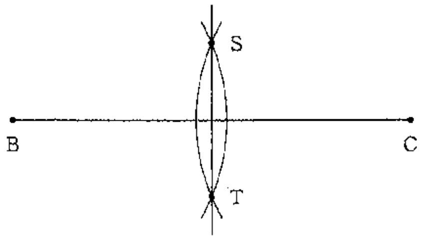


解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>証明</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>∠APB＝　　　　　°</td></tr>
</table>

解答

問1



問2

(1)

証明

△PBMと△PCMにおいて

PM＝PM　(共通)…①

BM＝CM　(PMはBCの垂直二等分線)…②

∠PMB＝∠PMC＝90°…③

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しい

したがって△PBM≡△PCM

合同な三角形の対応する辺は等しい

よってPB＝PC

(2)　∠APB＝72°

解説

問2

(2)

AD∥BCより, 錯角は等しいので∠PCB＝∠DAP＝36°

またPB＝PCより∠PBC＝∠PCB＝36°

よって∠APB＝∠PBC＋∠PCB＝36°＋36°＝72°