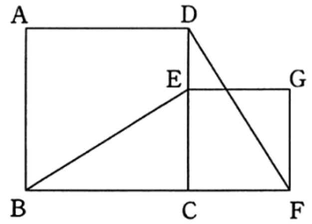
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2007 年度出題】

【問 1】

図のように，正方形 ABCD の辺 CD 上に点 E をとり，EC を 1 辺とする正方形 ECFG を，辺 CD に対して点 A の反対側につくる。

このとき，BE＝DF となることを証明したい。$\boxed{}$ の［証明］を完成させなさい。



（秋田県 2007 年度）

解答欄

証明   したがって，BE＝DF である。

解答

証明

△BCE と△DCF において

正方形の 4 つの辺の長さはそれぞれ等しいから

BC＝DC

同様にして

CE＝CF

正方形の 1 つの内角は 90° だから

∠BCE＝∠DCF

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

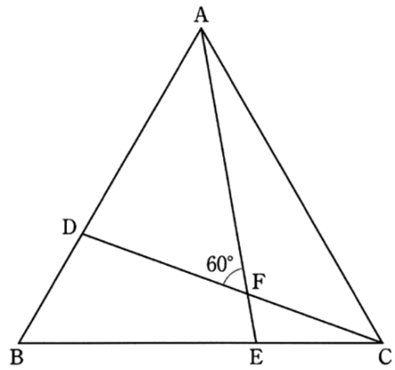
△BCE≡△DCF

したがって，BE＝DF である。

【問 2】

　正三角形 ABC がある。図のように，辺 AB 上に 2 点 A, B と異なる点 D を，辺 BC 上に 2 点 B, C と異なる点 E をとり，AE と CD との交点を F とする。∠AFD＝60°であるとき，AE＝CD となることを証明しなさい。

（福島県 2007 年度）



解答欄

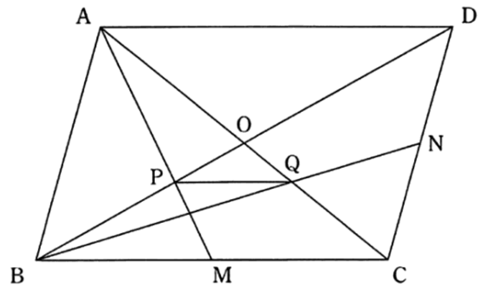
証明

解答
証明
△CAE と△BCD において
△ABC は正三角形であるから
CA＝BC…①
∠ACE＝∠CBD＝60° …②
∠DCA＋∠BCD＝60° …③
三角形の外角はそれととなり合わない 2 つの内角の和に等しいから
∠DCA＋∠CAE＝60° …④
③④から∠CAE＝∠BCD…⑤
①②⑤より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△CAE≡△BCD
合同な三角形では，対応する辺の長さが等しいから
AE＝CD
解説
対応する辺が AE と CD になる 2 つの三角形△ABE と△CAD
または△CAE と△BCD の合同を証明して
AE＝CD を示す。

【問 3】

図のように，平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし，辺 BC，CD のそれぞれの中点を M，N とする。対角線 BD と線分 AM の交点を P，対角線 AC と線分 BN の交点を Q とすると，PQ＝$\frac{1}{3}$BC となる。下の ＿＿ の中は，PQ＝$\frac{1}{3}$BC の証明を途中まで示してある。

次の1，2の問いに答えなさい。



（千葉県 2007 年度）

証明

点 O と点 N を結ぶ。

△QBC と△QNO において，

平行四辺形の性質から，DO＝OB …①

仮定から，

DN＝NC …②

△DBC で，①，②から中点連結定理より，

ON＝$\frac{1}{2}$BC …③

ON $\boxed{\quad a \quad}$ BC …④

④から，

∠QBC＝∠QNO …⑤

∠QCB＝∠QON …⑥

⑤，⑥から，$\boxed{\quad b \quad}$，

△QBC∽△QNO

よって，③から，CQ : QO＝2 : 1 …⑦

点 O と点 M を結ぶ。

△PAB と△PMO において，

同様に，△PAB∽△PMO

よって，BP : PO＝2 : 1 …⑧

(続く)

問1．$\boxed{}$ の中の $\boxed{\quad a \quad}$ ，$\boxed{\qquad b \qquad}$ の中に入る最も適当なものを，次のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。

ア　＝
イ　∥
ウ　⊥
エ　3 組の辺の比がすべて等しいので
オ　2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
カ　2 組の角がそれぞれ等しいので

問2．$\boxed{}$ の中の証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし，$\boxed{}$ の中の①～⑧に示されている関係を使う場合，番号の①～⑧を用いてもかまわないものとする。

解答欄

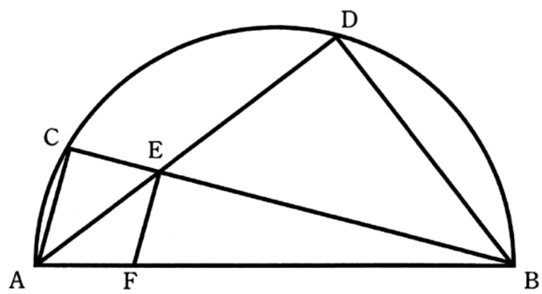
問1	(a)	
	(b)	
問2	証明の続き	

解答
問1
(a) イ
(b) カ
問2
証明の続き
△OPQ と△OBC において
∠POQ＝∠BOC…⑨
⑦から OQ：OC＝1：3…⑩
⑧から OP：OB＝1：3…⑪
⑨，⑩，⑪から
2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
△OPQ∽△OBC
よって PQ：BC＝1：3
したがって $PQ=\frac{1}{3}BC$
解説
問2
△OPQ と△OBC において
⑦より OQ：OC＝1：3…⑨
⑧より OP：OB＝1：3…⑩
共通な角なので∠POQ＝∠BOC…⑪
⑨，⑩，⑪より
2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
△OPQ∽△OBC
よって PQ：BC＝1：3　$PQ=\frac{1}{3}BC$

【問 4】

図のように，線分 AB を直径とする半円があり，AB＝4 cm である。弧 AB 上に線分 AC が 1 cm となる点 C をとり，∠CAB の二等分線と弧 AB の交点を D とする。また，線分 AD と線分 BC の交点を E とし，線分 AB 上に AF＝EF となる点 F をとる。

このとき，次の1～3の問いに答えなさい。



（新潟県 2007 年度）

問1．AC∥FE であることを証明しなさい。

問2．BE:BC を最も簡単な整数の比で表しなさい。

問3．線分 BD の長さを求めなさい。

解答欄

問1	証明
問2	BE:BC＝ :
問3	cm

解答
問1
証明
線分 AE は∠CAB の二等分線だから
∠CAE＝∠FAE…①
AF＝EF より
△FEA は二等辺三角形だから
∠FAE＝∠FEA…②
①②より∠CAE＝∠FEA
錯角が等しいから
AC∥FE
問2　BE:BC＝4:5
問3　$\sqrt{6}$ cm
解説
問2
AF＝EF＝x cm とする。
AC∥FE より，EF:CA＝BF:BA
$x:1=(4-x):4$
$4x=4-x$
$5x=4$
$x=\dfrac{4}{5}$
よって BE:BC＝EF:CA＝$\dfrac{4}{5}:1=4:5$
問3
AB は円の直径より∠ACB＝∠ADB＝90°
△BCA において
三平方の定理より BC＝$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$
BE:BC＝4:5 より
CE＝$\dfrac{1}{5}$BC＝$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$
△CAE において
三平方の定理より AE＝$\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$
△CAE と△DAB は
2 組の角がそれぞれ等しくなるので
△CAE∽△DAB
よって EC:BD＝AE:AB
$\dfrac{\sqrt{15}}{5}:BD=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}:4$
$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}BD=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$
BD＝$\sqrt{6}$ cm

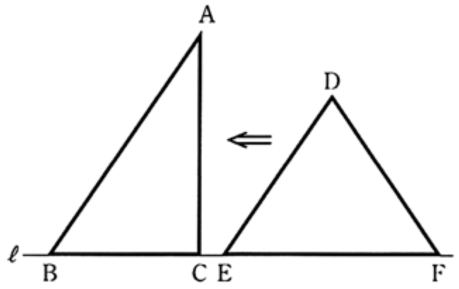
【問 5】

図 1 のように，AB＝6 cm，∠C＝90° の△ABC と DE＝DF の△DEF がある。辺 BC と辺 EF は，ともに直線ℓ 上にあり，∠B＝∠E，AB＞DE，BC＜EF である。図 2，図 3 は，図 1 の△DEF を直線ℓ にそって，矢印の向きに動かしたものである。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

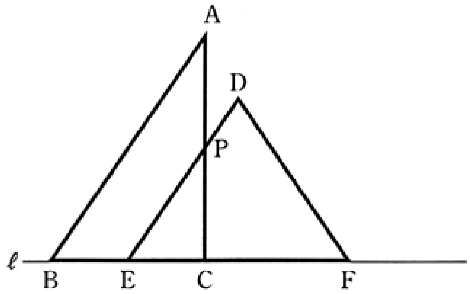
（石川県 2007 年度）

図 1



問1．図 2 のように，点 E が辺 BC の中点にきたとき，辺 AC と辺 DE の交点を P とする。このときの線分 PE の長さを求めなさい。

図 2

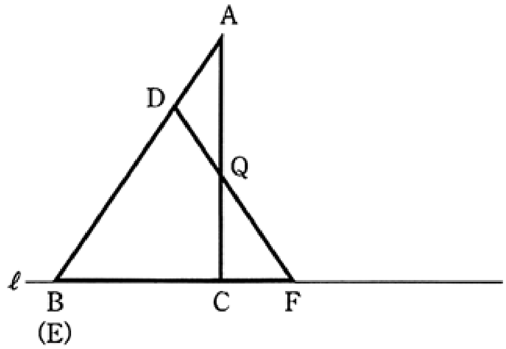


問2．図 3 のように，点 E が点 B に重なったとき，辺 AC と辺 DF の交点を Q とする。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1) A＝DQ が成り立つことを証明しなさい。

図 3



(2) D:DB＝2:5 のとき，△QCF の面積を a cm^2 として，△DBC の面積を a を用いて表しなさい。なお，途中の計算も書くこと。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>証明</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>計算

答　　　　cm^2</td></tr>
</table>

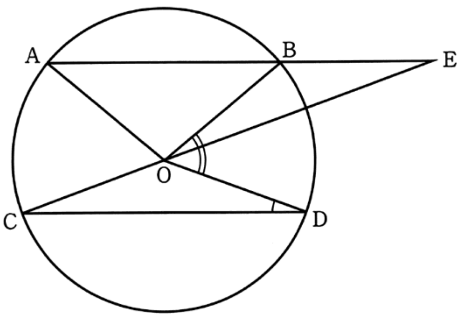
解答
問1　3cm
問2
(1)
証明
AC⊥BF より
∠BAC＝90°－∠ABC…①
∠CQF＝90°－∠CFQ…②
DB＝DF より∠ABC＝∠CFQ…③
①, ②, ③より
∠BAC＝∠CQF…④
また∠CQF＝∠DQA(対頂角)…⑤
④, ⑤より∠BAC＝∠DQA
すなわち∠DAQ＝∠DQA
したがって DA＝DQ
(2)
AD＝DQ, DB＝DF より
DQ : DF＝2 : 5
よって DQ : QF＝2 : 3
△ABC と△QFC で
∠B＝∠F…①
∠BAC＝∠DQA, ∠DQA＝∠FQC より
∠BAC＝∠FQC…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△QFC
よって BC : FC＝AB : QF＝7 : 3
$\triangle DBC=\frac{7}{3}\triangle DCF=\frac{7}{3}\times\frac{5}{3}\triangle QCF=\frac{35}{9}\triangle QCF=\frac{35}{9}a\ \mathrm{cm}^2$
答　$\frac{35}{9}a$　cm^2

【問 6】

図のように，円 O の円周上に AB∥CD となる 4 点 A，B，C，D がある。また，線分 AB と線分 CO を延長した直線上に，OB＝BE となる交点 E がある。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（山梨県 2007 年度）



問1．∠BEO＝20° のとき，∠BAO の大きさを求めなさい。

問2．∠ODC＝∠a，∠BOD＝∠b とするとき，∠b＝3∠a が成り立つことを証明しなさい。ただし，∠a は 0° より大きく 45° より小さい角とする。

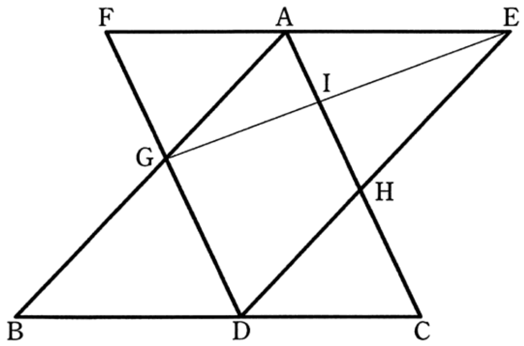
解答欄

問1	度
問2	証明

解答
問1　40度
問2
証明
仮定より
∠ODC＝∠a，∠BOD＝∠bである。
OC＝ODなので
∠OCD＝∠a
∠EODは△OCDの外角なので
∠EOD＝2∠a…①
また平行線の錯角は等しいので
∠BEO＝∠a
仮定より
OB＝BEなので
∠BOE＝∠a…②
図より
∠BOD＝∠BOE＋∠EOD
したがって①，②より
∠b＝∠a＋2∠aであるから
∠b＝3∠a
解説
問1
OB＝BEより
∠BOE＝∠BEO＝20°
△BOEの外角より
∠OBA＝∠BOE＋∠BEO＝20°＋20°＝40°
OA＝OBより
∠BAO＝∠OBA＝40°

【問 7】

図で，△ABC≡△DEF であり，辺 FE は BC に平行である。点 D は辺 BC 上の点であり，点 A は辺 FE 上の点である。辺 AB と FD との交点を G，辺 AC と ED との交点を H とし，線分 GE と AH との交点を I とする。



（岐阜県 2007 年度）

問1．四角形 AGDH は平行四辺形であることを証明しなさい。

問2．BD：DC＝3：2 のとき，

(1) GI：IE を求めなさい。

(2) 四角形 AGDH の面積は△AIE の面積の何倍であるかを求めなさい。

解答欄

問1	証明	
問2	(1)	:
	(2)	倍

解答
問1
証明
仮定から
合同な三角形の対応する角だから
∠ABC＝∠DEF…①
仮定から平行線の錯角だから
∠ABC＝∠BAF…②
①, ②から∠DEF＝∠BAF
同位角が等しいから AB∥ED…③
同様にして AC∥FD… ④
③, ④から
AG∥HD, AH∥GD
したがって
2 組の対辺がそれぞれ平行なので
四角形 AGDH は平行四辺形である。
問2
(1) 2:3
(2) $\frac{10}{3}$倍
解説
問2
(1)
四角形 AGDH は平行四辺形より
HD＝AG AB∥ED
BD:DC＝3:2 より
DH:AB＝CD:CB＝2:5
よって AB＝DE＝x とおくと
AG＝HD＝$\frac{2}{5}x$
HE＝$x-\frac{2}{5}x=\frac{3}{5}x$
したがって GI:IE＝AG:HE＝$\frac{2}{5}x:\frac{3}{5}x=2:3$
(2)
AB∥ED より
AI:IH＝GI:IE＝2:3
よって△AGI＝$\frac{2}{3}$△AIE
△AGH＝$\frac{5}{2}$△AGI
したがって四角形 AGDH＝2△AGH＝2×$\frac{5}{2}$△AGI＝2×$\frac{5}{2}$×$\frac{2}{3}$△AIE＝$\frac{10}{3}$△AIE

【問 8】

正方形 ABCD と辺 CD の中点を M, 線分 AM と線分 DB との交点を E, 直線 AM と直線 BC との交点を F とする。このとき, ∠DCE＝∠MFC であることを次のように証明したい。

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) にあてはまる式として最も適当なものを, 下のアからカまでの中からそれぞれ選んで, そのかな符号を書け。

（愛知県 2007 年度 A）

証明

△AED と△CED で,

四角形 ABCD は正方形だから, AD＝CD …①

DE は 2 つの三角形の共通な辺だから, DE＝DE …②

また, (Ⅰ)＝45° …③

①, ②, ③から

2 辺とその間の角が, それぞれ等しいので,

△AED≡△CED

よって, (Ⅱ) …④

さらに, AD∥BF で, 錯角は等しいから,

(Ⅲ) …⑤

④, ⑤から

∠DCE＝∠MFC である。

ア ∠ADE＝∠CBE　イ ∠DAE＝∠DCE　ウ ∠AED＝∠CED

エ ∠ADE＝∠CDE　オ ∠DAE＝∠MFC　カ ∠DME＝∠MFC

解答欄

Ⅰ	
Ⅱ	
Ⅲ	

解答

Ⅰ エ

Ⅱ イ

Ⅲ オ

【問 9】

AD∥BC の台形 ABCD で，辺 AB，CD の中点を，それぞれ E，F とするとき，EF＝$\frac{1}{2}$(AD＋BC) であることを証明したい。$\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イ}}$ をうめて証明を完成せよ。

（愛知県 2007 年度 B）

(証明)

直線 AF と直線 BC との交点を G とする。

△AFD と△GFC で，

DF＝CF …①

対頂角は等しいから，∠AFD＝∠GFC …②

また，AD∥BC で，錯角は等しいから，

∠ADF＝∠ $\boxed{\text{ア}}$ …③

①，②，③から，1 辺とその両端の角が，それぞれ等しいので，

△AFD≡△GFC

よって，AD＝GC

△ABG で，点 E，F はそれぞれ辺 AB，AG の中点だから，

EF＝$\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{イ}}$

したがって，EF＝$\frac{1}{2}$(AD＋BC)

解答欄

ア	
イ	

解答

ア GCF

イ BG

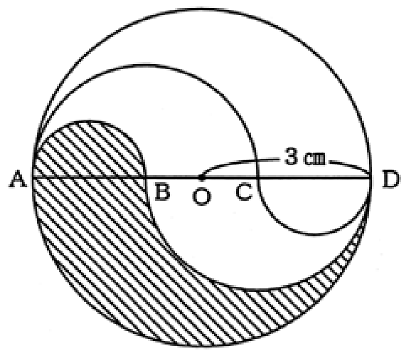
【問 10】

半径 3 cm の円 O の直径 AD を 3 等分する点を, A に近い方から B, C とし, 図 1 のように, AB, AC, BD, CD を直径とする半円をかく。さらに図 2 のように, 下側の弧 AD 上に点 P をとり, 線分 PC の延長と円 O との交点を Q とする。点 P と点 Q は, 線分 PQ が常に点 C を通るように円周上を動く。

円周率は π として, 後の1～4の問いに答えなさい。

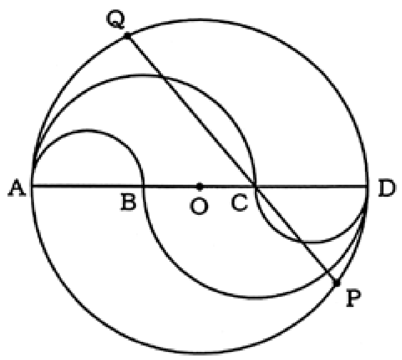
（滋賀県 2007 年度）

図 1



問1. 図 1 の斜線部分の面積を求めなさい。

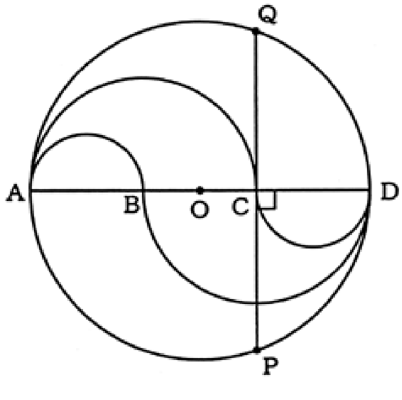
図 2



問2. ∠DCP＝45° になったときの点 Q を, コンパスと定規を使って作図しなさい。ただし, 作図に使った線は消さないこと。

問3. 図 3 のように, ∠DCP＝90° になったとき, 線分 PQ の長さを求めなさい。

図 3

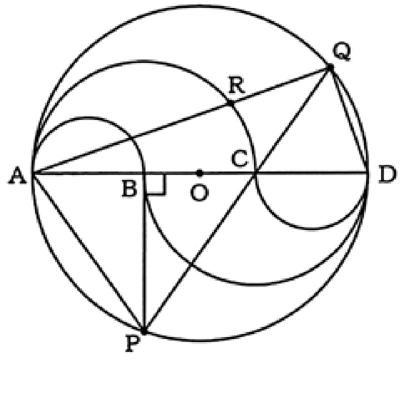


問4. 図 4 のように, ∠DBP＝90° になったとき, 次の(1), (2)の問いに答えなさい。

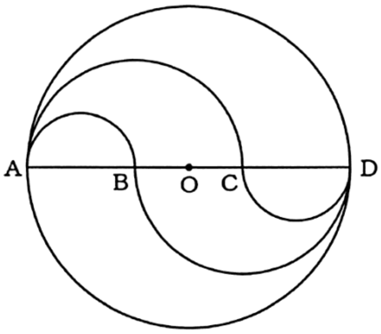
(1) DC＝DQ であることを証明しなさい。

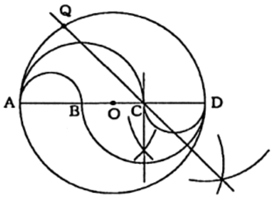
(2) 線分 AQ と弧 AC との交点のうち, A と異なる点を R とする。線分 RQ の長さを求めなさい。

図 4



解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問4</td><td>(1)</td><td>証明</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1　$3\pi\,\mathrm{cm}^2$
問2


問3　$4\sqrt{2}$ cm
問4
(1)
証明
△PABと△PCBで
仮定からAB＝CB…①
∠PBA＝∠PBC＝90°…②
共通な辺だからBP＝BP…③
①, ②, ③から
2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△PAB≡△PCB
対応する角だから
∠PAB＝∠PCB…④
次に弧PDに対する円周角だから
∠PAB＝∠DQC…⑤
対頂角だから
∠PCB＝∠DCQ…⑥
④, ⑤, ⑥から
∠DCQ＝∠DQC
よって△DCQは二等辺三角形である。
したがってDC＝DQ
(2)　$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$ cm
解説
問1
斜線部分の面積は(ADを直径とする半円)－(BDを直径とする半円)＋(ABを直径とする半円)より
$\dfrac{1}{2}\times\pi\times3^2-\dfrac{1}{2}\times\pi\times2^2+\dfrac{1}{2}\times\pi\times1^2=\dfrac{9}{2}\pi-2\pi+\dfrac{1}{2}\pi=3\pi$　cm^2
問3
OPを結ぶ。
OC＝1, OP＝OD＝3
△OPCで
三平方の定理より$CP=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
よって$PQ=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm
4
(2)
(1)よりQD＝CD＝2
△AQDで
三平方の定理より$AQ=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$
RとCを結ぶ。
∠ARC＝∠AQD＝90°だからRC∥QD
△AQDでAR:RQ＝AC:CD＝4:2＝2:1
よって$RQ=\dfrac{1}{3}AQ=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ cm

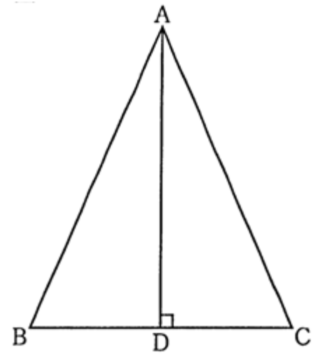
【問 11】

図Ⅰ～図Ⅲにおいて，△ABC は，AB＝AC＝5 cm，BC＝4 cm の二等辺三角形である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

（大阪府 2007 年度 後期）

図Ⅰ



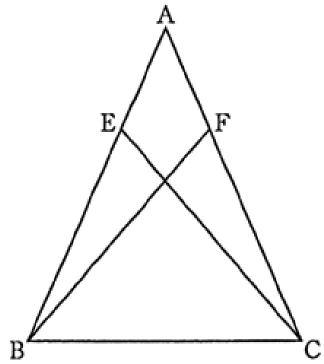
問1．図Ⅰにおいて，D は，A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。

(1) 線分 BD の長さと線分 AD の長さをそれぞれ求めなさい。

(2) △ABC の面積を求めなさい。

問2．図Ⅱ，図Ⅲにおいて，E は，辺 AB 上にあって A，B と異なる点である。F は，辺 AC 上にあって A，C と異なる点である。AE＝AF である。C と E，B と F とをそれぞれ結ぶ。

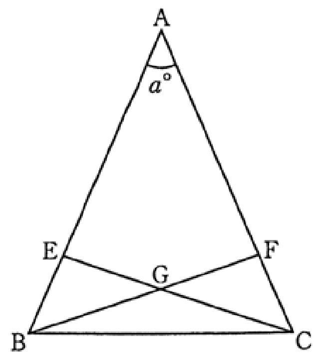
図Ⅱ



(1) 図Ⅱにおいて，△AEC≡△AFB であることを証明しなさい。

(2) 図Ⅲは，図Ⅱにおいて AE＝CE，AF＝BF であるときの状態を示している。図Ⅲにおいて，G は，線分 CE と線分 BF との交点である。△ABC の内角∠BAC の大きさを $a°$ とするとき，△EBG の内角∠BEG の大きさと△GBC の内角∠BGC の大きさをそれぞれ a を用いて表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図Ⅲ



解答欄

問1	(1)	線分 BD の長さ　　　　　　cm	
		線分 AD の長さ　　　　　　cm	
	(2)	cm^2	
問2	(1)	証明	
	(2)	求め方 ∠BEG の大きさ　　　　　度 ∠BGC の大きさ　　　　　度	

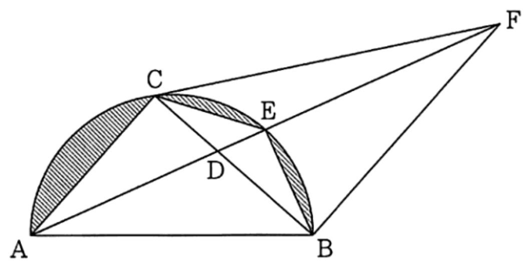
解答
問1
(1)
線分 BD の長さ 2
線分 AD の長さ $\sqrt{21}$
(2)
$2\sqrt{21}$
問2
(1)
証明
△AEC と△AFB において
AC＝AB (仮定)…①
AE＝AF (仮定)…②
∠EAC＝∠FAB (共通)…③
①②③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△AEC≡△AFB
よって△AEC＝△AFB
(2)
求め方
AE＝CE だから
∠ECA＝∠EAC＝a°
∠BEG は∠AEC の外角だから
∠BEG＝∠EAC＋∠ECA＝$2a$°
AF＝BF だから
∠FBA＝∠FAB＝a°
∠BGC は∠BGE の外角だから
∠BGC＝∠BEG＋∠GBE＝$3a$°
答　∠BEG の大きさ $2a$，∠BGC の大きさ $3a$
解説
問1
(1)
△ABC において
AB＝AC，AD⊥BC より
BD＝$\frac{1}{2}$BC＝$\frac{1}{2}\times 4$＝2cm
また△ABD において
三平方の定理より AD＝$\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ cm
(2)
△ABC＝$\frac{1}{2}$×BC×AD＝$\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{21}=2\sqrt{21}$ cm^2

【問 12】

図のように，AB を直径とする半円の周上に点 C をとり，△ABC をつくる。∠CAB の 2 等分線が BC および半円と交わる点をそれぞれ D，E とする。さらに，AE を延長し AE＝EF となる点 F をとる。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県　2007 年度）



問1．∠CBF＝90°　となることを次のように証明した。

$\boxed{a}$ には，△ABE と△FBE が合同であることの証明を書き，$\boxed{b}$ ～ $\boxed{d}$ には，あてはまるものを下の語群のア～クから選びその記号を書き，この証明を完成させなさい。

＜証明＞　△ABE と△FBE において

$\boxed{a}$

よって∠BFE＝∠ $\boxed{b}$ …㋐

また，仮定より∠ $\boxed{b}$ ＝∠CAE…㋑

㋐，㋑より∠BFE＝∠CAE

$\boxed{c}$ が等しいから BF∥AC

よって∠CBF＝∠ $\boxed{d}$ …㋒

直径 AB に対する円周角だから∠ $\boxed{d}$ ＝90°　…㋓

㋒，㋓より∠CBF＝90°

語群

ア　BCA	イ　BDA	ウ　BAE	エ　BDE
オ　対頂角	カ　同位角	キ　錯角	ク　円周角

問2．BC の長さは半円の直径より 3 cm 短く，CF の長さは半円の直径より 3 cm 長い。

(1) 半円の直径を求めなさい。

(2) △ACF の面積を求めなさい。

(3) 図の斜線部分の面積の和を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>a</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td>c</td><td></td><td>d</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td colspan="3">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="3">cm^2</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="3">cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1
a
BE は共通…①
仮定より
AE＝FE…②
直径 AB に対する円周角だから
$\angle AEB = 90°$
$\angle FEB = 180° - \angle AEB = 180° - 90° = 90°$
よって$\angle AEB = \angle FEB$…③
①，②，③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
$\triangle ABE \equiv \triangle FBE$
B　ウ
C　キ
D　ア
問2
(1)　12 cm
(2)　$\dfrac{27\sqrt{7}}{2}$ cm^2
(3)　$18\pi - 27 - \dfrac{27\sqrt{7}}{4}$ cm^2
解説
問2
(1)
半円の直径を x cm とすると BC＝$x-3$cm，CF＝$x+3$cm
また$\triangle ABE \equiv \triangle FBE$ より FB＝AB＝x cm
よって$\triangle BCF$ で
$\angle CBF=90°$　より
$BC^2 + FB^2 = CF^2$
$(x-3)^2 + x^2 = (x+3)^2$
$x^2 - 12x = 0$
$x(x-12) = 0$
$x > 0$ より
$x = 12$cm
(2)
AC$\parallel$BF より
$\triangle ACF = \triangle ACB$
$\triangle ACB$ において
AB＝12，BC＝12－3＝9
三平方の定理より AC＝$\sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{7}$
したがって$\triangle ACB = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{7} = \dfrac{27\sqrt{7}}{2}$ cm^2
(3)
$\triangle ABE = \dfrac{1}{2}\triangle ABF = \dfrac{1}{2}\triangle CBF = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times 12 \times 9 = 27$
$\triangle ACE = \dfrac{1}{2}\triangle ACF = \dfrac{1}{2}\triangle ACB = \dfrac{27\sqrt{7}}{4}$
よって求める面積は$\dfrac{1}{2} \times \pi \times 6^2 - 27 - \dfrac{27\sqrt{7}}{4} = 18\pi - 27 - \dfrac{27\sqrt{7}}{4}$ cm^2

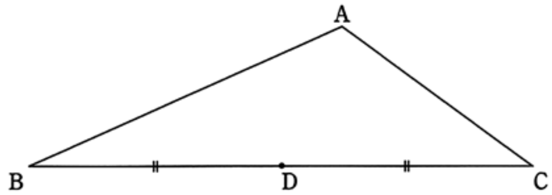
【問 13】

図 1, 図 2 のように, △ABC の辺 BC 上に, BD＝CD となるように, 点 D をとる。

次の問1, 問2に答えなさい。

（和歌山県 2007 年度）

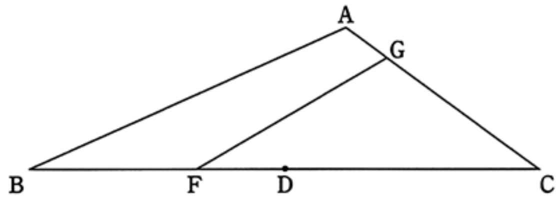
図 1



問1. AD を延長した直線上に点 E をとり, 4 点 A, B, E, C を結んでできる四角形 ABEC が平行四辺形になるようにしたい。E の位置をどのように決めればよいか, 説明しなさい。

問2. 図 2 のように, BC, AC 上にそれぞれ点 F, G をとる。線分 FG が△ABC の面積を 2 等分するとき, 次の(1), (2)に答えなさい。

図 2



(1) AF∥GD であることを説明しなさい。

(2) BC＝18cm, AC＝8cm, DF＝3cm であるとき, AG の長さを求めなさい。

解答欄

問1		
問2	(1)	説明
	(2)	AG ＝ cm

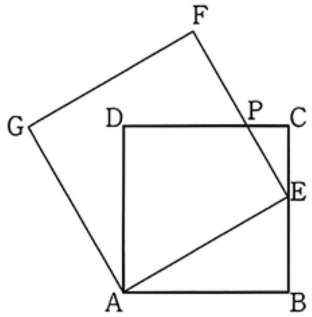
解答
問1
AD を延長した直線上に AD＝DE となる点 E をとる
問2
(1)
説明
2 点 A, D を結ぶ。
D は辺 BC の中点だから
$\triangle$ADC＝$\frac{1}{2}$ $\triangle$ABC
線分 FG が$\triangle$ABC の面積を 2 等分するので
$\triangle$FCG＝$\frac{1}{2}$ $\triangle$ABC
よって$\triangle$ADC＝$\triangle$FCG
また$\triangle$ADG＝$\triangle$ADC－$\triangle$DCG
$\triangle$FDG　＝$\triangle$FCG－$\triangle$DCG
だから$\triangle$ADG＝$\triangle$FDG
よって AF // GD
(2)　AG＝2 cm
解説
問2
(1)
$\triangle$ADC＝$\frac{1}{2}$ $\triangle$ABC, $\triangle$GFC＝$\frac{1}{2}$ $\triangle$ABC より
$\triangle$ADC＝$\triangle$GFC
また$\triangle$ADG＝$\triangle$ADC－$\triangle$GDC
$\triangle$FDG＝$\triangle$GFC－$\triangle$GDC より
$\triangle$ADG＝$\triangle$FDG
よって AF // GD
(2)
$\triangle$CAF で AF // GD より
CD : DF＝CG : AG
CD＝$\frac{1}{2}$ ×18＝9
DF＝3, CG＝8－AG だから
9 : 3＝(8－AG) : AG
3(8－AG)＝9AG
24－3AG＝9AG
12AG＝24
AG＝2cm

【問 14】

問1. 図 I のように，正方形 ABCD の辺 BC 上に点 E をとり，AE を一辺とする正方形 AEFG を作る。辺 CD と辺 EF の交点を P とするとき，次の各問いに答えなさい。

（鳥取県 2007 年度）

図 I



(1) $\angle$GDA＝90° であることを証明したい。

解答用紙に必要なことを書き入れて，証明を完成しなさい。

(2) 四角形 AEPD の 4 つの頂点を通る円を考えるとき，その円の中心 O の位置をコンパスと定規を用いて作図しなさい。なお，作図に用いた線は消さずに残しておきなさい。

問2. 問1の正方形 ABCD に以下の操作をして，次々と新しい正方形を作る。

このとき，次の各問いに答えなさい。

操作 1　正方形 ABCD の辺 BC 上に $BB_1 = kBC (0 < k < 1)$ となる点 B_1 をとり，AB_1 を一辺とする正方形 $AB_1C_1D_1$ を作る。

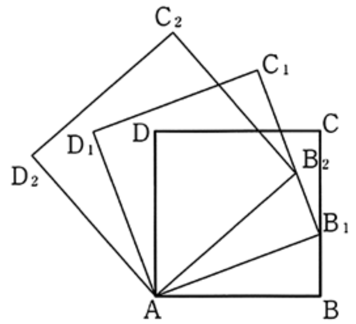
操作 2　正方形 $AB_1C_1D_1$ の辺 B_1C_1 上に $B_1B_2 = kB_1C_1 (0 < k < 1)$ となる点 B_2 をとり，AB_2 を一辺とする正方形 $AB_2C_2D_2$ を作る。

以下同様にして，操作 3 により正方形 $AB_3C_3D_3$ を作り，操作 4 により正方形 $AB_4C_4D_4$ を作る。

図Ⅱは操作 2 が終了したときの状態を表した図である。

(1) $k = \dfrac{1}{2}$ のとき，正方形 ABCD と正方形 $AB_1C_1D_1$ が重なっている部分の面積を S，正方形 ABCD の面積を T とするとき，S:T を最も簡単な整数比で表しなさい。

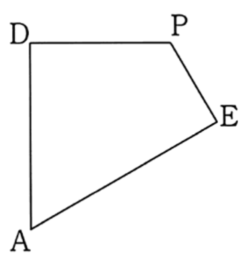
図Ⅱ

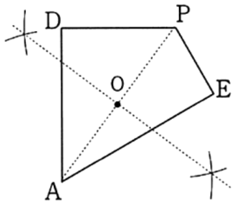


(2) 操作 4 でできた正方形 $AB_4C_4D_4$ の面積が正方形 ABCD の面積の $\dfrac{81}{16}$ 倍になるとき，k の値を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問1</td><td>(1)</td><td>証明　△GDA と△EBA で

合同な図形では対応する角の大きさは等しいので，
∠GDA＝∠EBA
また，∠EBA＝90°なので，∠GDA＝90°である。</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>S:T＝　　　　　:</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>k＝</td></tr>
</table>

解答
問1
(1)
証明
△GDAと△EBAで
仮定より四角形ABCD, AEFGは正方形なので
AG＝AE…①
AD＝AB…②
また
∠GAD＝∠GAE－∠DAE＝90°－∠DAE…③
∠EAB＝∠DAB－∠DAE＝90°－∠DAE…④
③, ④より∠GAD＝∠EAB…⑤
①, ②, ⑤より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△GDA≡△EBA
合同な図形では対応する角の大きさは等しいので
∠GDA＝∠EBA
よって∠EBA＝90° なので∠GDA＝90° である。
(2)


問2
(1) S:T＝11:16
(2) $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

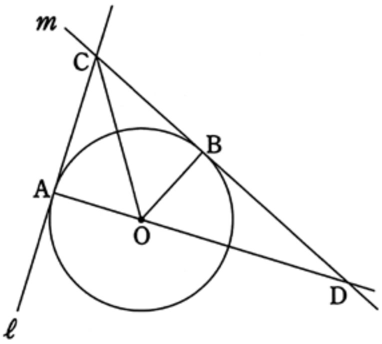
解説
問2
(1)
AB＝a とおくと $BB_1=B_1C=\frac{1}{2}a$
$\triangle ABB_1 \backsim \triangle B_1CP$ だから $AB:B_1C=B_1B:PC$
$a:\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a:PC$
$PC=\frac{1}{4}a$
よって $T=a^2$，$S=a^2-\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{4}a=\frac{11}{16}a^2$
$S:T=\frac{11}{16}a^2:a^2=11:16$
(2)
AB＝a とおくと
$BB_1=ka$ と表せる。
よって正方形 $AB_1C_1D_1=a^2+k^2a^2=(1+k^2)$
$a^2=(1+k^2)$(正方形 ABCD)
$AB_1=b$ とおくと
$B^1B^2=bk$ と表せる。
よって正方形 $AB_2C_2D_2=b^2+k^2b^2=(1+k^2)b^2=(1+k^2)$(正方形 $AB_1C_1D_1$)$=(1+k^2)^2$ (正方形 ABCD)
同様にして正方形 $AB_3C_3D_3=(1+k^2)^3$ (正方形 ABCD)
正方形 $AB_4C_4D_4=(1+k^2)^4$ (正方形 ABCD)
正方形 $AB_4C_4D_4$ は (正方形 ABCD) の $\frac{81}{16}$ 倍だから
$(1+k^2)^4=\frac{81}{16}$
$(1+k^2)^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4$
$1+k^2>0$ より
$1+k^2=\frac{3}{2}$
$k^2=\frac{1}{2}$
$k>0$ より
$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

【問 15】

図Ⅰのように，円 O に点 A で接する直線ℓ と，点 B で接する直線 m が点 C で交わり，∠ACB は鋭角である。また，線分 AO の延長と直線 m との交点を D とするとき，次の1～3の問いに答えなさい。

（宮崎県 2007 年度）

図Ⅰ



問1．∠ACB＝65° のとき，∠ADC の大きさを求めなさい。

問2．∠ACO＝∠BCO であることを証明しなさい。

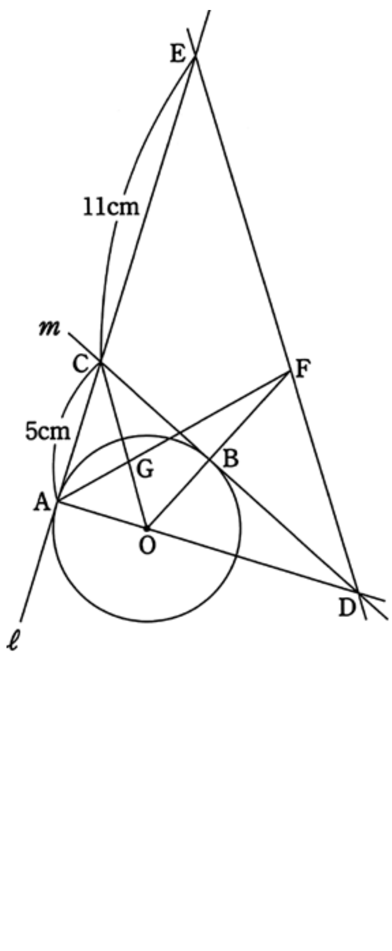
問3．図Ⅱは，図Ⅰにおいて，点 D を通り線分 OC に平行な直線と直線ℓ との交点を E，線分 OB の延長と線分 DE との交点を F，線分 OC と AF との交点を G としたものである。

AC＝5cm，CE＝11cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 円 O の半径を求めなさい。

(2) △AGC の面積と△AOG の面積の比を求めなさい。

図Ⅱ



解答欄

問1		∠ADC＝　　　　　度
問2		証明
問3	(1)	cm
	(2)	△AGC：△AOG＝　　：

解答
問1　$\angle ADC = 25$ 度
問2
証明
$\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ で
円の接線はその接点を通る半径に垂直なので
$\angle CAO = \angle CBO = 90^\circ$…①
円の半径は等しいので
$OA = OB$…②
共通な辺だから
$OC = OC$…③
①, ②, ③から
直角三角形の斜辺と他の 1 辺が, それぞれ等しいので
$\triangle ACO \equiv \triangle BCO$
よって $\angle ACO = \angle BCO$
問3
(1)　$\dfrac{5\sqrt{6}}{4}$ cm
(2)　$\triangle AGC : \triangle AOG = 5 : 3$
解説
問3
(1)
$CO \parallel ED$ より, 錯角だから
$\angle DCO = \angle CDE$…①
同位角だから
$\angle ACO = \angle CED$…②
問2より
$\angle ACO = \angle DCO$…③
①, ②, ③より
$\angle CED = \angle CDE$
よって $CD = CE = 11$
$\triangle ACD$ で三平方の定理より
$AD = \sqrt{11^2 - 5^2} = 4\sqrt{6}$
$CO \parallel ED$ より
$AO : AD = AC : AE = 5 : 16$
$AO = \dfrac{5}{16} AD = \dfrac{5}{16} \times 4\sqrt{6} = \dfrac{5\sqrt{6}}{4}$ cm
(2)
$\triangle AGC : \triangle AOG = CG : GO$
$CO \parallel ED$ より
$CG : EF = GO : FD = 5 : 16$
よって $CG : GO = EF : FD$
ここで 2 組の角が等しいので
$\triangle COB \backsim \triangle DFB$
よって, $CO : DF = CB : DB$
$CB = CA = 5$, $DB = 11 - 5 = 6$ より
$CO : DF = 5 : 6$
$AC : AE = CO : ED = 5 : 16$ より
$CG : GO = EF : FD = (16 - 6) : 6 = 5 : 3$
よって, $\triangle AGC : \triangle AOG = 5 : 3$