9. 式の証明の問題（2006 年度出題）

【問 1】

連続するいくつかの自然数があります。これらの自然数のうちでもっとも小さい自然数を a, 連続する自然数の個数を b とするとき, 連続する自然数の積を（a ☆ b）と表すことにします。

例えば（5 ☆ 4）は, もっとも小さい自然数が 5 で, 連続する 4 個の自然数の積となるので, 右のように,（5 ☆ 4）の値は 1680 になります。

（5 ☆ 4）＝5×6×7×8
＝1680

次の(1)～(3)に答えなさい。

（北海道 2006 年度）

(1)（8 ☆ 3）の値を求めなさい。

(2) $\dfrac{(3 ☆ x)}{(2 ☆ x)}=3$ となるとき, x の値を求めなさい。

(3)（y ☆ 2）と $\dfrac{(y ☆ 2)}{y}$ の和は自然数の 2 乗になることを証明しなさい。

ただし, y は自然数とします。

解答欄

(1)	
(2)	$x=$
(3)	(証明)

解答

(1) 720

(2) $x=4$

(3)

$$(y☆2)+\frac{(y☆2)}{y} = y(y+1)+\frac{y(y+1)}{y} \cdots①$$

$$=y^2+2y+1$$

$$=(y+1)^2 \cdots②$$

y は自然数だから $y+1$ は自然数である。

よって $(y☆2)$ と $\frac{(y☆2)}{y}$ の和は自然数の 2 乗となる。

解説

(2)

$(3☆x)=3\times4\times5\times\cdots\times(3+x-1)$

$(2☆x)=2\times3\times4\times\cdots\times(2+x-1)$

$$\frac{(3☆x)}{(2☆x)}=\frac{3+x-1}{2}$$

この値が 3 より

$$\frac{3+x-1}{2}=3$$

$3+x-1=6$

$x=4$

(3)

$$(y☆2)+\frac{(y☆2)}{y}$$

$$=y(y+1)+\frac{y(y+1)}{y}$$

$=y^2+y+y+1$

$=y^2+2y+1$

$=(y+1)^2$

【問 2】

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

（宮城県　2006 年度）

(1) 2 つの整数の積が 49 となるとき，その 2 つの整数の組をすべて求めなさい。

(2) a, b が正の整数のとき，$a^2=b^2+49$ が成り立つような a と b の値を求めなさい。解き方も書きなさい。

解答欄

(1)	
(2)	[解き方] [答え]　$a=$　　　　，$b=$

解答

(1)　1 と 49，7 と 7，－1 と－49，－7 と－7

(2)

$a^2=b^2+49$ を変形して

$(a+b)(a-b)=49$

a, b は正の整数だから

$a+b$ は正の整数となる。

よって $a-b$ も正の整数となる。

したがって(1)から

$a-b=1$

$a+b=49$

これより $a=25$, $b=24$

答え　$a=25$, $b=24$

【問 3】

連続する 3 つの自然数がある。この 3 つの自然数のそれぞれの平方の和が 365 であるとき, 連続する 3 つの自然数を求めなさい。

（秋田県　2006 年度）

解答欄

解答

10, 11, 12

解説

3 つの連続する自然数を $n-1$, n, $n+1$ とおく。

平方の和が 365 より

$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=365$

$3n^2=363$

$n^2=121$

n は自然数より

$n=11$

よって求める数は 10, 11, 12

【問 4】

一の位が 0 でない 2 けたの自然数と, その自然数の一の位の数と十の位の数を入れかえてできる自然数との和は, 11 の倍数になる。このことを, もとの自然数の十の位の数を a, 一の位の数を b として, 式を用いて説明しなさい。

（栃木県 2006 年度）

解答欄

解答

もとの自然数は $10a+b$ と表せる($b\neq0$)。

一の位と十の位の数を入れかえた自然数は $10b+a$ と表せる。

これらの和は

$(10a+b)+(10b+a)$

$=11a+11b$

$=11(a+b)$

$a+b$ は自然数だから

$11(a+b)$ は 11 の倍数である。

したがって

もとの自然数とその自然数の一の位の数と十の位の数を入れかえた自然数との和は 11 の倍数になる。

解説

もとの自然数の十の位の数を a, 一の位の数字を b とすると

2 けたの自然数は $10a+b$ と表せる。

また十の位の数字と一の位の数字を入れかえた自然数は $10b+a$ と表せる。

よってこの 2 数の和は

$(10a+b)+(10b+a)$

$=11a+11b$

$=11(a+b)$

$a+b$ は自然数より 11×(自然数)は 11 の倍数である。

【問 5】

ある中学校の数学の授業で，［先生が示した問題］を皆で考えた後，生徒一人一人が図形の条件を変えて問題づくりに取り組んだ。

次の各問に答えよ。

（東京都　2006 年度）

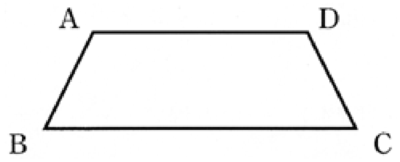
［先生が示した問題］

a，b，h を正の数とする。

右の図 1 で，四角形 ABCD は，AD // BC，AD＝a cm，BC＝b cm の台形であり，頂点 A から 2 つの頂点 B，C を通る直線までの距離は h cm である。

四角形 ABCD の面積を P cm^2 とするとき，P を a，b，h を用いた式で表しなさい。

図 1



S さんは，［先生が示した問題］の答えを次の形の式で表した。S さんの答えは正しかった。

〈S さんの答え〉　$\mathrm{P}=\dfrac{1}{2}h\left(\boxed{}\right)$

問1 〈S さんの答え〉の $\boxed{}$ に当てはまる式を書け。

T さんは，次の問題をつくった。

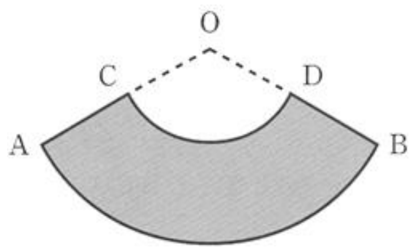
［T さんがつくった問題］

a を 0 より大きく 180 より小さい数，c，d，r，ℓ，m を正の数，$c>d$ とする。

右の図 2 で， で示した図形は，半径が c cm，中心角が∠AOB＝$a°$ のおうぎ形 OAB に，半径が d cm，中心角が∠COD＝$a°$ のおうぎ形 OCD を，点 C，点 D が，それぞれ半径 OA，半径 OB 上にあるようにつくり，おうぎ形 OAB からおうぎ形 OCD を除いた残りの図形を表している。

 で示した図形の面積を Q cm^2 とする。

CA＝r cm，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$＝$\ell$ cm，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$＝$m$ cm とするとき，$\mathrm{Q}=\dfrac{1}{2}r(\ell+m)$となることを確かめなさい。



問2 ［T さんがつくった問題］で，$\mathrm{Q}=\dfrac{1}{2}r(\ell+m)$ となることを証明せよ。

ただし，円周率は π とする。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕 $\mathrm{Q}=\dfrac{1}{2}r(\ell+m)$

解答

問1　$a+b$

問2

〔証明〕

$\mathrm{Q}=\pi c^2\times\dfrac{a}{360}-\pi d^2\times\dfrac{a}{360}=\dfrac{\pi a}{360}(c^2-d^2)=\dfrac{\pi a}{360}(c+d)(c-d)\cdots(1)$

また $r=c-d$

$\ell+m=2\pi d\times\dfrac{a}{360}+2\pi c\times\dfrac{a}{360}=\dfrac{\pi a}{180}(c+d)$

よって

$\dfrac{1}{2}r(\ell+m)=\dfrac{1}{2}\times(c-d)\times\dfrac{\pi a}{180}(c+d)=\dfrac{\pi a}{360}(c+d)(c-d)\cdots(2)$

(1), (2)より

$\mathrm{Q}=\dfrac{1}{2}r(\ell+m)$

解説

問1

対角線 AC を結ぶ。

四角形 ABCD の面積 $\mathrm{P}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}bh+\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}h(a+b)$

【問 6】

下の図のように，1 から 8 までの数字を 1 つずつ書いた 8 枚のカードがある。

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

これらを裏返し，よくきってから 2 枚または 3 枚のカードを同時に取り出し，書かれている数字を並べてつくることのできる整数のうち，最も大きな整数から最も小さな整数をひいた数を，A と表すことにする。

たとえば，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$の 2 枚のカードを同時に取り出したときは，$A=31-13=18$ であり，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$の 3 枚のカードを同時に取り出したときは，$A=431-134=297$ である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

ただし，$\boxed{6}$のカードの上下を逆にして，$\boxed{9}$として用いないこととする。

（三重県　2006 年度）

問1 $\boxed{4}$，$\boxed{8}$の 2 枚のカードを同時に取り出したときの A の値を求めなさい。

問2 2 枚のカードを同時に取り出したとき，A のとる値は必ず 9 の倍数になる。このことを，取り出したカードに書かれている数字のうち，大きい方の数を x，小さい方の数を y として，説明しなさい。

問3 3 枚のカードを同時に取り出したときの A のとる値のうち，最も大きい値を求めなさい。

問4 3 枚のカードを同時に取り出し，そのうちの 2 枚が$\boxed{2}$，$\boxed{6}$のカードであったとき，A のとる値は全部で何通りあるか，求めなさい。

解答欄

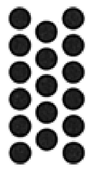
問1	
問2	〈説明〉
問3	
問4	通り

解答
問1　36
問2
〈説明〉
カードに書かれている数字を並べてつくることのできる 2 けたの整数のうち
大きい方の整数は $10x+y$ 小さい方の整数は $10y+x$ と表されるので
A のとる値は次のようになる。
$(10x+y)-(10y+x)$
$=10x+y-10y-x$
$=9x-9y$
$=9(x-y)$
ここで x，y はともに整数だから $x-y$ も整数なので $9(x-y)$ は 9 の倍数になる。
したがって A のとる値は必ず 9 の倍数になる。
問3　693
問4　3 通り
解説
問2
大きいほうの数が x，小さいほうの数を y とするとき
この 2 枚でできる最も大きい数は $10x+y$
最も小さな数は $10y+x$
よってその差は
$(10x+y)-(10y+x)$
$=9x-9y$
$=9(x-y)$
$x-y$ は整数だから
$9(x-y)$ は 9 の倍数である。
問3
3 枚のカードの値を x，y，z $(x>y>z)$ とする。
$A=100x+10y+z-(100z+10y+x)=99x-99z=99(x-z)$
よって A の値が最も大きくなるのは
$x-z$ の値が最も大きくなるときだから
$x=8$，$z=1$ のときでその値は $99\times(8-1)=693$
問4
残りのカードが 1 のとき $A=99\times(6-1)=99\times5$
残りのカードが 3，4，5 のとき $A=99\times(6-2)=99\times4$
残りのカードが 7 のとき $A=99\times(7-2)=99\times5$
残りのカードが 8 のとき $A=99\times(8-2)=99\times6$
よって A の値は 99×5，99×4，99×6 の 3 通り。

【問 7】

T さんは，ある店で箱に「17 個入り」と表示された商品をみつけた。個数が 17 という 2 けたの素数であることに注目して，中の品物の並び方を調べたところ，図 I のような並び方になっていた。図 1 において，●は 1 個分の品物を示している。T さんは，この並び方に興味をもち，模式図をかいて考えてみた。

図 I



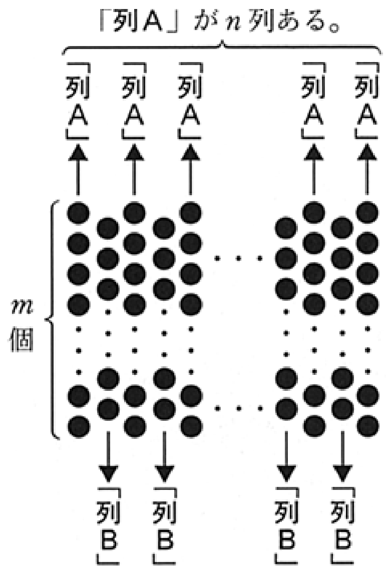
m 個の●を縦に並べたものを「列 A」で表し，「列 A」より個数を 1 個少なくして●を縦に並べたものを「列 B」で表すことにする。

図Ⅱにおいて，「列 A」と「列 B」は，左から右へ交互に並べられている。左端，右端にあるのはいずれも「列 A」である。「列 A」は n 列あるとする。図Ⅱで示したとおりに配置されているすべての●の個数を S とする。

m，n を 2 以上の自然数として，次の問いに答えなさい。

（大阪府 2006 年度 前期）

図Ⅱ



問1 n の値が m の値と等しい場合を考える。この場合において，$S=365$ となるときの m の値を求めなさい。

問2 n の値が m の値より 1 大きい場合を考える。この場合の S の値は素数にはならない。その理由を書きなさい。

解答欄

問1	
問2	

解答
問1　14
問2
$n=m+1$ だから
$S=m(m+1)+(m-1)m=2m^2$ …①
m は 2 以上の自然数である。…②
①, ②より
S の値は 2 より大きく 1 と S 以外に 2 を約数にもつ。
したがって S の値は素数にはならない。
解説
問1
$m=n$ より
m 個並んだ列 A が m 列と
$(m-1)$個並んだ列 B が$(m-1)$列より
総数 S は
$m^2+(m-1)^2=2m^2-2m+1$ 個
$S=365$ より
$2m^2-2m+1=365$
$2m^2-2m-364=0$
$m^2-m-182=0$
$(m-14)(m+13)=0$
$m>0$ より
$m=14$

【問 8】

雄太さんと由加さんは，連続する 3 つの整数について成り立つことを話し合った。次の $\boxed{}$ 内の会話を読んで，各問いに答えよ。

（奈良県 2006 年度）

雄太：連続する 3 つの整数が「3，4，5」のとき，最も小さい数とまん中の数の積は $3\times4=12$，3 つの数の和も $3+4+5=12$ となって，A 最も小さい数とまん中の数の積は，3 つの数の和に等しいね。

由加：でも，それは「2，3，4」のときは成り立たないね。

雄太：確かにそうだね。B 最も大きい数の 2 乗から最も小さい数の 2 乗をひいた数は，まん中の数の $\boxed{}$ に等しいというのは，いつも成り立ちそうだよ。

由加：そうね。C 最も小さい数と最も大きい数の積は，まん中の数の 2 乗から 1 をひいた数に等しいということも，いつも成り立ちそうね。

問1 下線部 A が成り立つ，「3，4，5」以外の連続する 3 つの整数を求めたい。

(1) 下線部 A について，連続する 3 つの整数のうち，最も小さい数を x として方程式をつくれ。

(2) 下線部 A が成り立つ，「3，4，5」以外の連続する 3 つの整数を求めよ。

問2 下線部 B は，$\boxed{}$ に次のア～カの語句のうちどれか 1 つをあてはめると，連続する 3 つの整数についていつも成り立つ。それは，どの語句をあてはめたときか。1 つ選び，その記号を書け。

ア 2乗　イ 3乗　ウ 4乗　エ 2倍　オ 3倍　カ 4倍

問3 下線部 C が，連続する 3 つの整数についていつも成り立つことを，最も小さい数を n として証明せよ。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	
問2		
問3	〔証明〕	

解答
問1
(1) $x(x+1)= x+(x+1)+(x+2)$
(2) $-1, 0, 1$
問2 カ
問3
〔証明〕
最も小さい数を n とするとまん中の数は $n+1$ 最も大きい数は $n+2$ と表される。
最も小さい数と最も大きい数の積は $n(n+2)=n^2+2n$
まん中の数の 2 乗から 1 をひいた数は
$(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n$
したがって下線部 C は連続する 3 つの整数についていつも成り立つ。
解説
問1
(1)
最も小さい数を x とすると連続する 3 つの数のまん中の数は $x+1$ 最も大きい数は $x+2$ と表せる。
よって $x(x+1)=x+(x+1)+(x+2)$
(2)
(1)の式を整理して
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$x=3, -1$
よって $x=-1$
3 つの数は$-1, 0, 1$
問2
$(x+2)^2-x^2=x^2+4x+4-x^2=4x+4=4(x+1)$
よってまん中の数の 4 倍だからカ

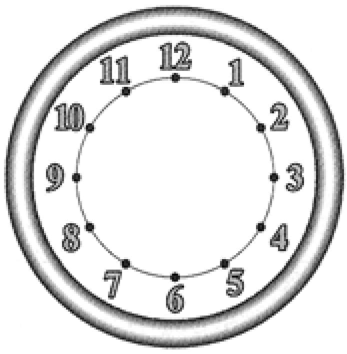
【問 9】

図1のように，円周を 12 等分する点に，それぞれ 1 から 12 の数字が書かれている時計の文字盤がある。

次の問1～問3に答えなさい。

（山口県　2006 年度）

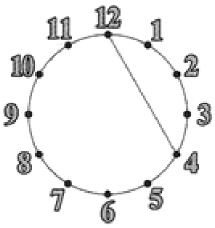
図1



問1　次の $\boxed{}$ にあてはまる数をすべて答えなさい。

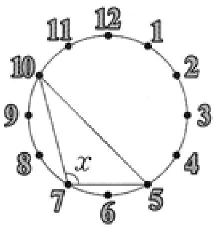
> 図2のように，4 と 12 の数字が書かれている 2 つの点が結んである。この 2 点と $\boxed{}$ の数字が書かれている点を結ぶと直角三角形ができる。

図2



問2　図3のように，5，7，10 の 3 つの数字が書かれている点を結んでできた三角形がある。このとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

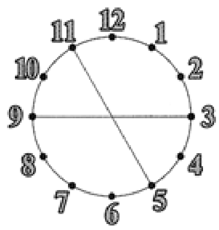
図3



問3　1 から 12 の数のうち，図 4 の 3 と 9，5 と 11 のように向かい合う位置にある 2 つの数について，次のことが成り立つ。

> どの 2 つの数についても
>
> $9^2-3^2=72$，$11^2-5^2=96$
>
> のように，それぞれを 2 乗した数の差は，12 でわり切れる。

図 4



このわけを，向かい合う位置にある 2 つの数のうち，小さい方を n とし，大きい方を n を使った式で表して説明しなさい。

解答欄

問1	
問2	度
問3	$\boxed{\text{説明}}$

解答
問1　6，10
問2　105 度
問3
$\boxed{\text{説明}}$
小さい方の数が n のとき，大きい方の数は $n+6$ と表せる。
このとき，それぞれを 2 乗した数の差は
$(n+6)^2-n^2$
$=n^2+12n+36-n^2$
$=12n+36$
$=12(n+3)$
$n+3$ は整数なので，$12(n+3)$は 12 でわり切れる。
よって向かい合う位置にある 2 つの数について
それぞれを 2 乗した数の差は，12 でわり切れる。
解説
問1
直径に対する円周角は 90° より斜辺が直径のとき直角三角形になる。
よって 6 または 10

【問 10】

右の図は，ある学級の座席表に 1 から 36 までの整数を順に記入し，教卓に近いほうから順に 1 列目，2 列目，･･･，6 列目としたものである。

図の 2 列目の $\boxed{2 \mid 8 \mid 14}$ の 2，8，14 や 4 列目の $\boxed{10 \mid 16 \mid 22}$ の 10，16，22 のように，「図の同じ列でとなり合ってならんだ 3 つの整数において，最も大きい整数の 2 乗からまん中の整数と最も小さい整数の積をひいた数は，18 でわりきれる」ことの証明を，$\boxed{}$ の中に完成せよ。

教卓

1	7	13	19	25	31	････1 列目
2	8	14	20	26	32	････2 列目
3	9	15	21	27	33	････3 列目
4	10	16	22	28	34	････4 列目
5	11	17	23	29	35	････5 列目
6	12	18	24	30	36	････6 列目

（福岡県　2006 年度）

(証明)　となり合ってならんだ 3 つの整数のまん中の数を n とする。

解答欄
上の枠に解答しなさい。
解答
最も小さい整数は $n-6$，最も大きい整数は $n+6$ である。
最も大きい整数の 2 乗からまん中の整数と最も小さい整数の積をひいた数は
$(n+6)^2-n(n-6)$
$=n^2+12n+36-n^2+6n$
$=18n+36$
$=18(n+2)$
であり 18×(整数)となる。
だから最も大きい整数の 2 乗からまん中の整数と最も小さい整数の積をひいた数は 18 でわりきれる。
解説
3 つの整数は小さい方から順に $n-6$，n，$n+6$ と表せる。
最も大きい整数の 2 乗からまん中の整数と最も小さい整数の積をひいた数は
$(n+6)^2-n(n-6)=n^2+12n+36-n^2+6n=18n+36=18(n+2)$
$n+2$ は整数だから 18×(整数) は 18 の倍数より 18 でわりきれる。