

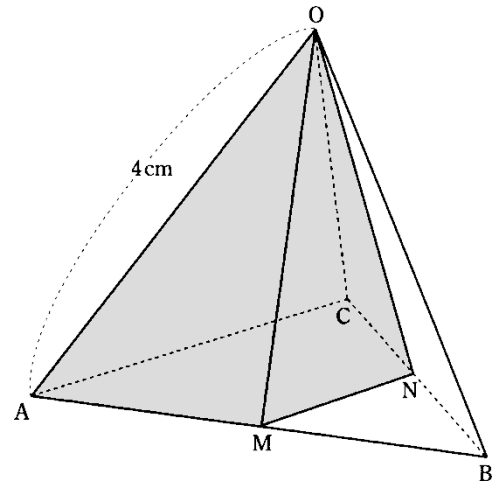
5.空間図形の複合問題 (長さ・面積・体積・角度ほか)【2002 年度出題】

【問 1】

図のように、1辺の長さが 4 cm の正四面体 $OABC$ があります。この正四面体の辺 AB , BC の中点をそれぞれ M , N とし、3点 O , M , N を通る平面でこの正四面体を切り、立体 $OAMNC$ をつくります。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(岩手県 2002 年度)



- (1) 立体 OAMNC の面の数を求めなさい。

- (2) 立体 OAMNC の表面積を求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm ²

解答

(1) 5

(2) $\sqrt{11} + 11\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

(1)

立体 OAMNC の面は $\triangle OAC$, $\triangle OAM$, $\triangle OMN$, $\triangle OCN$, 台形 ACNM の5つである。

(2)

$\triangle OAC$ は1辺が 4 cm の正三角形であるから AC の中点を L とすると

$\angle OLA = 90^\circ$

AL=2

三平方の定理より $OL = 2\sqrt{3}$

よって $\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

また $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$

$\triangle OAB = \triangle OAC = 4\sqrt{3}$ だから

$\triangle OAM = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

同様にして $\triangle OCN = 2\sqrt{3}$

$MN = \frac{1}{2} AC = 2$

MN の中点を P とすると

$\angle OPM = 90^\circ$, $MP = 1$, $OM = OL = 2\sqrt{3}$

三平方の定理より $OP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{12-1} = \sqrt{11}$

よって $\triangle OMN = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{11} = \sqrt{11}$

また $PL = \frac{1}{2} BL = \sqrt{3}$

台形 ACNM の面積 $= \frac{1}{2} \times (MN + AC) \times PL = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

よって

立体 OAMNC の表面積 $= \triangle OAC + \triangle OAM + \triangle OCN + \triangle OMN + \text{台形 ACNM の面積}$

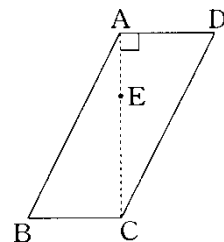
$= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{11} + 3\sqrt{3}$

$= \sqrt{11} + 11\sqrt{3} \text{ cm}^2$

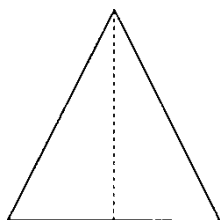
【問 2】

図の四角形 ABCD は、平行四辺形であり、 $AD=6\text{ cm}$ 、 $AC=12\text{ cm}$ 、 $\angle DAC=90^\circ$ である。また、点 E は線分 AC 上の点で $AE=4\text{ cm}$ である。この平行四辺形 ABCD を AC を軸とし、1回転させて立体をつくった。

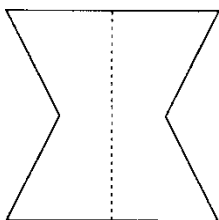
(秋田県 2002 年度)



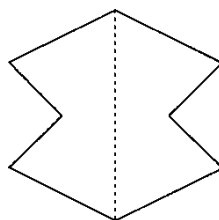
- ① この立体を、回転の軸をふくむ平面で切ったとき、切り口の形を表すものを次のア～エから1つ選び、記号を書きなさい。



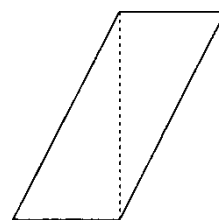
ア



イ



ウ



エ

- ② この立体を、点 E を通り、回転の軸に垂直な平面で切ったとき、その切り口の面積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

①	
②	cm^2

解答

① イ

② $16\pi\text{ cm}^2$

解説

①

平面図形を1回転させてつくった立体を回転の軸をふくむ平面で切ったとき
切り口は

元の図形と元の図形を軸にそって線対称に移動させた図形と合わせたものになる。

②

右図のように点 E を通り AD と平行な直線を引き CD との交点を F とすると
切り口はこの EF を半径とした円である。

また $EF=x\text{ cm}$ とすると

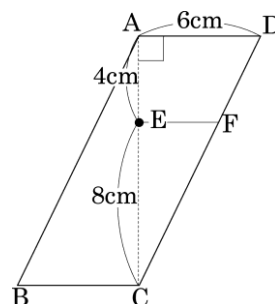
$\triangle ACD \sim \triangle ECF$ より

$x:6=8:12$ より

$x=4\text{ cm}$

よって切り口の面積は

$\pi \times 4^2 = 16\pi\text{ cm}^2$



【問 3】

1辺の長さが a cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。図1のように立方体の表面に対角線 BD , DE , EB をひき、立方体の表面の、点 A を頂点とする $\triangle ABD$, $\triangle ADE$, $\triangle AEB$ に色を塗った。

(山形県 2002 年度)

(1) この立方体の表面の、色を塗った部分の面積を求めなさい。

図1

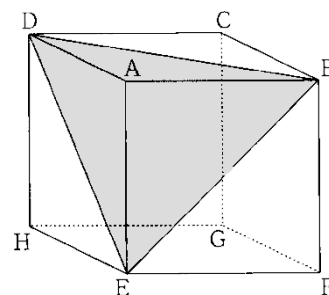
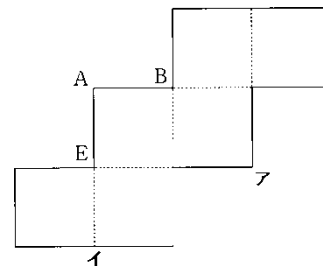


図2

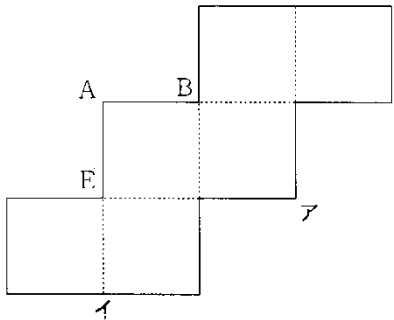
(2) この立方体を、頂点 A を通る3辺、頂点 G を通る3辺、さらにもう1つの辺で切り、色を塗った面を表にして開いたら、その展開図の形は図2のようになった。

① 色を塗った部分はどこか。図2の展開図に  のような斜線で示しなさい。



② 展開図のア、イにあたる点を、立方体の頂点 $A \sim H$ からそれぞれ1つずつ選び、記号で答えなさい。

解答欄

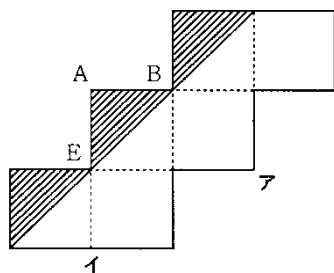
(1)	cm ²		
(2)	①		
	②	ア	
		イ	

解答

(1) $\frac{3}{2}a^2 \text{ cm}^2$

(2)

①



②

ア G

イ H

解説

(1)

$\triangle ABD \equiv \triangle ADE \equiv \triangle AEB$ だから面積はみな等しい。

よって色を塗った部分の面積は $\frac{1}{2} \times a \times a \times 3 = \frac{3}{2}a^2 \text{ cm}^2$

(2)

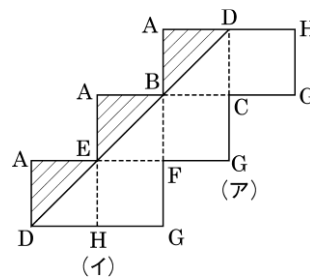
①

図2の展開図に頂点の記号を書き入ると図のようになり

$\triangle ABD$, $\triangle ADE$, $\triangle AEB$ に色を塗る。

②

図よりアは点 G, イは点 H である。



【問 4】

図1のような、四角すい $O-ABCD$ の容器がある。上の面の四角形 $ABCD$ は1辺の長さが 6 cm の正方形であり、4つの側面はすべて O から対辺に引いた垂線の長さが 9 cm の二等辺三角形である。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(福島県 2002 年度)

図1

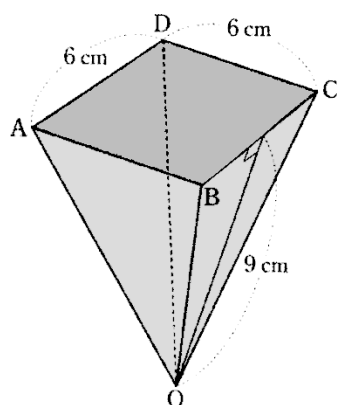
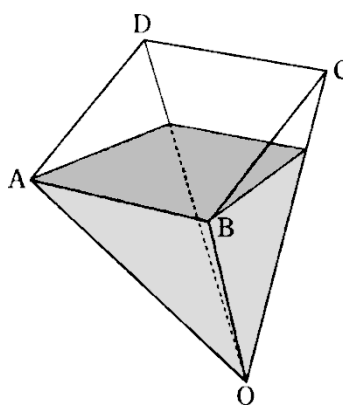


図2



(1) この容器に水が満たされているとき、頂点 O から水面までの高さを求めなさい。(図1)

(2) AB を水平にしたままこの容器をゆっくりと傾け、側面 OCD が水面に対して垂直になるまで水を流し出した。

(図2) このとき、頂点 O から水面までの高さを求めなさい。

(3) (2)において、水面が作る図形の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm
(3)	cm^2

解答

(1) $6\sqrt{2}$ cm

(2) 7cm

(3) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm²

解説

(1)

辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とする。

点 O, M, N を通る平面でこの容器を切断したときの切り口は右の図のようになる。

点 O から対辺に引いた垂線 OH の長さが頂点 O から水面までの高さである。

三平方の定理より $\sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm

(2)

側面 OCD が水面に対して垂直になるとき△OMN は右の図のようになる。

点 M から辺 ON に引いた垂線を MP とし PO = x cm とすると

三平方の定理より

$$MO^2 - PO^2 = MN^2 - NP^2$$

$$9^2 - x^2 = 6^2 - (9 - x)^2$$

$$81 - x^2 = 36 - (81 - 18x + x^2)$$

$$18x = 126$$

$$x = 7$$

よって頂点 O から水面までの高さは 7 cm

(3)

(2)のとき水面が辺 CO, DO と交わる点をそれぞれ E, F とすると

四角形 ABEF は AB // FE の台形である。

△OEF ∽ △OCD より

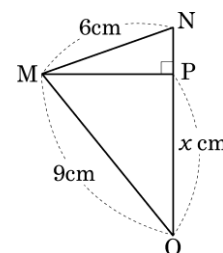
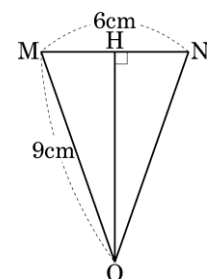
$$EF : CD = OP : ON$$

$$EF = \frac{14}{3}$$

台形 ABEF の高さは MP の長さで表されるから

$$MP = \sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{求める面積} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{14}{3} + 6 \right) \times 4\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$$



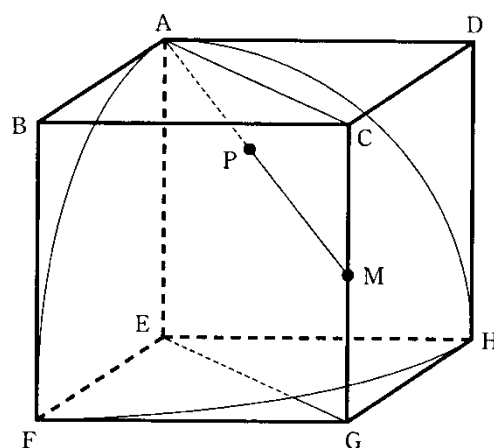
【問 5】

図のように、1辺の長さが 4 cm の立方体 ABCDEFGH があり、その内部に、点 E を中心とする半径 4 cm の球の $\frac{1}{8}$ の部分が入っている。辺 CG の中点を M とし、点 A と点 M とを結ぶ。線分 AM と球の表面との交点で、A 以外の点を P とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(茨城県 2002 年度)

(1) 四角形 AEGC の面積を求めなさい。



(2) 線分 AP の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm ²
(2)	cm

解答

(1) $16\sqrt{2}\text{ cm}^2$

(2) $\frac{8}{3}\text{ cm}$

解説

(1)

EG は正方形 EFGH の対角線であるから $EG = \sqrt{2} FG = 4\sqrt{2}\text{ cm}$

よって四角形 AEGC $= 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\text{ cm}^2$

(2)

点 P, M から辺 AE に垂線を引き交点をそれぞれ Q, N とする。

図のように立方体の切断面である長方形 AEGC 上で考える。

$AN = CM = 2\text{ cm}$, $NM = EG = 4\sqrt{2}\text{ cm}$ より

直角三角形 ANM に三平方の定理を用いると

$$AM = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 32} = 6\text{ cm}$$

$AP = x\text{ cm}$ とおくと

$\triangle AQP \sim \triangle ANM$ より

$AP : AQ : QP = AM : AN : NM = 6 : 2 : 4\sqrt{2} = 3 : 1 : 2\sqrt{2}$ だから

$$AQ = \frac{1}{3}x\text{ cm}, QP = \frac{2\sqrt{2}}{3}x\text{ cm}$$

$$EQ = AE - AQ = 4 - \frac{1}{3}x\text{ cm}$$

$EP = 4\text{ cm}$

直角三角形 QEP に三平方の定理を用いて

$$(4 - \frac{1}{3}x)^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3}x)^2 = 4^2$$

$$16 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}x^2 + \frac{8}{9}x^2 = 16$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x = 0$$

$$x(x - \frac{8}{3}) = 0$$

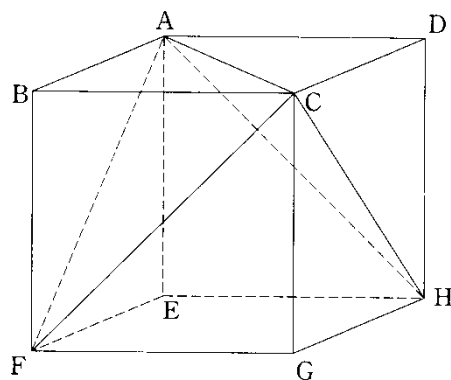
$$x = 0, \frac{8}{3}$$

$$AP = \frac{8}{3}\text{ cm}$$

【問 6】

図は1辺の長さが 4 cm の立方体である。この立方体を3点 A, C, F を通る平面と、3点 A, C, H を通る平面で切って、3つの立体に分けると、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(群馬県 2002 年度)



(1) 三角形 ACF の面積を求めなさい。

(2) 頂点 G を含む立体の体積を求めなさい。

(3) 頂点 G を含む立体の展開図を、コンパスと定規を用いてかきなさい。

解答欄

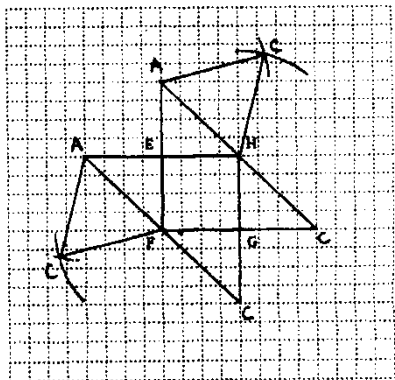
(1)	cm ²
(2)	cm ³
(3)	正方形 EFGH は下の図のとおりとする。

解答

(1) $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(2) $\frac{128}{3} \text{ cm}^3$

(3)



解説

(1)

$\triangle ACF$ は一辺の長さが $4\sqrt{2} \text{ cm}$ の正三角形。

正三角形の高さは一辺の $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍であるから $4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$

よって $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(2)

立方体の体積から三角すい $F-ABC$ と $H-ACD$ の体積を引く。

2つの三角すいは合同だから

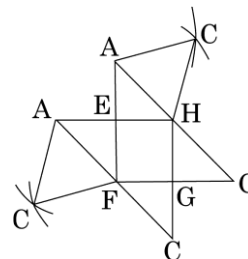
$$4^3 - 2 \times \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times 4 \right\} = \frac{128}{3} \text{ cm}^3$$

(3)

正方形 $EFGH$ を底面に

4つの合同な二等辺三角形と2つの合同な正三角形で残りの面が構成されている。

共通の頂点や辺に注意して展開図をかく。



【問 7】

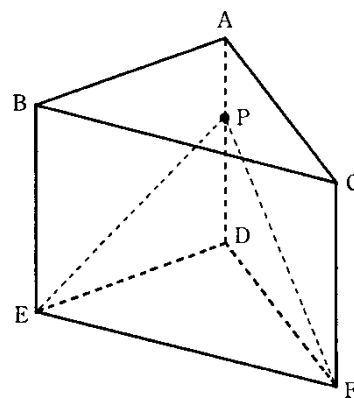
図に示した立体 ABC-DEF は $AB=AC=AD=4\text{ cm}$, $\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=90^\circ$ の三角柱である。辺 AD 上を動く点を P とする。点 P と頂点 E, 点 P と頂点 F をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2002 年度)

問1. $\angle PEF$ の大きさを a° として, a のとる値の範囲を次の不等式で表せ。

$$\leq a \leq$$



問2. $\triangle DEF$ の面積を $S\text{ cm}^2$, $\triangle PEF$ の面積を $T\text{ cm}^2$ とする。 $S:T=2:3$ のとき, 線分 PD の長さは何 cm か。

ただし, 答えに根号がふくまれるときは, 根号をつけたままで表せ。

解答欄

問1	$\leq a \leq$
問2	cm

解答

問1 $45 \leq a \leq 60$

問2 $\sqrt{10}\text{ cm}$

解説

問1

$AE=AF=EF=4\sqrt{2}\text{ cm}$ より

$\triangle AEF$ は正三角形だから点 P が頂点 A にあるとき $\angle PEF=60^\circ$

また $\triangle DEF$ は直角二等辺三角形だから

点 P が頂点 D にあるとき $\angle PEF=45^\circ$

よって $45 \leq a \leq 60$

問2

$\triangle DEF$ と $\triangle PEF$ は辺 EF が共通だから

面積の比が $2:3$ のとき EF を底辺としたときの高さの比も $2:3$ となる。

よって EF の中点を M とすると

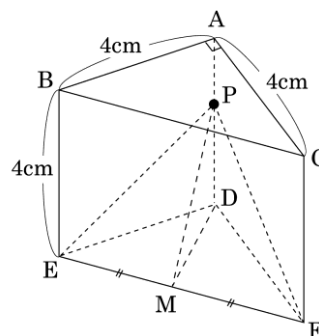
$DM:PM=2:3$

$DM=EM=\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$ より

$PM=3\sqrt{2}\text{ cm}$

$\triangle PDM$ に三平方の定理を用いて

$PD=\sqrt{PM^2-DM^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}\text{ cm}$



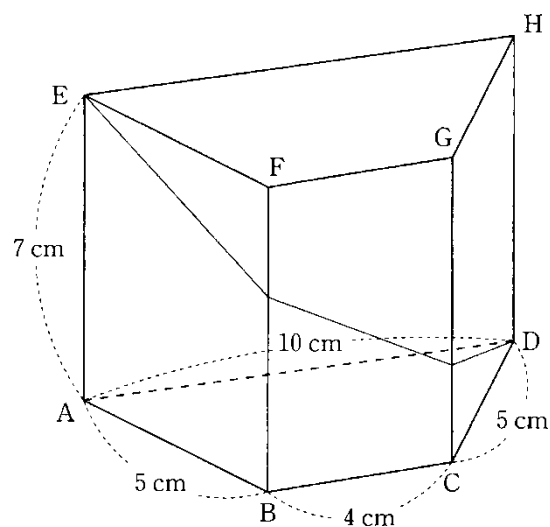
【問 8】

図は、辺 AD と辺 BC が平行で、 $AD=10\text{cm}$ 、 $BC=4\text{cm}$ 、 $AB=CD=5\text{cm}$ の台形 $ABCD$ を底面とし、 $AE=BF=CG=DH=7\text{cm}$ を高さとする四角柱である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2002 年度)

(ア) この四角柱の側面上に、頂点 E から辺 BF と辺 CG に交わるように、頂点 D まで線を引く。このような線のうち、最も短い線の長さを求めなさい。



(イ) 平行な2つの線分 AD 、 FG をふくむ平面でこの四角柱を切り、2つの立体に分けると、頂点 B をふくむほうの立体の体積を求めなさい。

解答欄

(ア)	cm
(イ)	cm^3

解答

(ア) $7\sqrt{5}$ cm

(イ) 84 cm^3

解説

(ア)

引いた線と辺 BF, CG との交点をそれぞれ P, Q とすると
E, P, Q, D が一直線上に並ぶとき最も短い線となるので
右の展開図の一部で線分 ED の長さを求めればよい。

△EDH に三平方の定理を用いて

$$ED = \sqrt{EH^2 + HD^2} = \sqrt{14^2 + 7^2} = 7\sqrt{5} \text{ cm}$$

(イ)

頂点 B, C から辺 AD に引いた垂線をそれぞれ BI, CJ とすると

$$AI = JD = (10 - 4) \div 2 = 3$$

△ABI に三平方の定理を用いて

$$CJ = BI = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

頂点 B をふくむほうの立体の体積を V とすると

V は三角錐 FABI と三角柱 FBI-GCJ と

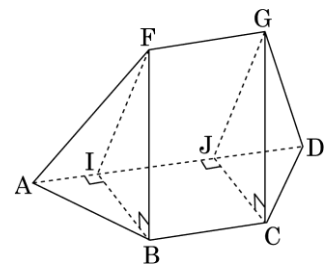
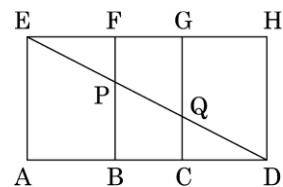
三角錐 GCJD の体積の和に等しい。

三角錐 GCJD = 三角錐 FABI

$$= \frac{1}{3} \times \triangle ABI \times FB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 7 = 14$$

$$\text{三角柱 FBI-GCJ} = \triangle FBI \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times 4 = 56$$

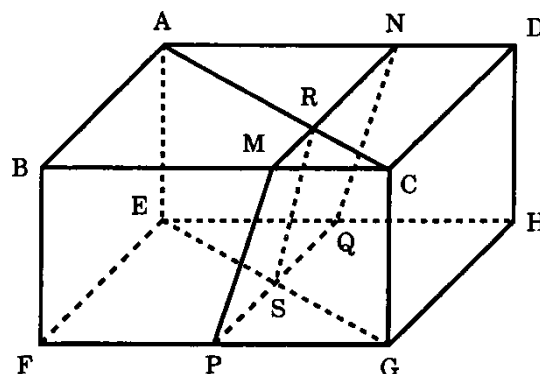
$$\text{よって } V = 14 \times 2 + 56 = 84 \text{ cm}^3$$



【問 9】

図のように、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $AD=6\text{ cm}$ 、 $AE=3\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 BC 、 AD をそれぞれ $2:1$ に分ける点を M 、 N とし、辺 FG 、 EH の中点を、それぞれ P 、 Q とする。対角線 AC と線分 MN の交点を R 、対角線 EG と線分 PQ の交点を S とするとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(新潟県 2002 年度)



(1) 線分 MR の長さを求めなさい。

(2) 立体 $MCR-PGS$ の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) 1 cm

(2) $\frac{19}{4}\text{ cm}^3$

解説

(1)

$\triangle ANR \sim \triangle CMR$ で相似比は $2:1$ である。

$MN=AB=3\text{ cm}$ 、 $NR:MR=2:1$ より

$$MR=3 \times \frac{1}{3}=1\text{ cm}$$

(2)

PM と GC 、 SR の延長は1点で交わりこの点を T とする。

図で $TC=x\text{ cm}$ とすると $TC:TG=MC:PG$

$$x:(x+3)=2:3$$

これを解くと

$$x=6$$

立体 $MCR-PGS$ の体積は

三角錐 $TPGS$ の体積から三角錐 $TMCR$ の体積をひいたものに等しい。

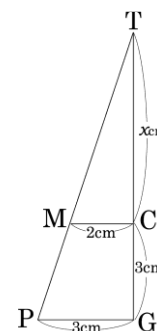
ここで $\triangle RMC$ は $\angle RMC=90^\circ$ の直角三角形

$\triangle SPG$ は $\angle SPG=90^\circ$ の直角三角形で

それぞれを底面とみると

三角錐 $TPGS$ 、 $TMCR$ の高さはそれぞれ $TG=9\text{ cm}$ 、 $TC=6\text{ cm}$ である。

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 \times 9 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 6 = \frac{27}{4} - 2 = \frac{19}{4}\text{ cm}^3$$



【問 10】

図の P, Q, R は、次のような立体である。

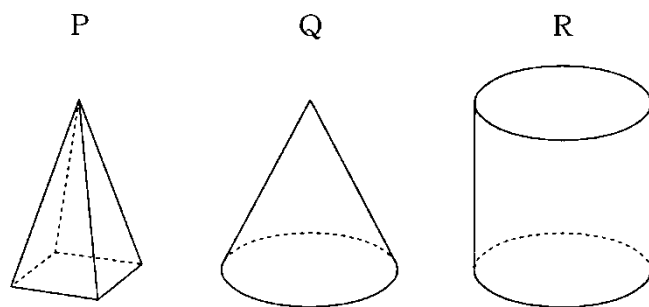
P 底面の正方形の1辺が r cm, 高さが h cm の正四角すい

Q 底面の半径が r cm, 高さが h cm の円すい

R 底面の半径が r cm, 高さが h cm の円柱

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2002 年度)



(1) P と Q の体積はどちらが大きい。また、その理由も述べよ。

(2) 底面の半径 r を 10 cm としたとき、Q と R の体積の和が半径 10 cm の球の体積と等しくなるような高さ h を求めよ。

解答欄

(1)	の方が体積は大きい。	
	(理由)	
(2)	cm	

解答

(1)

Qの方が体積は大きい。

理由

正四角すいも円すいも

$$\text{体積} = \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$$

$$\text{またPの底面積} = r^2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Qの底面積} = \pi r^2 \text{ cm}^2 \text{より}$$

$$\text{Pの底面積} < \text{Qの底面積}$$

さらに高さはP, Qとも h cmで等しいから

Qの方が体積は大きい。

(2) 10 cm

解説

(1)

$$\text{正四角すいも円すいも体積} = \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$$

$$\text{また P の底面積} = r^2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Q の底面積} = \pi r^2 \text{ cm}^2 \text{より}$$

$$\text{P の底面積} < \text{Q の底面積}$$

さらに高さはP, Qともに h cmで等しいからQの方が体積は大きい。

(2)

$$r = 10 \text{ cm より}$$

$$\text{Q の体積} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{100}{3} \pi h \text{ cm}^3$$

$$\text{R の体積} = \pi r^2 h = 100 \pi h \text{ cm}^3 \text{となるから}$$

QとRの体積の和は

$$\frac{100}{3} \pi h + 100 \pi h = \frac{400}{3} \pi h \text{ cm}^3 \cdots \textcircled{1}$$

半径 10cm の球の体積は

$$\frac{4}{3} \pi \times 10^3 = \frac{4000}{3} \pi \text{ cm}^3 \cdots \textcircled{2}$$

①=②より

$$\frac{400}{3} \pi h = \frac{4000}{3} \pi$$

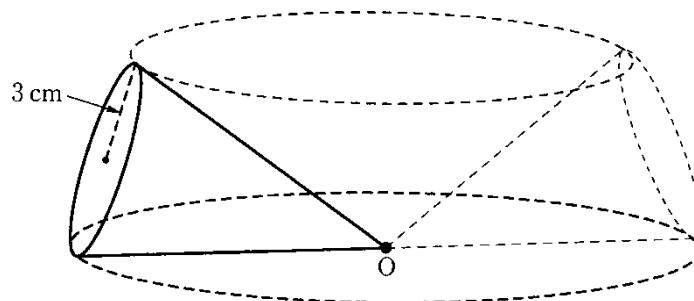
$$h = 10 \text{ cm}$$

【問 11】

図のように、底面の半径が 3 cm の円すいを、頂点 O を固定して、すべらないように水平な机の上を同じ方向に転がしたところ、円すいはちょうど3回転して元の位置にもどった。

このとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(山梨県 2002 年度)



(1) この円すいの母線の長さを求めなさい。

(2) この円すいの表面積を求めなさい。

(3) このように、円すいを元の位置にもどるまで転がしたとき、円すいが通ったあとにできる立体を考える。この立体を容器にして、上から水をいっぱい注ぐとき、容器に入る水の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ²
(3)	cm ³

解答

(1) 9 cm

(2) 36π cm²

(3) $\frac{196\sqrt{2}}{3}\pi$ cm³

解説

(1)

円すいの母線の長さを r cm とすると r を半径とする円周の長さは $2\pi r$ cm

この円周上を底面の半径が 3cm の円すいが3回転して元の位置にもどることより

$$6\pi \times 3 = 2\pi r$$

$$r = 9 \text{ cm}$$

(2)

おうぎ形の面積 $= \frac{1}{2} \times \text{弧の長さ} \times \text{半径}$ であるから

$$\text{円すいの側面積} = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 9 = 27\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{円すいの底面積} = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{よって円すいの表面積} = 27\pi + 9\pi = 36\pi \text{ cm}^2$$

(3)

円すいが通ったあとにできる立体を点 O を通る平面で垂直に切断すると切り口は右の図のようになる。

$\triangle OAB$ は

円すいを底面の円の中心を通して垂直に切断したものであるから

$$OA = OB = 9, AB = 6$$

また点 A から BO に垂線 AC をひくと

三平方の定理より

$$AB^2 - BC^2 = AO^2 - CO^2 \text{ が成り立つ。}$$

$$BC = x \text{ cm とすると}$$

$$6^2 - x^2 = 9^2 - (9 - x)^2$$

これを解いて

$$x = 2$$

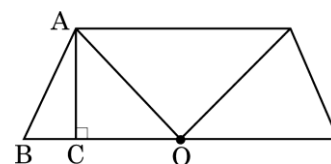
$$\text{よって } CO = 7, AC = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

円すいが通ったあとにできる立体を容器にすると

水を注ぐことができる部分の円すいの半径は CO 高さは AC と等しいことから

容器に入る水の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 7^2 \times 4\sqrt{2} = \frac{196\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$$



【問 12】

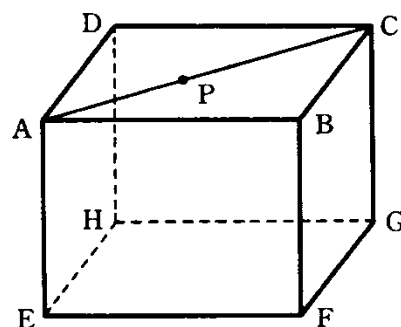
図 1 の立体は、 $AB=5\text{ cm}$ 、 $AD=3\text{ cm}$ 、 $AE=4\text{ cm}$ の直方体である。また、線分 AC 上を動く点を P とする。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(静岡県 2002 年度)

(1) 三角形 PEG の面積を求めなさい。

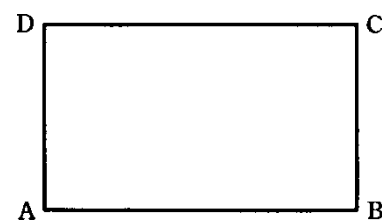
図 1



(2) 図 2 は、図 1 の直方体を真上から見た図である。2点 D 、 P を結ぶ線の長さが最小となるとき、次のア、イの問いに答えなさい。

ア 点 P を、図 2 に作図しなさい。ただし、作図には定規とコンパスを使用し、作図に用いた線は残しておくこと。

図 2



イ この直方体の体積を $V_1\text{ cm}^3$ とする。また、この直方体を、3点 D 、 H 、 P を通る平面で切ったときにできる2つの立体のうち、頂点 A を含む立体の体積を $V_2\text{ cm}^3$ とする。このとき、 V_1 と V_2 の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

(1)	cm^2	
(2)	ア	
	イ	$V_1 : V_2 = \quad :$

解答

(1) $2\sqrt{34} \text{ cm}^2$

(2)

ア 解説欄参照

イ $V_1:V_2=50:9$

解説

(1)

$$EG = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ cm}$$

$\triangle PEG$ の高さは AE に等しいから

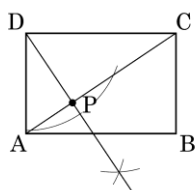
$$\triangle PEG \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \sqrt{34} \times 4 = 2\sqrt{34} \text{ cm}^2$$

(2)

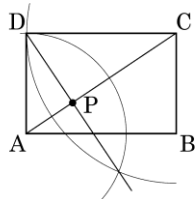
ア

点 D から AC に垂線をおろし AC との交点を P とする作図を行なう。

例1



例2



イ

右図のように切断される。

長方形 $ABCD$ の面積を S_1

$\triangle AID$ の面積を S_2 とすると

$$V_1:V_2=S_1:S_2 \text{ となる。}$$

$$S_1=3 \times 5=15 \text{ cm}^2$$

$\triangle ACD \sim \triangle IDA$ より

$$AI:AD=DA:DC$$

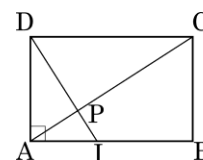
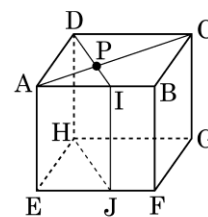
$$\text{よって } AI:3=3:5$$

$$\text{これを解いて } AI=\frac{9}{5} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } S_2=\frac{1}{2} \times \frac{9}{5} \times 3=\frac{27}{10} \text{ cm}^2$$

$$V_1:V_2=S_1:S_2=15:\frac{27}{10}=50:9$$

$$V_1:V_2=50:9$$

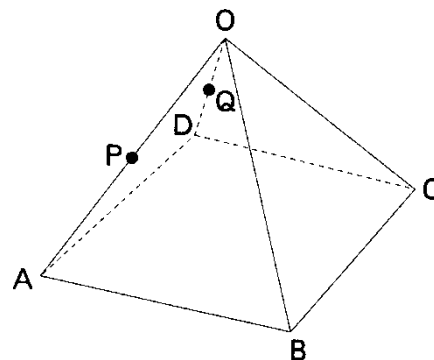


【問 13】

図のように、底面が正方形、側面が正三角形で、 $AB=4\text{ cm}$ の正四角すい $O-ABCD$ がある。また、辺 OA , OD の中点をそれぞれ P , Q とする。

このとき、次の問い(1)・(2)に答えよ。

(京都府 2002 年度)



(1) 底面の対角線 AC の長さを求めよ。

(2) 四角形 $PBCQ$ の面積を求めよ。

解答欄

(1)	$AC =$ cm
(2)	cm^2

解答

(1) $AC = 4\sqrt{2}\text{ cm}$

(2) $3\sqrt{11}\text{ cm}^2$

解説

(1)

$\triangle ABC$ で $\angle B = 90^\circ$, $AB = BC = 4\text{ cm}$ だから

三平方の定理より $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$$= \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

(2)

P , Q から BC に垂線 PR , QS をひく。

$\triangle BAO$ は正三角形で $AP = PO$ より $\angle BPA = 90^\circ$ となる。

$\triangle APB$ で, $AP = 2\text{ cm}$

$$\text{三平方の定理より } PB = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

$\triangle OAD$ で

$$\text{中点連結定理より } PQ = \frac{1}{2} AD = 2\text{ cm}$$

$PQ = RS$ だから $RS = 2\text{ cm}$

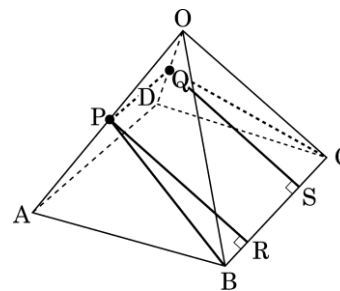
$BR = SC$ より $BR = 1\text{ cm}$

$\triangle BPR$ で

$$\text{三平方の定理より } PR = \sqrt{PB^2 - BR^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{11}$$

よって四角形 $PBCQ$ は台形だから

$$\text{面積は } \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11}\text{ cm}^2$$



【問 14】

図 I のようなコップがある。このコップは、円すいを底面に平行な平面で切ってできる二つの立体のうち、頂点をふくまない方の立体の形をしている。

図 I において、 O はコップの口がつくる円の中心であり、 C はコップの底がつくる円の中心である。2 点 O, C を通る直線 OC は円 O をふくむ平面に垂直である。線分 AB, DE はそれぞれ円 O , 円 C の直径であり、 $AB \parallel DE$ である。 $OA=4\text{cm}$, $CD=2\text{cm}$ であり、2 点 O, C 間の距離は 8cm である。

コップの厚みは考えないものとする。

円周率を π として、次の問いに答えなさい。答えが無理数になる場合は、無理数のままでよい。

(大阪府 2002 年度 一般)

- (1) 円 O の面積は円 C の面積の何倍ですか。

図 I

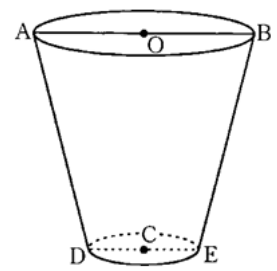
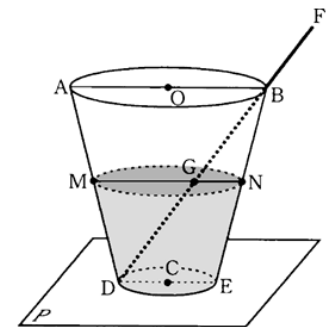


図 II



- (2) 図 II は、図 I のコップを水平な平面 P に底が接するように置き、その中にコップの高さの $\frac{1}{2}$ 倍の高さまで水を入れ、さらに、細いかき混ぜ棒をその一端が D の位置にくるようにして入れたときの状態を示している。水面は水平な平面であるとし、かき混ぜ棒の太さは考えないものとする。

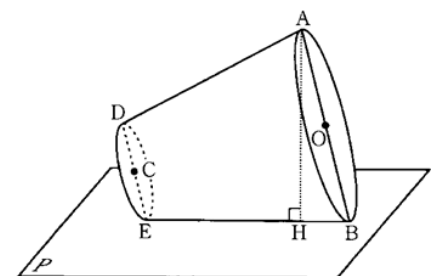
図 II において、 M, N はそれぞれ線分 AD, BE の中点であり、線分 MN は水面がつくる円の直径である。線分 DF はかき混ぜ棒を表している。線分 DF は B を通っており、 $DF=13\text{cm}$ である。 G は線分 MN と線分 DF との交点である。

- ① 線分 BF の長さ と 線分 DG の長さ とをそれぞれ求めなさい。

- ② コップ内の水の体積を求めなさい。求め方も書くこと。

- (3) 図 III は、図 I のコップを水平な平面 P に線分 BE が接するように横にして置いたときの状態を示している。図 III において、平面 $ADEB$ は平面 P に垂直であり、 H は A から線分 BE にひいた垂線と線分 BE との交点である。点 A と平面 P との距離を表す線分 AH の長さを求めなさい。

図 III



解答欄

(1)	倍	
(2)	①	線分 BF の長さ cm
		線分 DG の長さ cm
	②	求め方
(3)	cm	

解答

(1) 4倍

(2)

①

線分 BF の長さ 3cm

線分 DG の長さ 5cm

②

求め方

直線MNと直線OD, OC との交点をそれぞれJ, Kとする。

$$KC = \frac{1}{2} OC = 4 \text{ cm}$$

AO // MJ より

$$MJ = \frac{1}{2} AO = 2 \text{ cm}$$

JK // DC より

$$JK = \frac{1}{2} DC = 1 \text{ cm}$$

$$\text{よって } MK = MJ + JK = 3 \text{ cm}$$

直線ADと直線OCとの交点をLとしCL = x cm とする。

AO // DC より

$$AO : OL = DC : CL$$

$$\text{よって } 4 : (x + 8) = 2 : x$$

これを解くと

$$x = 8$$

したがってコップ内の水の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times MK^2 \times (KC + CL) - \frac{1}{3} \times \pi \times DC^2 \times CL = \frac{76}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{答 } \frac{76}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$(3) \frac{32\sqrt{17}}{17} \text{ cm}$$

解説

(1)

円 O と円 C は相似で相似比は半径の長さの比に等しく $4:2=2:1$
相似な図形の面積の比は相似比の2乗に等しいから $2^2:1^2=4:1$

(2)

①

点 B から平面 P に垂線をひき平面 P との交点を Q とする。

$\triangle BDQ$ で

$BQ=8\text{ cm}$, $DQ=4+2=6\text{ cm}$ だから

三平方の定理より $BD^2=BQ^2+DQ^2=8^2+6^2=100$

$BD>0$ だから

$BD=\sqrt{100}=10\text{cm}$

よって $BF=DF-BD=13-10=3\text{ cm}$

$\triangle BDE$ で

点 N は辺 BE の中点で

$GN\parallel DE$ だから

中点連結定理より $BG=DG$

よって $DG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 10=5\text{ cm}$

②

直線 MN と直線 OD, OC との交点をそれぞれ J, K とする。

$KC=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}\times 8=4\text{ cm}$

$AO\parallel MJ$ より

$MJ=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}\times 4=2\text{ cm}$

$JK\parallel DC$ より

$JK=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}\times 2=1\text{ cm}$

よって $MK=MJ+JK=2+1=3\text{ cm}$

直線 AD と直線 OC との交点を L とし $CL=x\text{cm}$ とする。

$AO\parallel DC$ より

$AO:OL=DC:CL$

よって $4:(x+8)=2:x$

$2(x+8)=4x$

これを解くと

$x=8$

したがってコップ内の水の体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times MK^2\times(KC+CL)-\frac{1}{3}\times\pi\times DC^2\times CL$$

$$=\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times(4+8)-\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 8$$

$$=36\pi-\frac{32}{3}\pi$$

$$=\frac{76}{3}\pi\text{ cm}^3$$

解説

(3)

AH の長さは(2)の△ABL で頂点 A から辺 BL にひいた垂線の長さに等しい。

OL=OC+CL=8+8=16 cm だから

$$\triangle ABL = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 16 = 64 \text{ cm}^2$$

△OBL で

三平方の定理より

$$BL^2 = OB^2 + OL^2 = 4^2 + 16^2 = 272$$

BL>0 だから

$$BL = \sqrt{272} = 4\sqrt{17} \text{ cm}$$

△ABL で

底辺を BL とみると

$$\frac{1}{2} \times BL \times AH = 64$$

AH=h cm とすると

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{17} \times h = 64$$

$$2\sqrt{17} h = 64$$

両辺を $2\sqrt{17}$ でわると

$$h = \frac{64}{2\sqrt{17}} = \frac{64 \times \sqrt{17}}{2\sqrt{17} \times \sqrt{17}} = \frac{32\sqrt{17}}{17} \text{ cm}$$

【問 15】

図1の 500 ml 入りの牛乳パックを観察した次の文を読んで、あとの問いに答えなさい。ただし、牛乳パックの变形や紙の厚さは考えないものとする。

(兵庫県 2002 年度)

図1

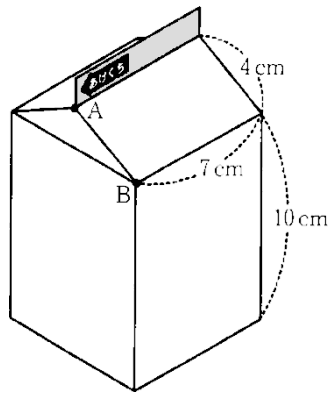


図2

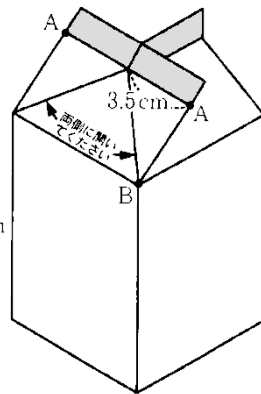
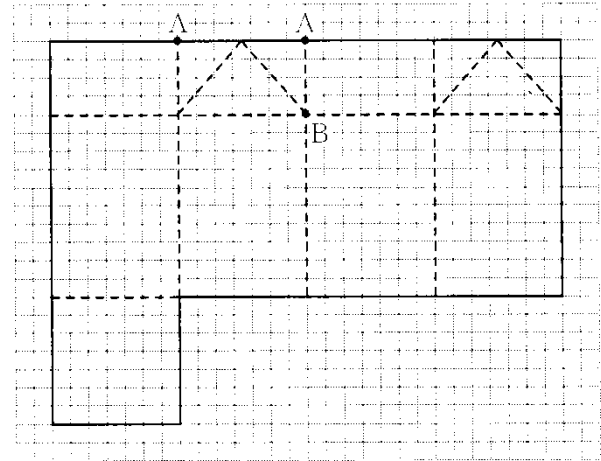


図3



観察結果

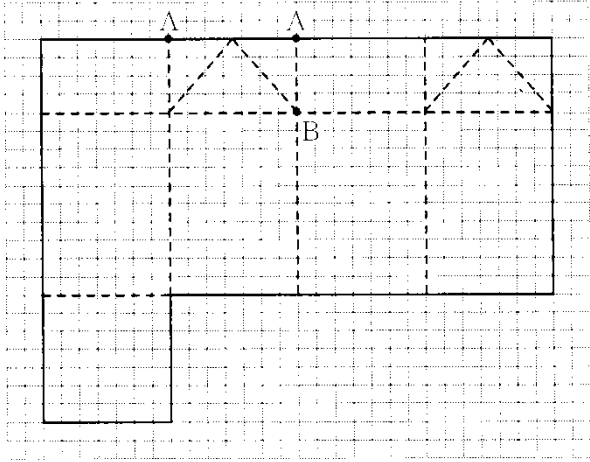
- ・図1のあけぐちを図2のように両側に開くと、紙が二重に折り重なっている部分がよくわかった。
- ・図1の牛乳パックから  部分を切り取った立体の展開図は、図3ようになった。ただし、方眼紙の1目盛りは1 cmとする。

(1) 図1において、底の面からどこまで牛乳が入っているか、次のア～ウから1つ選び、記号で答えなさい。

- ア 点 B より下
- イ 点 B
- ウ 点 B より上

(2) 図1において、牛乳パックの紙が二重に折り重なっている部分をすべて、解答欄の展開図に斜線で示しなさい。ただし、底の面とのりしろは除く。

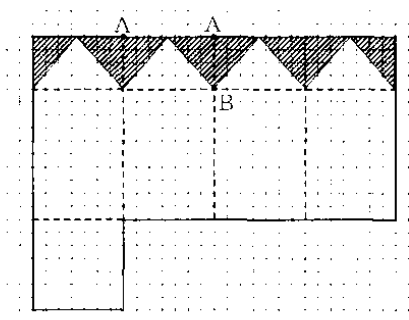
(3) 図1において、底の面から点 A までの高さを求めなさい。ただし、答えが無理数になるときは、根号を含んだ数で答えなさい。

(1)	
(2)	 The diagram shows a grid with a rectangle. A dashed line is drawn across the rectangle. Point A is marked at the top left corner of the rectangle. Point B is marked at the top right corner of the rectangle. The dashed line is horizontal and passes through the middle of the rectangle.
(3)	cm

解答

(1) ウ

(2)



(3) $10 + \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$

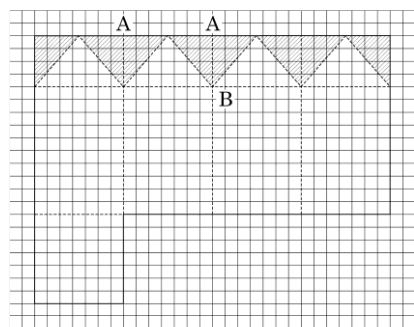
解説

(1)

底の面から点 B のところまでの四角柱の体積は $7 \times 7 \times 10 = 490 \text{ cm}^3$ である。

(2)

下の図のようになる。



(3)

等しい辺の長さが 4 cm 底辺が 7 cm の二等辺三角形の高さは

三平方の定理より $\sqrt{4^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ だから, $10 + \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$

【問 16】

図のような正四角すいがあり、底面は1辺が 4 cm の正方形で、側面は等しい辺が 6 cm の二等辺三角形である。

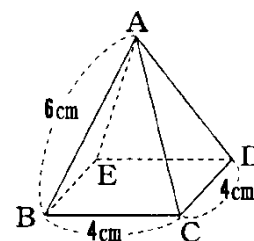
このとき、次のア、イの問いに答えよ。

(香川県 2002 年度)

ア 次の①～④の辺のうち、辺 BC とねじれの位置にある辺はどれか。正しいものを1つ選んで、その番号を書け。

- ① 辺 AC ② 辺 AD ③ 辺 BE ④ 辺 DE

イ この正四角すいの表面積は何 cm^2 か。



解答欄

ア	
イ	cm^2

解答

ア ②

イ $16 + 32\sqrt{2}\text{ cm}^2$

解説

ア

面 ABC , 面 $BCDE$ にふくまれていない辺を選べばよい。

イ

BC の中点を M とすると $AM \perp BC$

$\triangle ABM$ に三平方の定理を用いて

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\text{ cm}^2$$

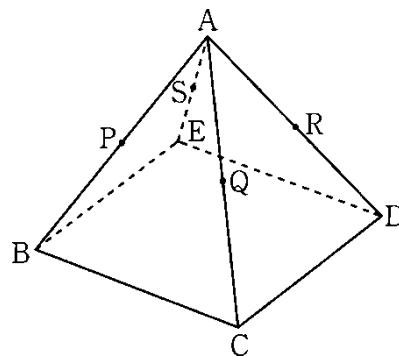
$$\text{したがって表面積は } 4^2 + 8\sqrt{2} \times 4 = 16 + 32\sqrt{2}\text{ cm}^2$$

【問 17】

図は、すべての辺の長さが 8 cm の正四角すい $A-BCDE$ であり、辺 AB , AC , AD , AE の中点をそれぞれ P , Q , R , S とする。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(高知県 2002 年度)



(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) 正四角すい $A-BCDE$ の体積は、正四角すい $A-PQRS$ の体積の何倍か。

(3) 正四角すい $A-BCDE$ を4点 P , Q , D , E を通る平面で切るとき、その切り口の面積を求めよ。

解答欄

(1)	cm
(2)	倍
(3)	cm^2

解答

(1) $4\sqrt{2}$ cm

(2) 8倍

(3) $12\sqrt{11}$ cm²

解説

(1)

すべての辺の長さが 4cm の正四角すい A-PQRS において
PR は底面の正方形 PQRS の対角線だから

$$PR = \sqrt{2} PQ = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

正四角すい A-BCDE の高さを h cm とすると

正四角すい A-PQRS の高さは $\frac{h}{2}$ cm と表せるので

$$\left(\frac{1}{3} \times 8^2 \times h\right) \div \left(\frac{1}{3} \times 4^2 \times \frac{h}{2}\right) = 8 \text{ 倍}$$

(3)

四角形 PQDE は $QD = PE = 4\sqrt{3}$ の等脚台形だから

Q から DE に垂線 QH をひくと

$$DH = (8 - 4) \div 2 = 2$$

$$\text{三平方の定理より } QH = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}$$

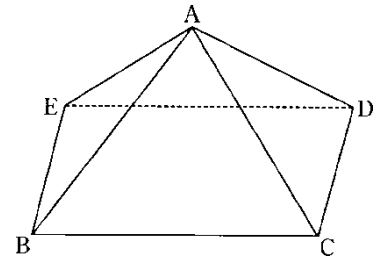
$$\text{切り口の面積は } \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 2\sqrt{11} = 12\sqrt{11} \text{ cm}^2$$

【問 18】

図は、点 A, B, C, D, E を頂点とし、 $AB=AC=AD=AE=5\text{ cm}$, $BC=DE=6\text{ cm}$, $BE=CD=4\text{ cm}$, $\angle BCD=90^\circ$ の四角すいを表している。

次の(1)～(3)の の中にあてはまる最も簡単な数, または記号を記入せよ。ただし, 無理数の場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2002 年度)



(1) 図に示す立体で, 面 ABE と平行な辺は である。

(2) 図に示す立体の体積は cm^3 である。

(3) 図に示す立体において, 辺 BC, DE の中点をそれぞれ M, N とする。3点 A, D, E を通る平面上に, 点 A と点 N を通る直線をひくとき, 点 M と直線 AN との距離は cm である。

解答欄

(1)	
(2)	
(3)	

解答

(1) CD または DC

(2) $16\sqrt{3}$

(3) $2\sqrt{3}$

解説

(1)

四角形 BCDE は長方形であり $BE \parallel CD$ だから辺 CD は面 ABE と平行である。

(2)

右の図はもとの四角すいを点 A, B, D を通る平面で切断したときの切り口である。

点 A から BD にひいた垂線を AH とする。

三平方の定理より

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\text{よって } BH = \sqrt{13}$$

仮定より $AB = 5$ だから

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{13})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

求める立体は

底面が長方形 BCDE, 高さが AH の四角すいであるから

$$\text{その体積は } \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

(3)

右の図は, もとの四角すいを

点 A, M, N を通る平面で切断したときの切り口である。

点 M から AN にひいた垂線を MI とする。

点 M と直線 AN との距離は MI の長さと同じ。

四角形 BCDE は長方形であるから $MN = BE = 4$

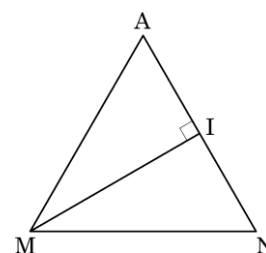
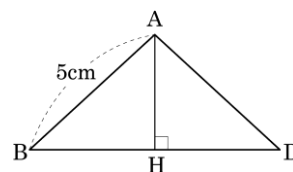
$\triangle ABM$ は直角三角形であるから

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

同様にして $AN = 4$

よって $\triangle AMN$ は正三角形だから $AI = NI = 2$

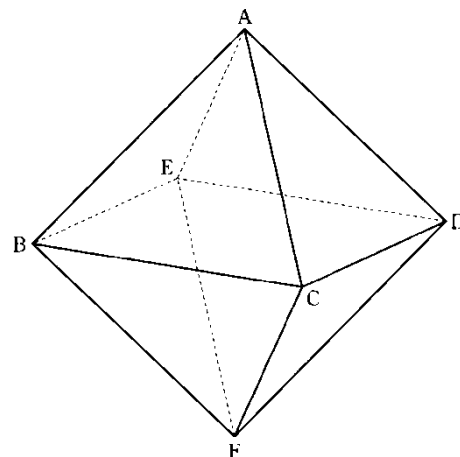
$$MI = \sqrt{AM^2 - AI^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$



【問 19】

図のような1辺が 4 cm の正八面体 $ABCDEF$ について、次の(1)～(4)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2002 年度)



(1) 辺 AB とねじれの位置にある辺は何本あるか。

(2) 2点 A, F 間の距離を求めなさい。

(3) 正八面体 $ABCDEF$ の体積を求めなさい。

(4) 辺 AE の中点を M とし、正八面体 $ABCDEF$ を3点 B, C, M を通る平面で切ったとき、次の(ア), (イ)の問いに答えなさい。

(ア) 切り口はどのような図形になるか。

(イ) 切り口の図形の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	本	
(2)	cm	
(3)	cm ³	
(4)	(ア)	
	(イ)	cm ²

解答

(1) 4本

(2) $4\sqrt{2}$ cm

(3) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm³

(4)

(ア) 台形

(イ) $3\sqrt{11}$ cm²

解説

(2)

BDとECの交点をHとするとAFは点Hを通る。

$$DH = \frac{1}{\sqrt{2}} CD = 2\sqrt{2} \text{ cm より}$$

直角三角形AHDに三平方の定理を用いて

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AF = 2AH = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

(3)

正四面体ABCDEFの体積 = $2 \times$ 正四角すいA-BCDEの体積

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} \right) = \frac{64\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

(4)

(イ)

$$\text{切り口と辺ADとの交点をNとすると } MN = \frac{1}{2} ED = 2 \text{ cm}$$

2点M, NからBCに垂線MG, NIをひくと

GI=MNより

$$BG = CI = (4 - 2) \div 2 = 1 \text{ cm}$$

$$\text{また } BM = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

△MBGに三平方の定理を用いて

$$MG = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{11} \text{ cm}$$

$$\text{よって台形MBCN} = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11} \text{ cm}^2$$

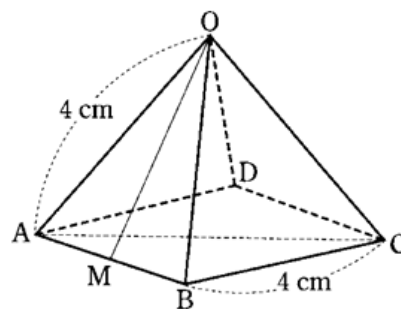
【問 20】

図1～図3のように、5つの点 O, A, B, C, D を頂点とする正四角すい $OABCD$ があり、底面の正方形 $ABCD$ の1辺の長さは 4 cm である。また、 $OA=OB=OC=OD=4\text{ cm}$ で、点 M は辺 AB の中点である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2002 年度)

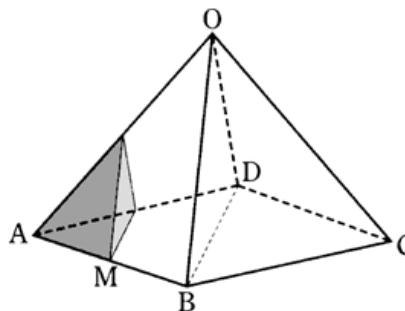
問1. 線分 OM の長さは何 cm か。

図1



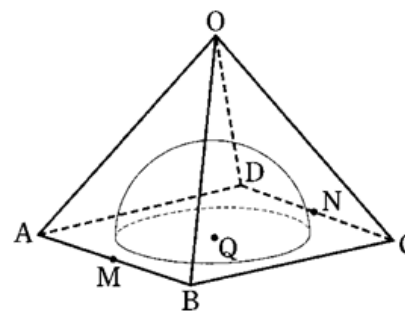
問2. 三角形 OAC はどんな形の三角形か。その名称を答えよ。

図2



問3. 図2のように、正四角すい $OABCD$ を、点 M を通り三角形 OBD に平行な平面で切ってできる2つの立体のうち、頂点 A を含む立体の体積は何 cm^3 か。

図3

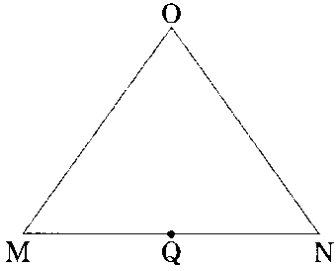


問4. 図3のように、正四角すい $OABCD$ の内部に半球がある。半球の底面(円)は、正四角すい $OABCD$ の面 $ABCD$ 上にあり、底面以外の面(球面)は、正四角すいの4つの面 OAB, OBC, OCD, ODA のすべてと接している。ただし、点 N は辺 CD の中点とし、点 Q は半球の底面の中心である。ここで、半球とは球をその中心を通る平面で2つに分けたときの一方の部分である。このとき、次の(1)、(2)に答えよ。

(1) 解答欄の図は正四角すい $OABCD$ を3点 O, M, N を通る平面で切ったときの切り口の図形の周を示している。この図に半球を同じ平面で切ったときの切り口をかき入れ、その図形を斜線で示せ。ただし、円をかく場合は、コンパスを用いよ。

(2) 半球の半径の長さは何 cm か。

解答欄

問1	cm	
問2	三角形	
問3	cm ³	
問4	(1)	
	(2)	cm

解答

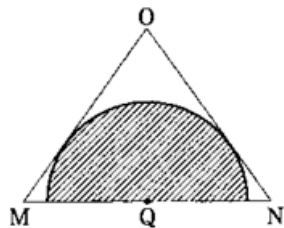
問1 $2\sqrt{3}$ cm

問2 直角二等辺

問3 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ cm³

問4

(1)



(2) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ cm

解説

問1

AM=2, $\angle OMA=90^\circ$ であるから三平方の定理より

$$OM = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

問2

$$OA = OC = 4 \text{ cm}$$

また $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから

$$AC = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 \text{ が成り立つから}$$

$$\angle AOC = 90^\circ$$

よって $\triangle OAC$ は直角二等辺三角形

問3

頂点 A を含む立体は三角すい OABD と相似であり

相似比は AM:AB=1:2 である。

よってこれらの図形の体積の比は $1^3:2^3=1:8$

また $BD=4\sqrt{2}$ で

BD の中点を P とすると

$\triangle ABP$, $\triangle OBP$ が直角二等辺三角形であることより

$$AP = OP = 2\sqrt{2}$$

よって三角すい OABD の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{16}{3} \sqrt{2} \text{ cm}^3$$

$$\text{よって求める立体の体積は } \frac{1}{8} \times \frac{16}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \text{ cm}^3$$

問4

(1)

半球が面 OAB, OCD と接していることより

半球の切り口は右の図のように点 Q を中心とし辺 OM, ON と接する半円となる。

(2)

右の図のように辺 OM と半円との接点を R とすると

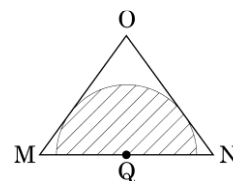
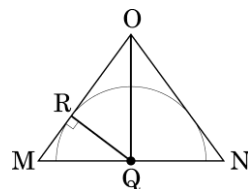
$$\angle QRM = 90^\circ$$

$$\angle OQM = \angle QRM, \angle OMQ = \angle QMR \text{ より}$$

$$\triangle OQM \sim \triangle QRM$$

$$\text{よって } OQ:QR = OM:QM$$

$$2\sqrt{2}:QR = 2\sqrt{3}:2QR = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{6} \text{ cm}$$



【問 21】

〔図Ⅰ〕のように、面 $ABED$, $CBEF$, $ACFD$ が正方形で、各辺の長さがすべて 8 cm の容器がある。この容器に水を満たし、〔図Ⅱ〕のように面 $CBEF$ が水面 $AGHD$ と垂直になるまで傾ける。

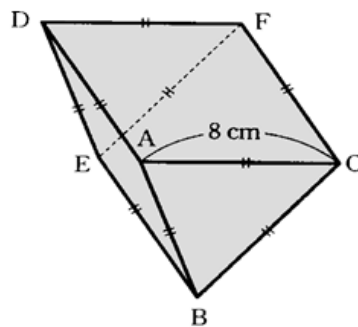
次の①, ②の問いに答えなさい。

(大分県 2002 年度)

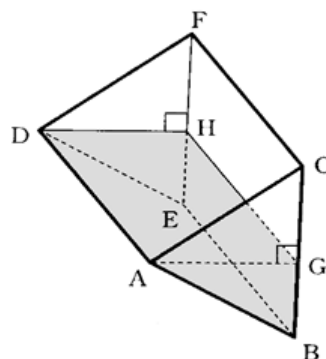
① 〔図Ⅱ〕の状態のとき、水面 $AGHD$ の面積を求めなさい。

② 残った水の体積を求めなさい。

〔図Ⅰ〕



〔図Ⅱ〕



解答欄

①	cm^2
②	cm^3

解答

① $32\sqrt{3}\text{ cm}^2$

② $64\sqrt{3}\text{ cm}^3$

解説

①

$\triangle ABC$ は正三角形より

$$AG = \sqrt{3} \quad CG = \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$$

$$\text{よって求める面積は } 4\sqrt{3} \times 8 = 32\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

②

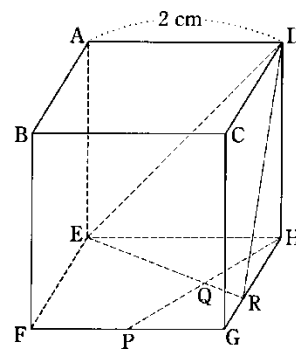
求める体積は全体積の半分より

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \times 8 \times \frac{1}{2} = 64\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

【問 22】

図は、1辺の長さが 2 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ で、点 P は辺 FG の中点、点 Q は線分 PH の中点である。また、点 R は EQ の延長と辺 GH との交点である。このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2002 年度)



(1) $EQ:QR$ を求めよ。答えは最も簡単な整数比で表せ。

(2) 線分 ER の長さを求めよ。

(3) $\triangle DER$ の面積を求めよ。

解答欄

(1)	$EQ:QR = \quad : \quad$
(2)	$\quad \text{cm}$
(3)	$\quad \text{cm}^2$

解答

(1) $EQ:QR=3:1$

(2) $\frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ cm}$

(3) $\frac{2\sqrt{17}}{3} \text{ cm}^2$

解説

(1)

図は面 $EFGH$ を含む平面であり ER の延長と FG の延長の交点を S とする。

$PQ=HQ$, $\angle PQS=\angle HQE$, $\angle QPS=\angle QHE$ より

$\triangle PQS \equiv \triangle HQE$

よって $EQ=SQ \cdots \textcircled{1}$

$EH=FG=PS$, $FP=PG$ より

$FS:GS=3:1 \cdots \textcircled{2}$

$\triangle EFS$ の $\triangle RGS$ だから

$\textcircled{2}$ より $ES:RS=3:1 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ より

$$EQ:QR = \frac{1}{2} ES : \left(\frac{1}{2} ES - \frac{1}{3} ES \right) = 3:1$$

(2)

三平方の定理より $ES = \sqrt{EF^2 + FS^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$

(1) より $ER = \frac{2}{3} ES = \frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ cm}$

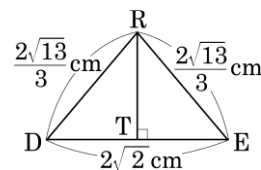
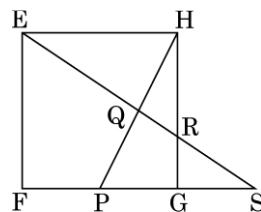
(3)

$\triangle DER$ は、右の図のような二等辺三角形である。

頂点 R から DE に垂線 RT を引くと

$$RT = \sqrt{RD^2 - DT^2} = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\triangle DER = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{34}}{3} = \frac{2\sqrt{17}}{3} \text{ cm}^2$$



【問 23】

図 I のような紙コップがあり、点 A, B はそれぞれ口の部分、底の部分の円周上の点である。この紙コップの側面は、図 I のように点 O を頂点とする円すいの側面の一部になっており、点 B は母線 OA 上にある。この紙コップの口の部分、底の部分の直径はそれぞれ 10 cm, 6 cm であり、また、 $AB=12$ cm である。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。ただし円周率は π とし紙の厚さや紙コップの変形は考えないものとする。

(宮崎県 2002 年度)

図 I

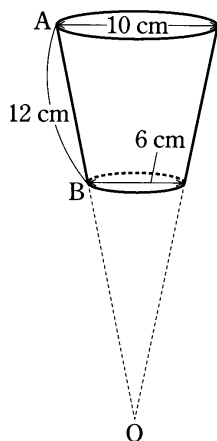


図 II

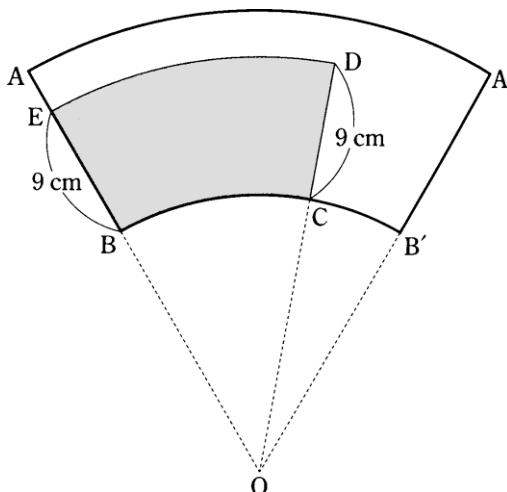
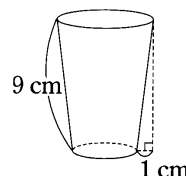


図 III



(1) 図 I の紙コップを水平な床において、深さ2分の1のところまで水を入れたとき、水面の円の直径を求めなさい。

(2) 図 I の母線 OA の長さを求めなさい。

(3) 図 II のように、図 I の紙コップの側面を展開した $ABB'A'$ に、 部分 EBCD を、下に示す【条件】をみたすように作図する。次に、この  部分を切り取り、線分 EB と DC を重ねて、新しい紙コップの側面をつくる。

図 III は、新しくできあがった紙コップである。

【条件】

- ① $\widehat{ED}$ は、おうぎ形 OED の弧である。
- ② $EB=DC=9$ cm とする。
- ③  部分の線分 EB と DC を重ねたものが側面となる紙コップは、口の部分の円の半径が、底の部分の円の半径より 1 cm 長い。

このとき、次のア、イの問いに答えなさい。

ア  部分 EBCD の面積を求めなさい。

イ 図 III の紙コップの容積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm	
(2)	OA= cm	
(3)	ア	cm ²
	イ	cm ³

解答

(1) 8 cm

(2) OA=30 cm

(3)

ア $5\pi \text{ cm}^2$

イ $\frac{76\sqrt{5}}{3} \pi \text{ cm}^3$

解説

(1)

右図は点 O と点 A を通る平面で紙コップを切った断面図である。

Q, R は AB, PS の中点だから

$$QR = \frac{1}{2}(AP + BS) = \frac{1}{2} \times (10 + 6) = 8 \text{ cm}$$

(2)

$\triangle OBS \sim \triangle OAP$ より

$$OB : OA = BS : AP$$

OB = x cm とすると

$$x : (x + 12) = 6 : 10$$

$$10x = 6(x + 12)$$

$$x = 18$$

$$OA = 12 + 18 = 30 \text{ cm}$$

(3)

ア

部分 EBCD = おうぎ形 OED - おうぎ形 OBC

$$BO = 30 - 12 = 18 \text{ cm}$$

新しい紙コップの底の半径を r cm とすると

口の半径は $(r + 1)$ cm だから

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{r}{18} \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle EOD = 360^\circ \times \frac{r+1}{27} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \text{ より } \frac{r}{18} = \frac{r+1}{27}$$

$$r = 2$$

$$\text{したがっておうぎ形 OED} = \frac{1}{2} \times \widehat{ED} \times OE$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\pi \times 27 = 81\pi \text{ cm}^2$$

同様におうぎ形

$$OBC = \frac{1}{2} \times \widehat{BC} \times OB = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 18 = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{よって部分 EBCD} = 81\pi - 36\pi = 45\pi \text{ cm}^2$$

イ

新しい紙コップの容積は、図のように

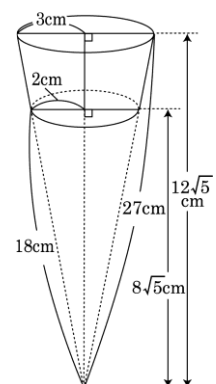
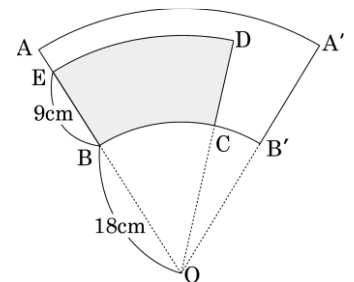
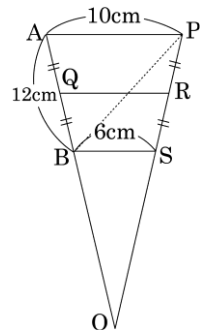
高さ $12\sqrt{5}$ cm 底面の円の半径 3cm の円すいから

高さ $8\sqrt{5}$ cm 底面の円の半径 2cm の円すいをひいたものになる。

$$\text{よって } \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 12\sqrt{5} - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 8\sqrt{5}$$

$$= \frac{108\sqrt{5}}{3} \pi - \frac{32\sqrt{5}}{3} \pi$$

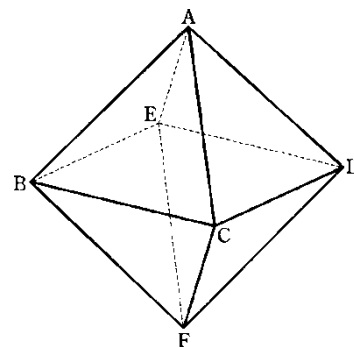
$$= \frac{76\sqrt{5}}{3} \pi \text{ cm}^3$$



【問 24】

図は、1辺の長さが 2 cm の正八面体 $ABCDEF$ である。このとき、次の1～4の問いに答えなさい。

(鹿児島県 2002 年度)



1 辺 AB とねじれの位置にある辺を1つあげよ。

2 正八面体 $ABCDEF$ の体積は何 cm^3 か。

3 辺 CD の中点を M とする。辺 AC 上に点 P を、 $BP + PM$ の長さがもっとも短くなるようにとる。このとき、 $BP + PM$ の長さは何 cm か。

4 正八面体 $ABCDEF$ を面 ABE に平行な平面で切って2つの立体にしたところ、2つの立体の体積が等しくなった。このとき、切り口の図形の面積は何 cm^2 か。

解答欄

1	
2	cm^3
3	cm
4	cm^2

解答

1 CD

2 $\frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

3 $\sqrt{7} \text{ cm}$

4 $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

解説

1

辺 AB と同じ平面上にない辺はねじれの位置にある。

CD, CF, DE, EF の4つから1つをあげる。

2

BD と CE の交点を O とすると AO が正四角すい A-BCDE の高さとなる。

1 辺の長さが 2 cm の正方形の対角線の長さは $2\sqrt{2} \text{ cm}$ だから $AO = \sqrt{2}$

正八面体の体積は正四角すい A-BCDE $\times 2 = \left(\frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{2}\right) \times 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

3

AD の中点を M' とすると中点連結定理より $MM' = \frac{1}{2} CA = 1$

B, P, M が一直線上に並ぶとき $BP + PM = BM$ となり

その長さがもっとも短くなる。

B から MM' にひいた垂線を BH とし AC との交点を Q とする。

$$BQ = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \sqrt{3}$$

$$QH = \frac{1}{2} BQ$$

よって $\triangle BHM$ に三平方の定理を用いて

$$BM = \sqrt{BH^2 + HM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7} \text{ cm}$$

4

題意より

平行な平面は辺 AC, BC, BF, FE, ED, DA の中点を通るから

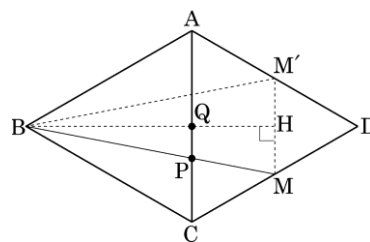
それぞれの点を結ぶと

切り口は1辺の長さが 1 の正六角形になる。

正六角形の面積は辺の長さが同じ正三角形の面積の6倍だから

$$\text{求める切り口の面積は } \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の展開図



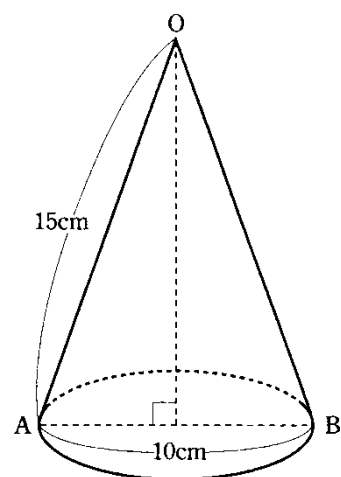
【問 25】

図 I のように、母線の長さ $OA=15\text{ cm}$ 、底面の直径 $AB=10\text{ cm}$ の円すいがある。このとき、下の各問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(沖縄県 2002 年度)

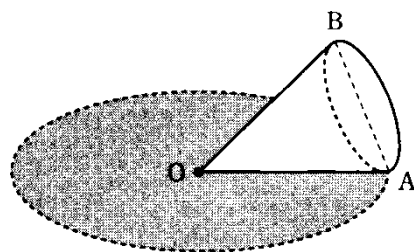
問1 図 I の円すいの高さを求めなさい。

図 I



問2 図 I の円すいの側面を平面上に展開したときにできる、おうぎ形の面積を求めなさい。

図 II



問3 図 II のように、図 I の円すいの側面を平面上に置き、頂点 O を中心として、すべらないように転がす。このとき、点 A がはじめて元の位置にもどるのは何回転したときか。

解答欄

問1	cm
問2	cm ²
問3	回転

解答

問1 $10\sqrt{2}\text{ cm}$

問2 $75\pi\text{ cm}^2$

問3 3回転

解説

問1

三平方の定理から $\sqrt{15^2-5^2}=10\sqrt{2}\text{ cm}$

問2

おうぎ形の中心角を x° とすると $2\pi \times 15 \times \frac{x}{360} = 10\pi$ より $x=120$

面積は $\pi \times 15^2 \times \frac{120}{360} = 75\pi\text{ cm}^2$

問3

AB を直径とする円の円周は 10π

図Ⅱで **O** を中心とする円の円周は 30π

よって $30\pi \div 10\pi = 3$ 回転