

5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2007 年度出題】

【問 1】

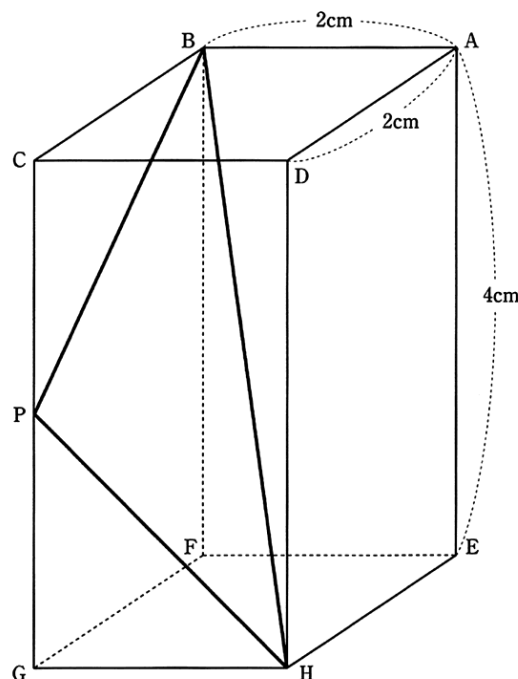
図のように、 $AB=AD=2\text{ cm}$ 、 $AE=4\text{ cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ があります。

このとき、次の1, 2の問いに答えなさい。

(岩手県 2007 年度)

問1 対角線 BH の長さを求めなさい。

問2 辺 CG の中点を P とします。 $\triangle BPH$ を BH を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とします。



解答欄

問1	cm
問2	cm ³

解答

問 $2\sqrt{6}\text{ cm}$

問2 $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi\text{ cm}^3$

解説

$\triangle BPH$ は $BP=HP=2\sqrt{2}$ の二等辺三角形だから

P から BH に垂線 BK をひくと $BK=HK=\sqrt{6}$

$\triangle BPK$ で

三平方の定理より $PK=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}$

求める体積は $\triangle BPK$ を回転したものの2倍になるから

$$\frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{6} \times 2 = \frac{4\sqrt{6}}{3}\pi\text{ cm}^3$$

【問 2】

図 1 のように、底面が二等辺三角形で側面がすべて長方形の三角柱 $ABC-DEF$ があり、 $AB=AC=9\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$ 、 $AD=3\text{ cm}$ である。図 2 は、三角柱 $ABC-DEF$ を点 B 、 C 、 D を通る平面で切ってできる 2 つの立体ア、イである。

(秋田県 2007 年度)

図 1

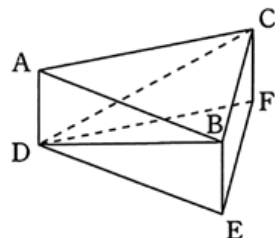
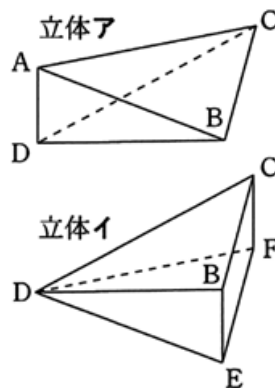


図 2



- (1) 立体アと立体イの体積の比を求めなさい。
- (2) 立体アと立体イでは、表面積はどちらが何 cm^2 大きい、求めなさい。

解答欄

(1)	:
(2)	立体 の表面積が cm^2 大きい

解答

(1) 1:2

(2) 立体イ の表面積が 18 cm^2 大きい

解説

(2)

立体アと立体イで

$\triangle DBC$ は共通

長方形を半分にしたものだから

$\triangle ADC = \triangle CFD$, $\triangle ADB = \triangle BED$

三角柱の 2 つの底面は合同だから

$\triangle ABC = \triangle DEF$

よって立体アの表面積と立体イの表面積とでは

立体イが長方形 $BEFC = 6 \times 3 = 18\text{ cm}^2$ 大きい。

【問 3】

図 1 のような、底面が $DE=4\text{cm}$, $DF=6\text{cm}$, $\angle DEF=90^\circ$ の直角三角形で、高さが 6cm のふたのない透明な三角柱の容器がある。辺 CF 上に、 $BG=GF$ となるように点 G をとる。

このとき次の1～3の問いに答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(福島県 2007 年度)

問1 辺 BC の長さを求めなさい。

問2 線分 CG の長さを求めなさい。

問3 底面 DEF を下にしてこの容器を水平な台の上に置き、水でいっぱいにする。次に、 DE を台の上につけたまま、図 2 のように水面と EG が垂直になるまで、容器をゆっくり傾ける。このとき、容器から流れ出る水の量は何 cm^3 か、求めなさい。

図 1

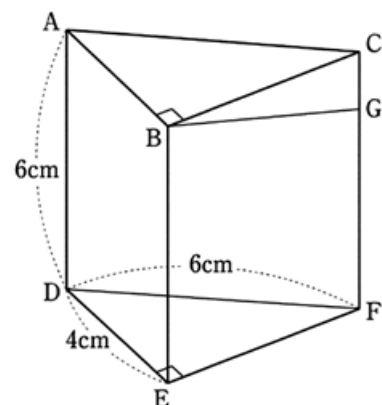
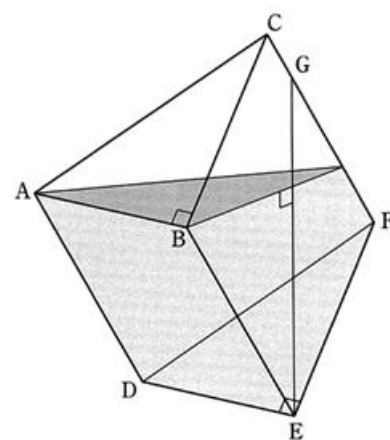


図 2



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm^3

解答

問1 $2\sqrt{5}$ cm

問2 $\frac{4}{3}$ cm

問3 $\frac{40\sqrt{5}}{7}$ cm³

解説

問3

B から GE にひいた垂線と GE, CF との交点をそれぞれ H, K とする。

△BCK と △GFE は

2 組の角がそれぞれ等しいので相似になる。

よって BC:GF=CK:FE

$$2\sqrt{5} : \frac{14}{3} = \text{CK} : 2\sqrt{5}$$

よって $\frac{14}{3} \text{CK} = 20$

$$\text{CK} = \frac{30}{7}$$

容器から出る水の量は

三角すい ABCK の体積だから

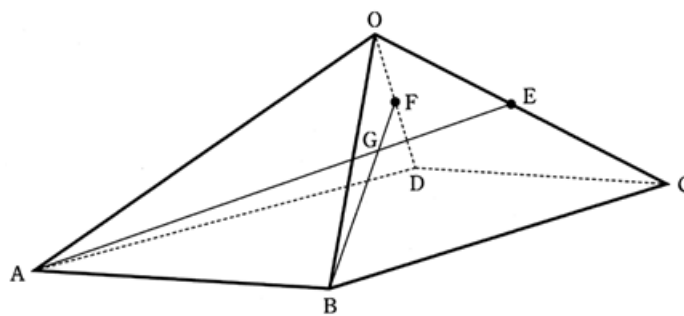
$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times \text{CK} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} \times \frac{30}{7} = \frac{40\sqrt{5}}{7} \text{ cm}^3$$

【問 4】

図のように、 $AB = 6\text{cm}$ 、 $BC = 8\text{cm}$ の長方形 $ABCD$ を底面とし、 $OA = OB = OC = OD = 6\text{cm}$ とする四角すい $OABCD$ がある。2 辺 OC 、 OD の中点をそれぞれ E 、 F とし、線分 AE と線分 BF との交点を G とする。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(茨城県 2007 年度)



問1 $\triangle OEF$ の面積を求めなさい。

問2 線分 EG の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm

解答

問1 $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{cm}^2$

問2 $\frac{\sqrt{59}}{3} \text{cm}$

解説

$\triangle ABC$ で三平方の定理より $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

O 、 E から底面に垂線 OH 、 EK をひく。

$\triangle OAC$ は二等辺三角形だから $AH = 5$ 、 $\angle OHA = 90^\circ$

よって $OH = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$

$EK \parallel OH$ 、 $OE = EC$ より $EK = \frac{1}{2} OH = \frac{\sqrt{11}}{2}$

$\triangle AEK$ で三平方の定理より $AE = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{59}$

ここで $FE \parallel DC \parallel AB$ より $AG : EG = AB : EF = 6 : 3 = 2 : 1$

よって $EG = \frac{1}{3} AE = \frac{\sqrt{59}}{3} \text{cm}$

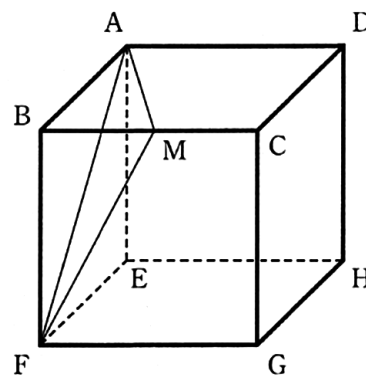
【問 5】

図のような、1 辺の長さ a cm の立方体 ABCD－EFGH がある。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(栃木県 2007 年度)

(1) 表面積が 12 cm^2 であるとき、 a の値を求めなさい。



(2) 辺 BC の中点を M とするとき、 $\triangle AFM$ の面積を a を用いて表しなさい。

解答欄

(1)	$a =$
(2)	cm^2

解答

(1) $a = \sqrt{2}$

(2) $\frac{\sqrt{6}}{4} a^2 \text{ cm}^2$

解説

(2)

$\triangle AFM$ は $MA = MF = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a$, $AF = \sqrt{2} a$ の二等辺三角形。

M から AF に垂線 MH をひくと $AH = \frac{1}{2} AF = \frac{\sqrt{2}}{2} a$

$$\triangle AMH \text{ で } MH = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

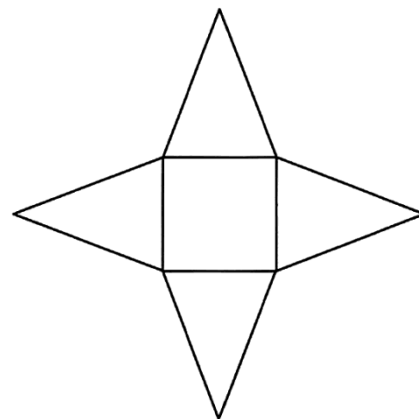
$$\text{よって } \triangle AFM = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{6}}{4} a^2 \text{ cm}^2$$

【問 6】

正方形の紙に、図のような形をした正四角すいの展開図をかき、切り抜いて正四角すいをつくりたい。1 辺の長さが $10\sqrt{2}$ cm の正方形の紙を使って、底面の 1 辺の長さが 6 cm の正四角すいをつくるとき、次の1, 2の問いに答えなさい。

(群馬県 2007 年度)

問1 1 辺の長さが $10\sqrt{2}$ cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。



問2 このようにしてできる正四角すいのうち、体積が最も大きいものについて、その体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm ³

解答

問1 20 cm

問2 $24\sqrt{10}$ cm³

解説

体積が最も大きくなるのは

展開図において 4 つの二等辺三角形の頂点を結んでできる正方形の 1 辺が $10\sqrt{2}$ cm となるとき。

このとき二等辺三角形の頂角の頂点から底辺にひいた垂線の長さは

$$(20-6) \div 2 = 7$$

二等辺三角形の等しい辺の長さは

$$\sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$$

底面の正方形の対角線の長さは $6\sqrt{2}$ だから

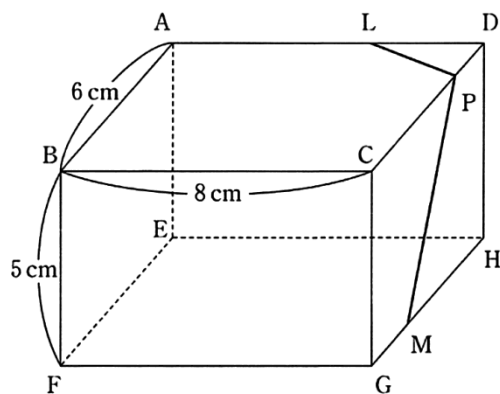
$$\text{正四角すいの高さは } \sqrt{(\sqrt{58})^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{よって求める体積は } \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 2\sqrt{10} = 24\sqrt{10} \text{ cm}^3$$

【問 7】

図のように、点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする直方体があり、 $AB=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, $BF=5\text{cm}$ である。辺 AD 上に $AE=AL$ となる点 L, 辺 GH 上に $GH=3GM$ となる点 M をとる。辺 CD 上に $LP+PM$ の長さがもっとも短くなるように点 P をとるとき、 $LP+PM$ の長さを求めなさい。

(千葉県 2007 年度)



解答欄

cm

解答

$$4\sqrt{5} \text{ cm}$$

解説

$LP+PM$ がもっとも短くなるのは展開した平面の長方形 $ABGH$ で L と M を直線で結んだときになる。

$\triangle LMH$ において

$$LH=8+5-5=8$$

$$HM=\frac{2}{3} \times 6=4 \text{ より}$$

三平方の定理を利用して

$$LP+PM=LM=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5} \text{ cm}$$

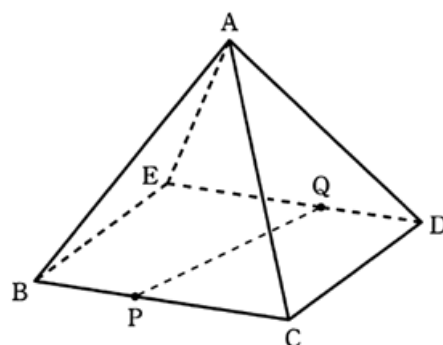
【問 8】

図 1 に示した立体 $A-BCDE$ は、底面 $BCDE$ が 1 辺の長さ 6 cm の正方形で、 $AB=AC=AD=AE=6\text{ cm}$ の正四角すいである。点 P は、頂点 B を出発し、辺 BC 、辺 CD 上を、毎秒 1 cm の速さで動き、 12 秒後に頂点 D に到着する。点 Q は、点 P が頂点 B を出発するのと同時に頂点 D を出発し、辺 DE 、辺 EA 上を、点 P と同じ速さで動き、 12 秒後に頂点 A に到着する。点 P と点 Q を結ぶ。

次の各問に答えよ。

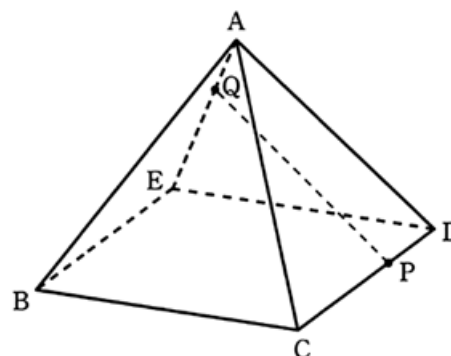
(東京都 2007 年度)

図 1



問1 図 1 において、点 P が辺 BC 上にあるとき、頂点 A と点 P 、頂点 A と点 Q をそれぞれ結んでできる $\triangle APQ$ を考える。 $\triangle APQ$ の周の長さがもっとも短くなるのは、点 P が頂点 B を出発してから何秒後か。

図 2



問2 図 2 は、図 1 において、点 P が頂点 B を出発してから 10 秒後の場合を表している。線分 PQ の長さは何 cm か。ただし、答えに根号がふくまれるときは、根号をつけたままで表せ。

解答欄

問1	秒後
問2	cm

解答

問1 3 秒後

問2 $2\sqrt{6}$ cm

解説

問1

△APQ の周の長さがもっとも短くなるのは

点 P, Q がそれぞれ BC, DE の中点にあるときだから $6 \div 2 = 3$ cm

点 P, Q とともに毎秒 1 cm で動くので 3 秒後となる。

問2

CD の中点を M とする。

△ACD は正三角形より $AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

10 秒後の PD = 2 より

PM = 3 - 2 = 1

$AP = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$EP = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

△AEP において

P から AE に垂線 PH をひき HE = x cm とすると

$PE^2 - HE^2 = AP^2 - AH^2$ より

$(2\sqrt{10})^2 - x^2 = (2\sqrt{7})^2 - (6 - x)^2$

これを解いて

$x = 4$ 10 秒後の QE = 4 だから

H と Q が一致し $\angle PQE = 90^\circ$ とわかる。

よって $PQ = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm

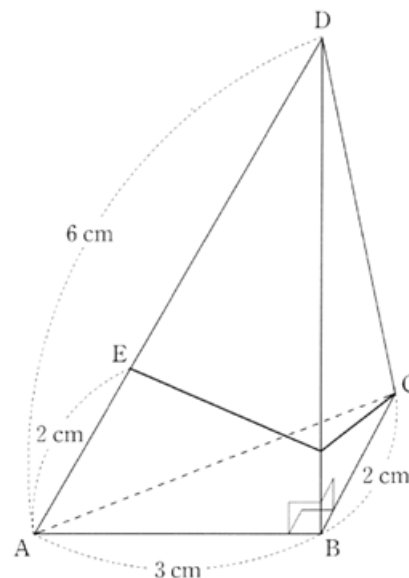
【問 9】

図は、 $AB=3\text{cm}$ 、 $BC=2\text{cm}$ 、 $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とし、点 D を頂点とする三角すいであり、 $AD=6\text{cm}$ 、 $\angle ABD=\angle CBD=90^\circ$ である。点 E は辺 AD 上の点で、 $AE=2\text{cm}$ である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2007 年度)

問1 この三角すいの体積を求めなさい。



問2 この三角すいの表面に、点 C から辺 BD に交わるように、点 E まで細い糸をかける。かけた糸の長さが最も短くなるとき、その糸の長さを求めなさい。ただし、糸はのびたり縮んだりしないものとする。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm

解答

問1 $3\sqrt{3} \text{ cm}^3$

問2 $\sqrt{19} \text{ cm}$

解説

問1

△ABC を底面 BD を高さとして体積を求める。

三平方の定理より $BD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

よって求める体積は $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^3$

問2

糸が最短になるのは展開図において CE が直線になるとき。

点 E から AB に垂線 EH をひく。

直角三角形において AB:DA=1:2 より ∠DAB=60°

よって△EAH は AH:AE:EH=1:2:√3 の直角三角形になるから

AH=1 cm, FH=√3 cm

△EHC において

三平方の定理より $CE^2 = CH^2 + EH^2 = (3+2-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 19$

よって $CE = \sqrt{19} \text{ cm}$

【問 10】

図 1 のように、頂点 A 、底面の中心 O 、底面の半径 3cm 、母線の長さ 9cm の円すいがある。この円すいの底面の円周上の点を B とし、線分 AB を 3 等分する点を A に近い方から順に P 、 Q とするとき、次の 1～3 の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(新潟県 2007 年度)

問1 図 1 の円すいの側面の展開図はおうぎ形になる。このおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

問2 図 1 の円すいの体積を求めなさい。

問3 図 2 のように、図 1 の円すいの側面に、糸の長さが最も短くなるように、点 B から点 Q を通り、点 P まで糸を巻きつける。このとき、糸の長さを求めなさい。

図 1

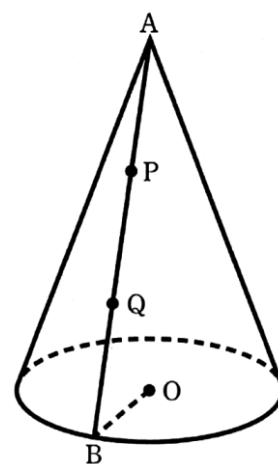
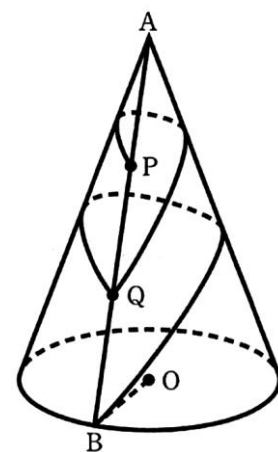


図 2



解答欄

問1	度
問2	cm^3
問3	cm

解答

問1 120 度

問2 $18\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$

問3 $3\sqrt{19} + 3\sqrt{7} \text{ cm}$

解説

問3

側面のおうぎ形を AB で切り開き

おうぎ形 ABB' とし AB 上の P, Q と重なる AB' 上の点を P', Q' とすると

求める糸の長さは QB' + PQ' となる。

Q', B' から BA の延長上に垂線 Q'H, B'K をひく。

$$\triangle Q'AH \text{ は } 60^\circ \text{ の角をもつ直角三角形だから } Q'H = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AQ' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$\triangle PQ'H$ において

$$\text{三平方の定理より } PQ' = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}$$

同様に $\triangle B'AK$ において

$$B'K = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$AK = \frac{1}{2} AB' = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}$$

$$\triangle Q'B'K \text{ において } QK = 6 + \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

$$QB' = \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{19}$$

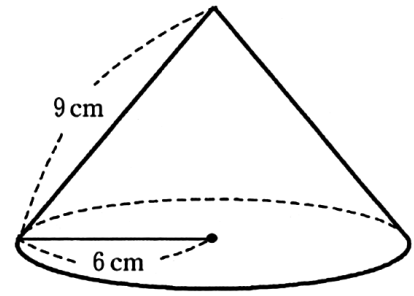
よって求める長さは $3\sqrt{19} + 3\sqrt{7} \text{ cm}$

【問 11】

図のような底面の半径が 6cm 、母線の長さが 9cm の円すいについて次の問いに答えなさい。

(富山県 2007 年度)

(1) 側面の展開図のおうぎ形について、中心角の大きさを求めなさい。



(2) 体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

(1)	度
(2)	cm^3

解答

(1) 240 度

(2) $36\sqrt{5}\pi\text{cm}^3$

解説

(1)

側面のおうぎ形の弧の長さと同底面の円周の長さは等しいので中心角の大きさを x° とすると

$$2\pi \times 9 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 6$$

$$x = 240$$

(2)

円すいの高さは三平方の定理より $\sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$

$$\text{求める体積は } \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 3\sqrt{5} = 36\sqrt{5}\pi\text{cm}^3$$

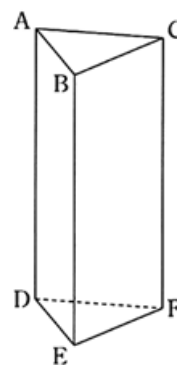
【問 12】

図 1 は、底面の 1 辺の長さが 2 cm で、高さが 5 cm の正三角柱である。また、図 2 は、図 1 の正三角柱を 3 個組み合わせて作った立体である。このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(石川県 2007 年度)

問 1 図 1 の正三角柱において、辺 BC とねじれの位置にある辺をすべて書きなさい。

図 1



問 2 図 2 の立体の側面に、図 3 のように頂点 P から頂点 T までゆるまないように糸をかける。糸の長さが最も短くなるとき、その長さを求めなさい。なお途中の計算も書くこと。

図 2

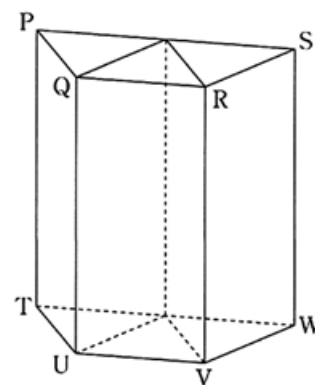
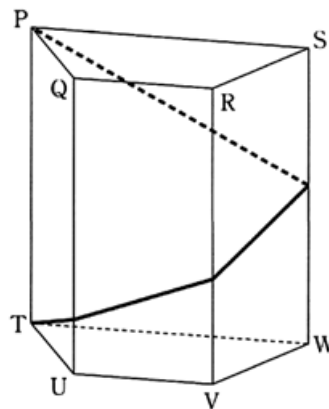
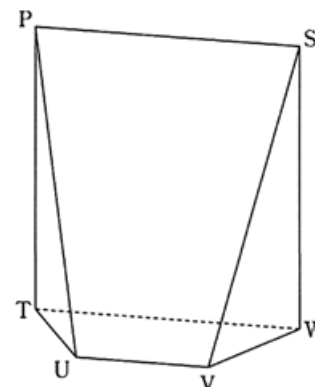


図 3



問 3 図 4 は、図 2 の立体を辺 PS と辺 UV を含む平面で切りとってできた立体である。この立体の体積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

図 4



解答欄

問1	
問2	計算 答 cm
問3	計算 答 cm³

解答

問1 辺 AD, 辺 DE, 辺 DF

問2 $5\sqrt{5}$ cm

問3 $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm³

解説

問2

求める長さは展開図の側面の長方形の対角線の長さになる。

長方形の縦は 5cm 横は $2 \times 5 = 10$ cm

よって三平方の定理より糸の長さは $\sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ cm

問3

ABC は 1 辺が 2cm の正三角形だからその高さは $\sqrt{3}$ cm

UV の延長上に W から垂線 WH をひく。

求める体積は

△SWH を底面とする高さが PS の三角柱から三角すい VSWH2 つ分の体積をひいたものとなる。

よって $\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 5 \times 4 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 5 \times 2 = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm³

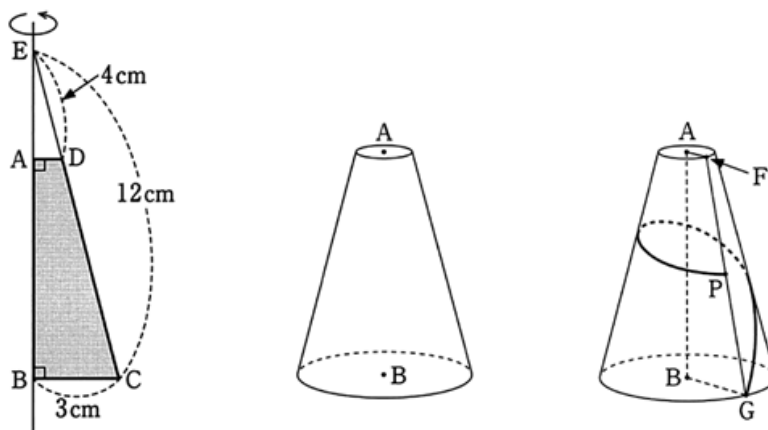
【問 13】

図 1 の四角形 ABCD は、 $EC=12\text{ cm}$ 、 $BC=3\text{ cm}$ で $\angle EBC$ が直角の $\triangle EBC$ から、 $ED=4\text{ cm}$ で $\angle EAD$ が直角な $\triangle EAD$ を切り取ってできた台形である。また、図 2 は、図 1 の台形 ABCD を、直線 AB を軸として 1 回転させてできた立体である。

数子さんは図 2 の立体の体積や表面積などを求めるには $\triangle EBC$ や $\triangle EAD$ を直線 EB を軸として 1 回転させてできる立体の見取図や展開図を利用すればよいと考えた。

教子さんの考えを参考にして、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(山梨県 2007 年度)



問 1 図 2 の立体の体積を求めなさい。

問 2 図 2 の立体の表面積を求めなさい。

問 3 図 3 は、図 2 の立体のそれぞれの底面の円周上に、点 F、G を四角形 ABGF が台形となるようにとり、辺 FG の中点を P としたものである。数子さんは、図 3 のように、点 G から立体の側面を一回りして、点 P までひもをかけた。このひもの長さが最も短くなる場合の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm^2
問3	cm

解答

問1 $\frac{26\sqrt{15}}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2 $42 \pi \text{ cm}^2$

問3 $4\sqrt{13} \text{ cm}$

解説

問1

三平方の定理より $EB = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15}$

$AD \parallel BC$ より $AD:BC = EA:EB = ED:EC = 4:12 = 1:3$

よって $AD:3 = 1:3$ より $AD = 1$

$EA:3\sqrt{15} = 1:3$ より $EA = \sqrt{15}$

求める体積は

もとの三角形を回転させてできる円すいから切り取った三角形を回転させてできる円すいを除いたものだから

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{15} - \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \sqrt{15} = \frac{26\sqrt{15}}{3} \pi \text{ cm}^3$$

問3

切り取る前の円すいの側面のおうぎ形の中心角の大きさは $\frac{2\pi \times 3}{2\pi \times 12} \times 360^\circ = 90^\circ$

ひもが最も短いとき PG は直角三角形の斜辺になる。

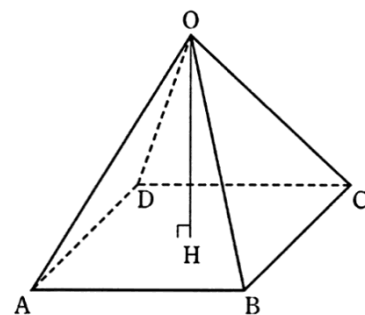
$EP = 4 + (12 - 4) \div 2 = 8$ より

$PG = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13} \text{ cm}$

【問 14】

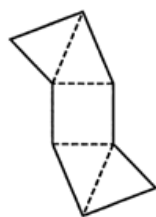
図のような正四角錐 $OABCD$ がある。底面の正方形 $ABCD$ の 1 辺の長さと、高さ OH はどちらも a cm である。

(長野県 2007 年度)

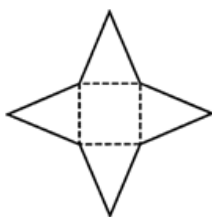


- (1) 辺 CB , BO , OA , AD で切ってひろげたときの展開図として、正しいものを次のア～エから 1 つ選び、記号を書きなさい。

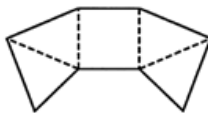
ア



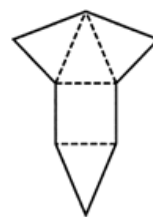
イ



ウ



エ



- (2) この正四角錐の体積 V cm^3 を a を使って表しなさい。

- (3) 底面の正方形の 1 辺の長さを 3 倍、高さを半分にした正四角錐をつくと、その体積はもとの正四角錐の体積の何倍になるか求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	$V =$
(3)	倍

解答

- (1) エ

(2) $V = \frac{1}{3} a^3$

(3) $\frac{9}{2}$ 倍

【問 15】

図 1 の四角形 $ABCD$ は、 $AB=7\text{cm}$ 、 $AD=3\text{cm}$ の長方形である。また、2 点 P 、 Q は、それぞれ辺 AB 、 DC 上の点である。このとき、次の 1、2 の問いに答えなさい。

(静岡県 2007 年度)

図 1

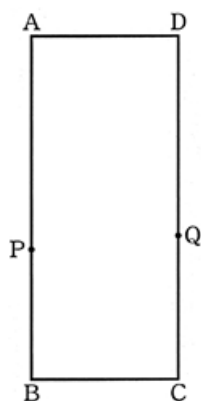


図 2

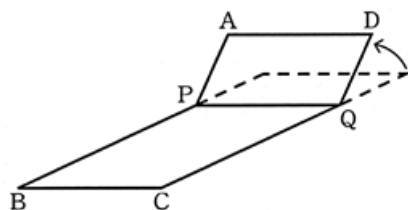
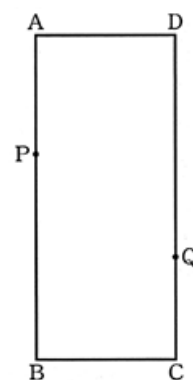


図 3



問1 $PB=QC=5\text{cm}$ であるとき、図 2 のように、長方形 $ABCD$ を、 PQ を折り目にして手前に折り曲げ、平面 $APQD$ と平面 $PBCQ$ が垂直になるようにする。平面 $APQD$ と平面 $PBCQ$ が垂直であるときの、2 点 A 、 B を結ぶ線分 AB の長さを求めなさい。

問2 図 3 のように $PB=2QC$ であるとき、四角形 $PBCQ$ を、辺 PB を軸として 1 回転させる。このときできる立体の体積が、長方形 $ABCD$ を辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積の半分になるときの、 QC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm

解答

問1 $\sqrt{29}$ cm

問2 $\frac{21}{8}$ cm

解説

問1

PB=QC=5cm のとき AP=DQ=7-5=2

∠APB=90° だから

三平方の定理より AB= $\sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$ cm

問2

QC=x cm とする。

四角形 PBCQ を 1 回転させてできた立体の体積は

$$\pi \times 3^2 \times x + \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times x = 12\pi x \cdots A$$

また四角形 ABCD を 1 回転させてできた立体の体積は

$$\pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi \cdots B$$

A は B の $\frac{1}{2}$ より

$$12\pi x = \frac{63}{2} \pi$$

$$x = \frac{21}{8} \text{ cm}$$

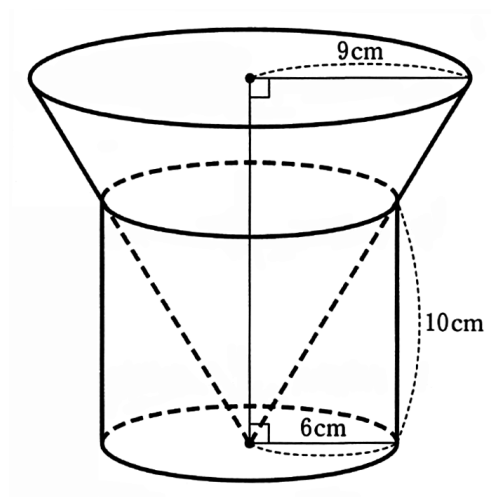
【問 16】

水をいっぱいに入れた円柱の容器に、円すいをその頂点が円柱の容器の底面の円の中心と重なるまで入れたところ、右の図のように、円すいの側面と円柱の容器の口がすき間なく重なった。このとき、円すいの一部が入った分だけ、円柱の容器から水があふれ出た。円柱の容器の底面の円の半径が 6cm 、高さが 10cm 、円すいの底面の円の半径が 9cm のとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2007 年度)

(1) 円すいの高さを求めなさい。

(2) 円柱の容器の中に残っている水の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) 15 cm

(2) $240\pi\text{ cm}^3$

解説

(2)

あふれ出た水の量は $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 10$ で

円柱の体積の $\frac{1}{3}$ だから

残ったのは円柱の体積の $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

よって $\frac{2}{3} \times \pi \times 6^2 \times 10 = 240\pi\text{ cm}^3$

【問 17】

図 1 のように、縦 5cm、横 4cm、高さ 8cm の直方体の容器を水平な面に置き、底から 7cm の高さまで水を入れた。図 1 の状態から図 2、図 3 のように、辺 FG を軸に容器を徐々に傾けていくと水が流れ出た。水面が辺 AE または辺 EF と交わる点を P とし、点 P が最初の位置から動いた距離を x cm、容器から流れ出た水の体積を y cm³ とする。

後の 1～4 の問いに答えなさい。ただし、容器の厚みは考えないものとする。

(滋賀県 2007 年度)

問 1 容器から水がはじめて流れ出したときの AP の長さはいくらか求めなさい。

問 2 容器から水がはじめて流れ出したときの点 P が、E の位置に達するまでについて、 y を x の式で表しなさい。

問 3 容器の中の水の体積が、はじめの水の体積のちょうど半分になったとき、 x の値はいくら求めなさい。

問 4 水面の面積が、 $x=6$ のときの面積と再び等しくなるのは、 x の値がいくらのときか。求めなさい。

図 1

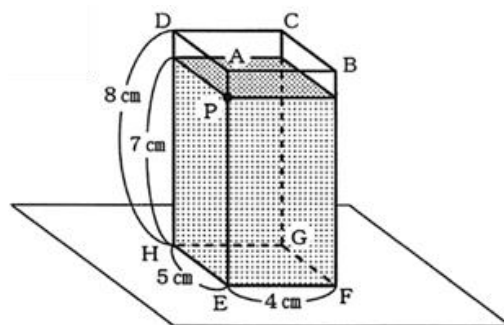


図 2

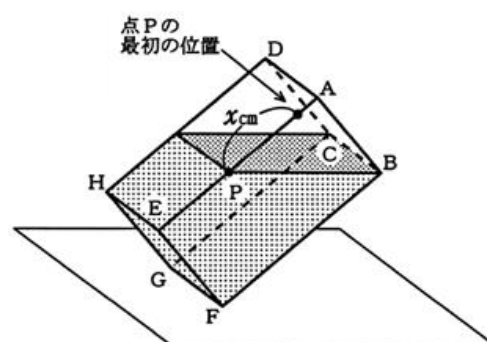
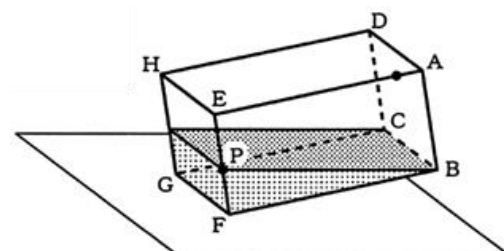


図 3



解答欄

問1	cm
問2	
問3	$x=$
問4	$x=$

解答

問1 2 cm

問2 $y=10x-10$

問3 $x=\frac{15}{2}$

問4 $x=10$

解説

問1

はじめて水が流れ出すのは

容器を傾けてできる底面が $\triangle ABP$ で高さが DA の三角柱の体積と
もとの容器の水の入っていない部分の体積が一致するときである。

$$\text{よって } \frac{1}{2} \times AP \times 4 \times 5 = 5 \times 4 \times (8-7)$$

$$AP=2 \text{ cm}$$

問2

P が AE 上にあるとき $0 \leq x \leq 7$

このとき流れ出た水の体積は

底面が $\triangle ABP$ で高さが DA の三角柱－最初の水の入っていない部分の四角柱の体積 だから

$$y = \frac{1}{2} \times (x+1) \times 4 \times 5 - 4 \times 5 \times 1 = 10x - 10$$

問3

半分になるのは P が EF 上にあるときで $7 \leq x \leq 11$

このときの流れ出た水の体積は

もとの水の体積－底面が $\triangle PBF$ で高さが CB の三角柱だから

$$y = 4 \times 5 \times 7 - \frac{1}{2} \times (11-x) \times 8 \times 5 = 20x - 80$$

これがもとの水の体積の半分だから

$$20x - 80 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times 7$$

これを解いて

$$x = \frac{15}{2}$$

問4

$x=6$ のとき P は AE 上にありこれと水面の面積が等しくなるときは P は EF 上にある。

また面積が等しくなるときは BP が等しくなるとき。

三平方の定理より

$$(11-x)^2 + 8^2 = 7^2 + 4^2$$

$$x^2 - 22x + 120 = 0$$

$$(x-10)(x-12) = 0$$

$$x = 12, 10$$

$7 \leq x \leq 11$ より

$$x = 10$$

【問 18】

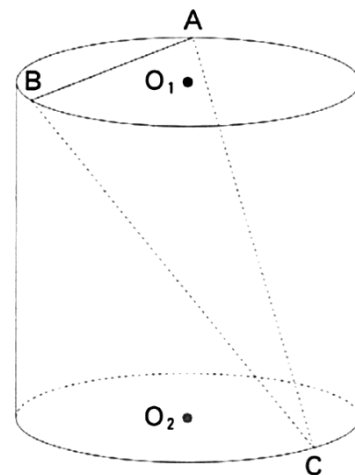
図のように、底面の半径が 2cm 、高さが 6cm の円柱がある。底面の円の中心はそれぞれ O_1 、 O_2 で、円 O_1 の円周上に点 A と点 B を、 $\angle AO_1B = 120^\circ$ となるようにとる。また、円 O_2 の円周上に点 C を、 $\triangle ABC$ の面積が最も大きくなるようにとる。

このとき、次の問い1・2に答えよ。

(京都府 2007 年度)

問1 線分 AB の長さを求めよ。

問2 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。



解答欄

問1	$AB =$ cm
問2	cm^2

解答

問1 $AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

問2 $3\sqrt{15} \text{ cm}^2$

解説

問1

$\triangle O_1AB$ で $O_1A = O_1B$, $\angle AO_1B = 120^\circ$ より

O_1 から AB に垂線 O_1H をひくと

$\triangle AO_1H$ は $\angle AO_1H = 60^\circ$, $\angle O_1HA = 90^\circ$ の直角三角形になるから

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\text{よって } AB = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

問2

A , B から底面の円 O_2 に垂線 AD , BE をひく。

$$\text{円周角の定理より } \angle DCE = \frac{1}{2} \angle DO_2E = 60^\circ$$

$CD = CE$ だから $\triangle CDE$ は正三角形になる。

$$\text{よって } EC = DE = AB = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle BEC \text{ で三平方の定理より } BC = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

$\triangle ABC$ は $AC = BC$ の二等辺三角形だから $\angle CHB = 90^\circ$

$$\text{よって } \triangle CBH \text{ で三平方の定理より } CH = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{したがって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} = 3\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

【問 19】

写真に示したような脚立をモデルにした問題である。図 I において、立体 $ABCD-EFGH$ は六つの平面で囲まれてできた立体である。平面 $ABCD$ と平面 $EFGH$ とは平行である。四角形 $ABCD$ は $AB=2\text{ cm}$, $BC=3\text{ cm}$ の長方形であり、四角形 $EFGH$ は $EF=8\text{ cm}$, $FG=5\text{ cm}$ の長方形である。四角形 $AEFB$, $BFGC$, $DHGC$, $AEHD$ はすべて台形であり、台形 $AEFB \equiv$ 台形 $DHGC$, 台形 $BFGC \equiv$ 台形 $AEHD$ である。 $AE=BF=CG=DH=10\text{ cm}$ である。

I, J, K, L はそれぞれ辺 AE, BF, CG, DH 上の点であり、 $AI=BJ=CK=DL$ である。このとき、4 点 I, J, K, L は同じ平面上にあり、その 4 点を結んでできる四角形 $IJKL$ は長方形になる。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2007 年度 前期)

問1 $AI=x\text{ cm}$ とする。

- (1) 長方形 $IJKL$ の辺 IJ の長さを x を用いて表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

- (2) 長方形 $IJKL$ が正方形になるときの x の値を求めなさい。

問2 図 II は、図 I 中の立体 $ABCD-EFGH$ において台形 $AEHD$, $BFGC$ をそれぞれ直線 AD, BC を軸として回転させ、 E と F, H と G とをそれぞれ重ね合わせてできる立体 $ABCD-EH$ を示している。図 II において、 O は辺 AB の中点である。 P は O から辺 EH にひいた垂線と辺 EH との交点である。このとき、直線 OP は平面 $ABCD$ と垂直になる。また、直線 BP は辺 EH と垂直になる。

- (1) 線分 OP の長さを求めなさい。

- (2) 立体 $ABCD-EH$ の体積を求めなさい。



図 I

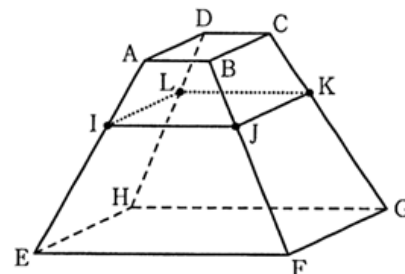
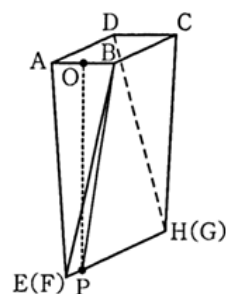


図 II



解答欄

問1	(1)	求め方	
	(2)	cm	
問2	(1)	cm	
	(2)	cm ³	

解答

問1

求め方

Aを通り辺BFに平行な直線と線分IJ, 辺EFとの交点をそれぞれM, Nとすると

$IJ \parallel EF$ だから $AI:AE=IM:EN$

また四角形ANFB, AMJBは平行四辺形になるから

$NF=MJ=AB=2\text{ cm}$ だから

$EN=EF-NF=EF-AB=6\text{ cm}$

$IM=y\text{ cm}$ とすると

$x:10=y:6$

これを y について解くと

$$y = \frac{3}{5}x$$

よって $IJ=IM+MJ=\frac{3}{5}x+2\text{ cm}$

答 $\frac{3}{5}x+2$

(2) $\frac{5}{2}$

問2

(1) $7\sqrt{2}$

(2) $\frac{77}{3}\sqrt{2}$

解説

問1

(2)

台形 BFGC において B を通り CG に平行な線をひき JK, FG との交点をそれぞれ Q, R とする。

$BC \parallel JK \parallel FG$

$QK = RG = BC = 3$ より

$FR = 5 - 3 = 2$

$\triangle BFR$ において

$JQ : FR = BJ : BF$ だから

$JQ : 2 = x : 10$

$$JQ = \frac{2}{10}x = \frac{1}{5}x$$

$$\text{よって } JK = \frac{1}{5}x + 3$$

長方形 IJKL が正方形になるときだから $JK = IJ$

$$(1) \text{より } IJ = \frac{3}{5}x + 2 \text{ だから}$$

$$\frac{1}{5}x + 3 = \frac{3}{5}x + 2$$

これを解いて

$$x = \frac{5}{2}$$

問2

(1)

$$EP = (5 - 3) \div 2 = 1$$

$\triangle BEP$ において

$$\text{三平方の定理より } BP = \sqrt{10^2 - 1^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$\triangle PAB$ は $PA = PB$ の二等辺三角形だから $\angle POB = 90^\circ$

$$\text{よって } \triangle POB \text{ において } OB = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{三平方の定理より } OP = \sqrt{(3\sqrt{11})^2 - 1^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

(2)

求める体積は三角柱と E-PAB と合同な 2 つの三角すいに分けて考えると

$$\triangle PAB \times BC + 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \triangle PAB \times EP \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 7\sqrt{2} \times 3 + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 7\sqrt{2} \times 1$$

$$= 21\sqrt{2} + \frac{14}{3}\sqrt{2}$$

$$= \frac{77}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

【問 20】

図 I において、図形 ABCDEF は、六つの線分 AB, BC, CD, DE, EF, FA によって囲まれてできる図形である。G, H は、それぞれ、B, C から辺 FE にひいた垂線と辺 FE との交点である。四角形 ABGF, CDEH は長方形である。AF=1 cm, DE=3 cm, FG=GH=2 cm, HE=8 cm である。このとき、四角形 BCHG は $BG \parallel CH$ の台形となり、その内角 $\angle BCH$ の大きさは 45° になる。円周率を π として、次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2007 年度 後期)

問1 解答欄の図は、図 I 中の点 C と線分 FE のみを示したものである。C を通り線分 FE に垂直な直線を、定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように、作図に用いた線は残しておくこと。

問2 図 II, 図 III は、図 I の図形 ABCDEF を直線 FE を軸として 1 回転させてできる立体を示している。この立体を P とする。

(1) 図 II において、AI は円 F の直径である。J は、直線 ID と直線 CH との交点である。

① 線分 ID の長さを求めなさい。

② 線分 CJ の長さを求めなさい。

(2) 図 III において、K は、線分 HE 上にあつて E と異なる点である。

① 立体 P の体積を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

② 立体 P は、K を通り直線 FE に垂直な平面によって二つの立体に分けられる。その二つの立体のうち、点 F をふくむ方の立体の体積を $V \text{ cm}^3$ とし、点 E をふくむ方の立体の体積を $W \text{ cm}^3$ とする。 $V=3W$ となるとき、線分 KE の長さを求めなさい。

図 I

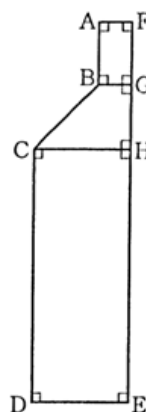


図 II

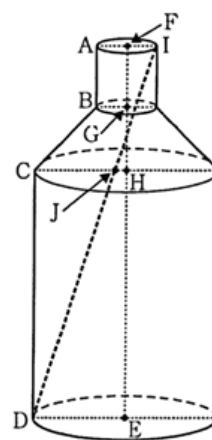
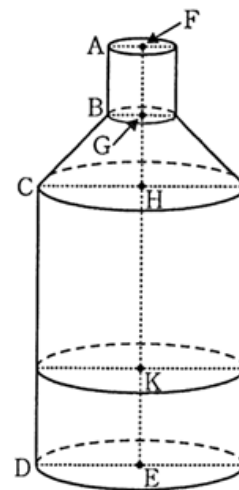


図 III

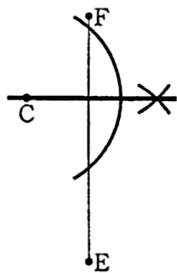


解答欄

問1			
問2	(1)	①	cm
		②	cm
	(2)	①	求め方
		②	cm

解答

問1



問2

(1)

① $4\sqrt{10}$

② $\frac{8}{3}$

(2)

①

求め方

直線 BC と直線 FE との交点を L とすると

$\triangle LCH$ は $\angle CHL = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$LH = CH = 3 \text{ cm}$$

$$\text{だから } LG = LH - GH = 1 \text{ cm}$$

よって立体 P の体積は

$$(\pi \times AF^2 \times FG) + \left(\frac{1}{3} \times \pi \times CH^2 \times LH - \frac{1}{3} \times \pi \times BG^2 \times LG\right) + (\pi \times CH^2 \times HE)$$

$$= \frac{248}{3} \pi$$

答 $\frac{248}{3} \pi \text{ cm}^3$

② $\frac{62}{27}$

解説

問2

(1)

①

I から DE の延長上に垂線 IP をひく。

△IDP において

IP = 2 + 2 + 8 = 12, DP = 3 + 1 = 4 より

三平方の定理を利用して $ID = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$ cm

②

IP と CH の延長線の交点を Q とすると

CD // IP だから CJ : JQ = CD : IQ = 8 : 4 = 2 : 1

よって $CJ = \frac{2}{3} CQ = \frac{2}{3} \times (3 + 1) = \frac{8}{3}$ cm

(2)

②

V = 3W より

$W = \frac{1}{4} \times \text{立体 P の体積}$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{248}{3} \pi$$

$$= \frac{62}{3} \pi$$

また $W = \pi \times 3^2 \times KE = 9\pi KE$ と表せるから

$$9\pi KE = \frac{62}{3} \pi$$

$$KE = \frac{62}{27} \text{ cm}$$

【問 21】

図 1 のように、1 辺の長さが 2 cm の正四面体(正三角すい)ABCD がある。辺 AB, BC, CD の中点をそれぞれ E, F, G とする。次の(1)～(3)に答えなさい。

(島根県 2007 年度)

(1) AG, EG の長さをそれぞれ求めなさい。

(2) $\angle FEG$ の大きさを求めなさい。

(3) 点 E から辺 AC を通って頂点 D まで、長さが最も短くなるようにひもをかけるとき、次の①, ②に答えなさい。

① 図 2 は、この正四面体の展開図である。ひものようすは図 2 の展開図にどのように表されるか、解答用紙の展開図に実線でかき入れなさい。ただし、図中の点(・)は、それぞれ正四面体の各辺の中点の位置を示している。

② ひもの長さを求めなさい。

図 1

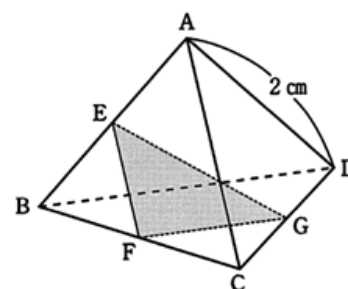
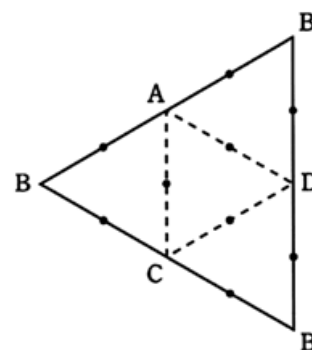


図 2



解答欄

(1)	AG = cm	
	EG = cm	
(2)	°	
(3)	①	
	②	cm

解答

(1)

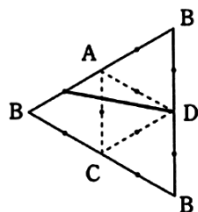
$$AG = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$EG = \sqrt{2} \text{ cm}$$

(2) 45°

(3)

①



② $\sqrt{7} \text{ cm}$

解説

(1)

$\triangle ACG$ は正三角形だから $AC = 2 \text{ cm}$, $CG = 1 \text{ cm}$, $\angle AGC = 90^\circ$, $\angle ACG = 60^\circ$ より

$$AG = \sqrt{3} \text{ cm}, CG = \sqrt{3} \text{ cm}$$

EG は $AG = BG$ の二等辺三角形の頂点 G と底辺 AB の中点を結んだものだから

$$EG = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

$$\text{中点連結定理より } EF = \frac{1}{2} AC = 1, FG = \frac{1}{2} BD = 1$$

よって $\triangle EFG$ において

$$EF : FG : EG = 1 : 1 : \sqrt{2} \text{ より}$$

$\angle EFG = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であることがわかる。

よって $\angle FEG = 45^\circ$

(3)

②

展開図において D から AB に垂線 DE' をひくと AB の中点と一致する。

ひもの長さは $\triangle EE'D$ の斜辺になるから

$$\text{三平方の定理より } \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7} \text{ cm}$$

【問 22】

図のような、 $AD = 6 \text{ cm}$ 、 $DE = 3 \text{ cm}$ 、 $EF = 4 \text{ cm}$ の三角柱 $ABCDEF$ があり、その 1 つの底面は $\angle DEF = 90^\circ$ の直角三角形で、側面はすべて長方形である。また、辺 CF 上に点 G を、線分 BG の長さが 5 cm になるようにとり、点 B と点 G を結ぶ。点 P は最初点 E にあり、毎秒 1 cm の速さで辺 EB 、線分 BG の上を、点 E から点 B を通って点 G まで動いて止まる。点 P が出発してから x 秒後の三角錐 $PDEF$ の体積を $y \text{ cm}^3$ とする。ただし、 $x=0$ のとき、 $y=0$ とする。

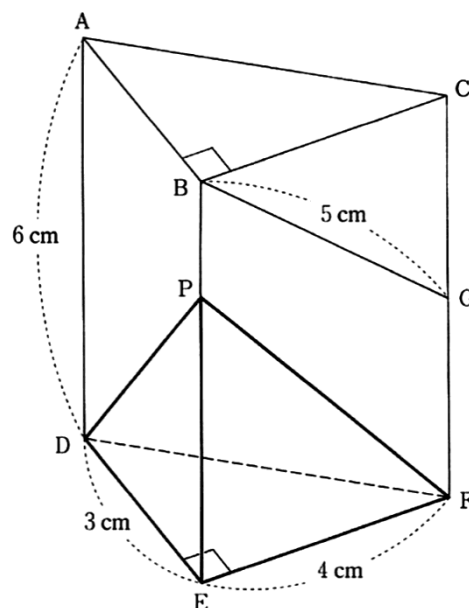
このとき、次の問1～問3の に適当な数または式を書き入れなさい。

(岡山県 2007 年度)

問1 三角柱 $ABCDEF$ の体積は cm^3 であり、線分 CG の長さは cm である。

問2 $0 \leq x \leq 6$ のとき、 y を x の式で表すと、 $y =$ である。また、 $x=2$ のとき、 y の値は である。

問3 $x=10$ のとき、 y の値は である。



解答欄

問1	ア	cm^3
	イ	cm
問2	ア	$y =$
	イ	
問3		

解答

問1

ア 36 cm^3

イ 3 cm

問2

ア $y=2x$

イ 4

問3 $\frac{36}{5}$

解説

問2

ア

$0 \leq x \leq 6$ のとき $PE=x \text{ cm}$

三角錐 PDEF の体積 $= \frac{1}{3} \times \triangle DEF \times PE$ より

$$y = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times x = 2x$$

イ

$x=2$ のとき $y=2 \times 2=4$

問3

$x=10$ のとき $BP=10-6=4$

P を通り CF と平行な直線をひき EF, BC と交わる点をそれぞれ H, K とすると

PK // GC より

PK:GC=BP:BG

PK:3=4:5

$$PK = \frac{12}{5}$$

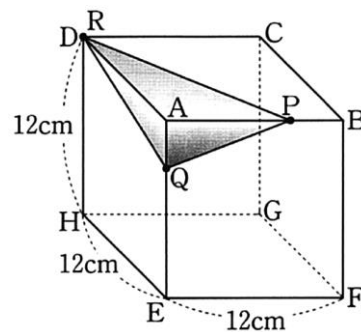
PH $= 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ 三角錐 PDEF の体積 $= \frac{1}{3} \times \triangle DEF \times PH$ より

$$y = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{18}{5} = \frac{36}{5}$$

【問 23】

図のような 1 辺の長さが 12 cm の立方体があり, 3 点 P, Q, R は, それぞれ辺 AB, AE, AD 上を次のように動くものとする。

- 点 P は, A を出発し, 毎秒 4 cm の速さで動いて, B で止まる。
- 点 Q は, 点 P と同時に A を出発し, 毎秒 2 cm の速さで動いて, E で止まる。
- 点 R は, 点 Q が E に到着するまでは, D に止まっている。そして, 点 Q が E に到着すると同時に D を出発し, 毎秒 3 cm の速さで動いて, A で止まる。



点 P が A を出発してから x 秒後の, 三角すい APQR の体積を $y \text{ cm}^3$ とする。
次の問1, 問2に答えなさい。

(山口県 2007 年度)

問1 x の変域が $0 < x < 3$ のとき, y を x の式で表しなさい。

問2 次の ア , イ にあてはまる数を求めなさい。

点 P が A を出発してから ア 秒後に, 点 R が D を出発する。また, 点 R が D を出発したあと, $y=240$ となるのは, $x=$ イ のときである。

解答欄

問1	$y=$	
問2	ア	
	イ	

解答

問1 $y=16x^2$

問2

ア 6

イ $\frac{20}{3}$

解説

問1

$0 < x < 3$ のとき $AP=4x$, $AQ=2x$, $AR=12$

三角すい $APQR$ の体積は

$\frac{1}{3} \times \triangle AQP \times AR$ より

$$y = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4x \times 2x \times 12 = 16x^2$$

問2

点 R が D を出発するのは点 Q が E に到着するときだから

$12 \div 2 = 6$ 秒後

$6 < x < 10$ のとき

$$y = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times (30 - 3x) = 720 - 72x$$

$y=240$ になるのは

$$240 = 720 - 72x$$

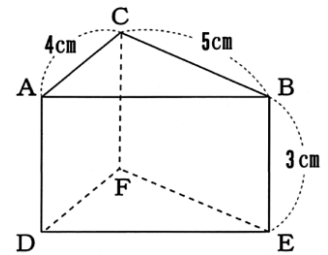
$$x = \frac{20}{3}$$

【問 24】

図のような三角柱があり、 $AC=4\text{ cm}$ 、 $CB=5\text{ cm}$ 、 $BE=3\text{ cm}$ であるとき、次の(1)、(2)の問いに答えよ。

(香川県 2007 年度)

- (1) この三角柱の辺のうち、辺 AD とねじれの位置にある辺はどれか。すべて書け。



- (2) 点 A と点 E 、点 C と点 E をそれぞれ結ぶ。 $AE=CE$ であるとき、この三角柱の体積は何 cm^3 か。

解答欄

(1)	
(2)	cm^3

解答

(1) 辺 BC 、辺 EF

(2) $6\sqrt{21}\text{ cm}^3$

解説

(2)

$AE=CE$ のとき

$\triangle ABE$ と $\triangle CBE$ は

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので合同になる。

よって $AB=CB=5$

B から AC に垂線 BH をひくと

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

$AH=CH=2$ 、 $\angle BHA=90^\circ$

よって三平方の定理より $BH=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

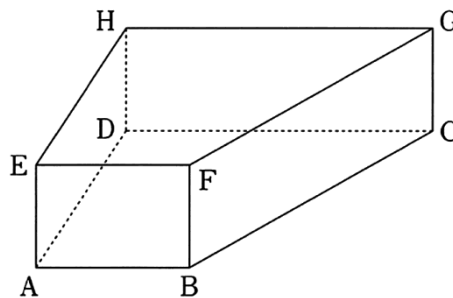
求める体積は $\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} \times 3 = 6\sqrt{21}\text{ cm}^3$

【問 25】

図は、底面 ABCD が $AD=4\text{cm}$ 、 $\angle DAB=\angle ADC=90^\circ$ 、 $AB=3\text{cm}$ 、 $DC=6\text{cm}$ の台形で、側面がすべて長方形の四角柱 ABCDEFGH を表しており、 $AE=2\text{cm}$ である。

次の問1～3の の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。
ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2007 年度)



問1 図に示す立体で、辺 BC とねじれの位置にある辺は、全部で 本 ある。

問2 図に示す立体において、長方形 FBCG を底面とし、点 D を頂点とする四角すい DFBCG の体積は cm^3 である。

問3 図に示す立体において、点 P が辺 EF, FB 上を点 E から点 F を通って点 B まで動く。 $AP+PG$ の長さが最も短くなるとき、 $AP+PG$ の長さは cm である。

解答欄

問1	本
問2	cm^3
問3	cm

解答

問1 5 本

問2 16cm^3

問3 $2\sqrt{17}\text{cm}$

解説

問3

展開図において AG 上に点 P がくるときが最短になるとき。

P が EF 上にあるとき $\triangle GHA$ において三平方の定理より $AG = \sqrt{(2+4)^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

P が FB 上にあるとき B から CD に垂線 BK をひくと $BK=4$ 、 $CK=6-3=3$

$\triangle BCK$ において三平方の定理より $BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\triangle ACG$ において $AG = \sqrt{(3+5)^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$

$2\sqrt{17} < 6\sqrt{2}$ より

$AP+PG=2\sqrt{17}\text{cm}$

【問 26】

図のように、1 辺の長さが 4cm の正四面体 ABCD があり、辺 BC, CD の中点をそれぞれ M, N とする。また、点 M から線分 AN に垂線をひき、その交点を H とする。

このとき、次の1～5の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2007 年度 後期)

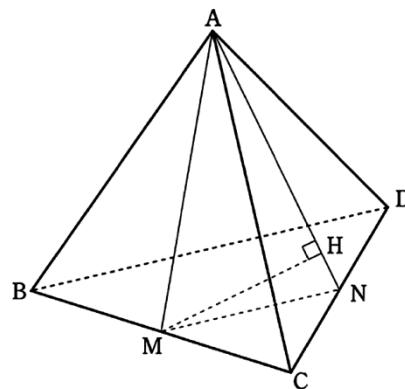
問1 MN の長さを求めなさい。

問2 AM の長さを求めなさい。

問3 $\triangle AMN$ の面積を求めなさい。

問4 MH の長さを求めなさい。

問5 三角すい HBCD の体積は、正四面体 ABCD の体積の何倍か。



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm ²
問4	cm
問5	倍

解答

問1 2 cm

問2 $2\sqrt{3}$ cm

問3 $\sqrt{11}$ cm²

問4 $\frac{\sqrt{33}}{3}$ cm

問5 $\frac{1}{6}$ 倍

解説

問5

△MNH において

$$\text{三平方の定理より } HN = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

三角すい HBCD と正四面体 ABCD は底面△BCD が共通なのでその体積の比は高さの比と等しくなる。

H, A から底面 BCD に垂線 HP, AQ をひくと P, Q は BN 上にある。

△ANQ において

HP //AQ より

$$HP:AQ=HN:AN=\frac{\sqrt{3}}{3}:2\sqrt{3}=1:6$$

よって三角すい HBCD の体積は

正四面体 ABCD の体積の $\frac{1}{6}$ 倍

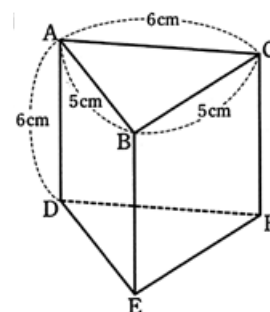
【問 27】

図 1～図 4 のように 6 つの点 A, B, C, D, E, F を頂点とする三角柱 ABCDEF があり, 側面はいずれも底面に垂直で, $AB=BC=5\text{cm}$, $AC=AD=6\text{cm}$ である。このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2007 年度)

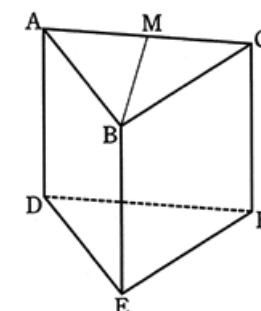
問1 図 1 の三角柱 ABCDEF において, 辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて答えよ。

図 1



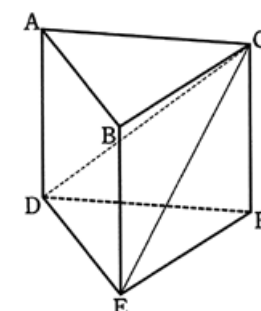
問2 図 2 において, 辺 AC の中点を M とするとき線分 BM の長さは何 cm か。

図 2



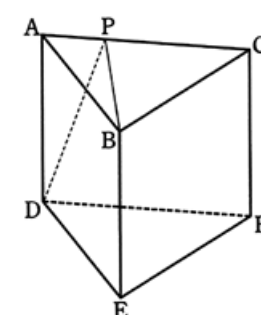
問3 三角柱 ABCDEF の表面積は何 cm^2 か。

図 3



問4 図 3 において, 5 つの点 C, A, D, E, B を頂点とする四角すい CADEB の体積は何 cm^3 か。

図 4



問5 図 4 において, 辺 AC 上を動く点を P とする。2 つの線分 BP, PD の長さの和 $BP+PD$ が最小となるとき, $BP+PD$ の長さは何 cm か。

解答欄

問1	
問2	cm
問3	cm ²
問4	cm ³
問5	cm

解答

問1 辺 CF, 辺 DF, 辺 EF

問2 4 cm

問3 120 cm²

問4 48 cm³

問5 $\sqrt{109}$ cm

解説

問4

三角柱から三角すい CDEF の体積をひく。

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 6 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 6 = 48 \text{ cm}^3$$

問5

BP+PD が最小となるのは展開図において点 P が線分 BD 上にあるとき。

DF の中点を N とすると

△BND で

∠BND=90°

DN=3

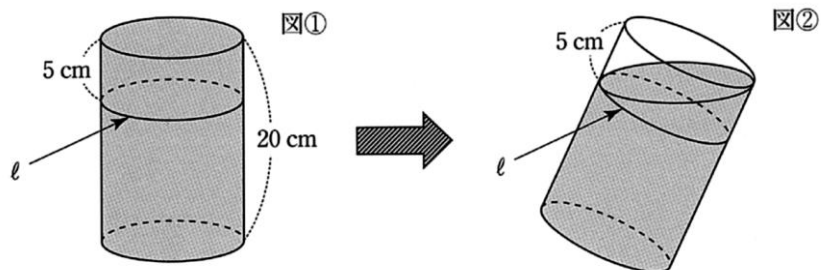
BN=4+6=10 だから

三平方の定理を利用して $BD = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} \text{ cm}$

【問 28】

図①のように、高さが 20cm の円柱形の容器に、水が一杯に入っている。この容器の側面には、上端から 5cm の位置に線 ℓ が書いてある。この容器を傾けて、水をこぼしていき、図②のように水面が線 ℓ にとどいたところで傾けるのを止めた。残った水の量とこぼれ出た水の量の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

(大分県 2007 年度)



解答欄

残った水の量:こぼれ出た水の量＝ $\quad$:

解答

残った水の量:こぼれ出た水の量＝7:1

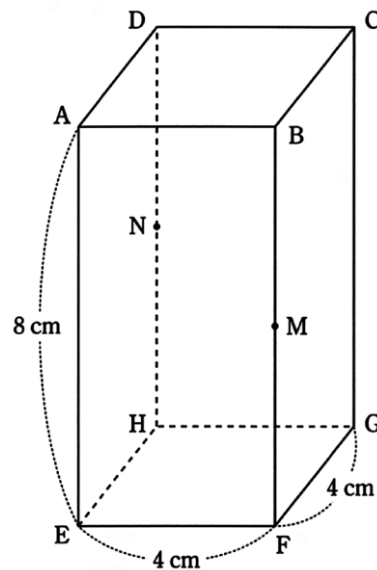
【問 29】

図のように、底面が 1 辺 4cm の正方形で、高さが 8cm の直方体がある。
次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(大分県 2007 年度)

(1) 線分 CE の長さを求めなさい。

(2) 辺 BF の中点を M, 辺 DH の中点を N とおくと、四角形 CNEM の面積を求めなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm ²

解答

(1) $4\sqrt{6}$ cm

(2) $16\sqrt{3}$ cm²

解説

(2)

EM, CM, CN, EN は直角をはさむ 2 辺が 4cm の直角二等辺三角形の斜辺になるから

$$EM = CM = CN = EN = 4\sqrt{2}$$

つまり四角形 CNEM は 1 辺の長さが $4\sqrt{2}$ cm のひし形になる。

ひし形の対角線はそれぞれの中点で垂直に交わるので

対角線の交点を H とすると

$$CE = 4\sqrt{6}, \quad NM = 4\sqrt{2} \quad NH = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって四角形 CNEM} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

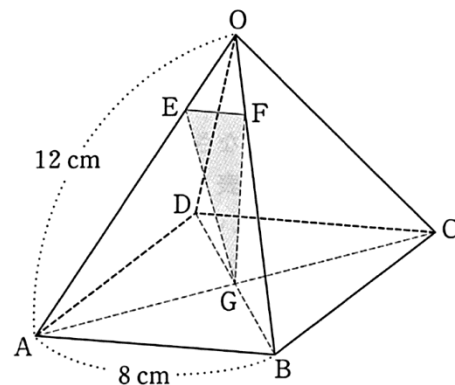
【問 30】

図のように、 $OA=12\text{cm}$ 、 $AB=8\text{cm}$ の正四角すい $OABCD$ がある。
 点 E は辺 OA 上にあり、点 F は辺 OB 上にあって、 $OE=OF=3\text{cm}$
 である。また、点 G は底面 $ABCD$ の 2 つの対角線 AC 、 BD の交点で
 ある。このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2007 年度)

問1 線分 EF の長さを求めなさい。

問2 $\triangle EFG$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm ²

解答

問1 2 cm

問2 8 cm²

解説

△AGBは直角二等辺三角形だから

$$AG:AB=1:\sqrt{2}$$

$$AG:8=1:\sqrt{2}$$

$$AG=\frac{8\times 1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

△AOGで

$$\text{三平方の定理より } OG=\sqrt{12^2-(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{7}$$

EからAGに垂線EHをひく。

EH//OGより

$$AH:AG=AE:AO$$

$$AH:4\sqrt{2}=9:12$$

$$AH=\frac{4\sqrt{2}\times 9}{12}=3\sqrt{2}$$

同様にEH:OG=AE:AO

$$EH:4\sqrt{7}=9:12$$

$$EH=\frac{4\sqrt{7}\times 9}{12}=3\sqrt{7}$$

$$HG=AG-AH=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

△EHGで

$$\text{三平方の定理より } EG=\sqrt{(3\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{65}$$

$$\text{同様に } GF=\sqrt{65}$$

GからEHに垂線GKをひくと△EFGは二等辺三角形より

$$EK=FK=2\div 2=1$$

$$\text{よって}\triangle EGK\text{で三平方の定理より } GK=\sqrt{(65)^2-1^2}=8$$

$$\text{したがって}\triangle EFG=\frac{1}{2}\times EF\times GK=\frac{1}{2}\times 2\times 8=8\text{ cm}^2$$

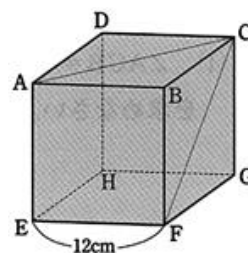
【問 31】

図 I のような、8 点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする立方体の形をした紙の箱がある。1 辺の長さが 12 cm のとき、次の 1～3 の問いに答えなさい。
ただし、紙の厚さは考えないものとする。

(宮崎県 2007 年度)

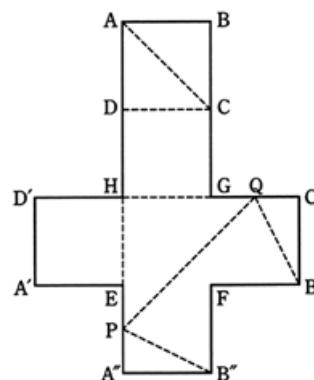
問1 図 I において、 $\angle ACF$ の大きさを求めなさい。

図 I



問2 図 I において、頂点 A と G を結んだ対角線 AG の長さを求めなさい。

図 II



問3 図 II は、図 I の立方体の箱を展開したもので、点 A', A'', B', B'', C', D' は頂点であり、点 P, Q は、それぞれ辺 EA'', GC' の中点である。この図 II から、図 III のように、次の①～③の手順で折って、図 IV のような立体をつくる。

図 III

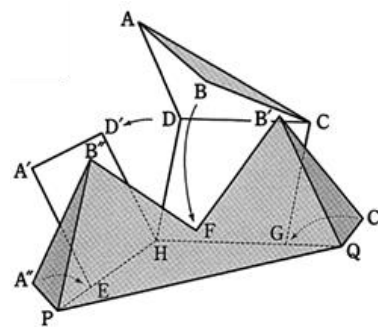
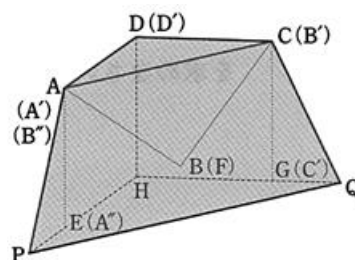


図 IV



- ① HE, HG, DC を折り目として、線分 D'H と DH, 線分 AD と A'D' を重ねる。
- ② PQ, QB', PB'' を折り目として、線分 CG と B'C', 線分 A'E と B''A'' を重ねる。
- ③ AC を折り目として、点 B と F を重ねる。

このとき、次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 図 IV において、台形 APQC の面積を求めなさい。

(2) 図 IV の 6 点 A, C, D, P, Q, H を頂点とする立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	$\angle ACF =$ 度	
問2	$AG =$ cm	
問3	(1)	cm ²
	(2)	cm ³

解答

問1 $\angle ACF = 60$ 度

問2 $AG = 12\sqrt{3}$ cm

問3

(1) 270 cm²

(2) 1368 cm³

解説

問3

(2)

PA, HD, QC を延長した交点を O とする。

△OPH において

AD // PH より

OD:OH=AD:PH=12:18=2:3

よって OD:DH=2:1

DH=12 より

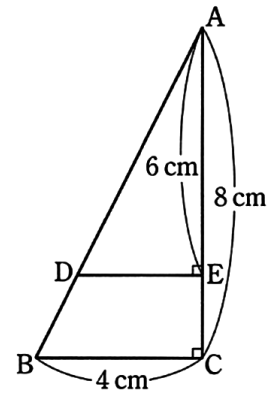
OD=24, OH=36

よって求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times 36 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times 24 = 1944 - 576 = 1368$ cm³

【問 32】

図は、 $BC=4\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$, $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC である。辺 AB 上に点 D を、辺 AC 上に点 E を、 $AE=6\text{cm}$, $BC \parallel DE$ となるようにとるとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(鹿児島県 2007 年度)



(1) 線分 DE の長さは何 cm か。

(2) 台形 $BCED$ を、辺 CE を軸として 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 か。ただし、円周率は π とする。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) 3 cm

(2) $\frac{74}{3} \pi \text{ cm}^3$

解説

(1)

$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$ より

同位角が等しいから $DE \parallel BC$

よって $\triangle ABC$ で

$DE:BC = AE:AC$

$DE:4 = 6:8$

$DE = \frac{4 \times 6}{8} = 3\text{ cm}$

(2)

AC を軸として $\triangle ABC$ を 1 回転させたものから

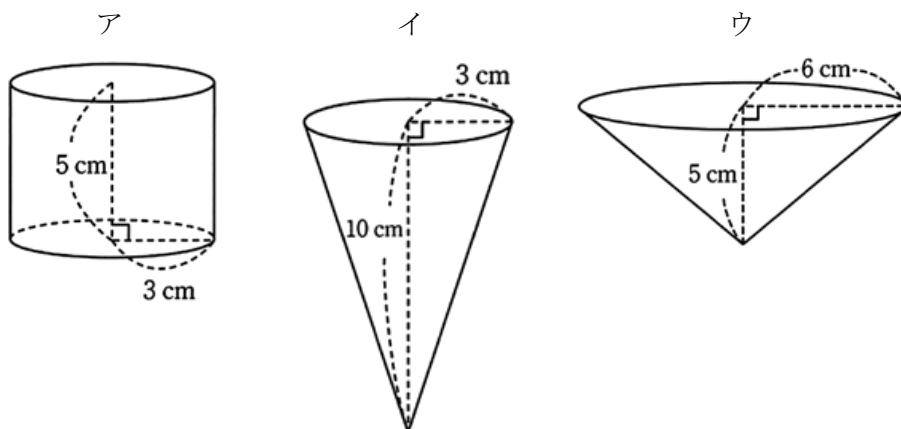
$\triangle ADE$ を 1 回転させたものをひいた体積が求める体積となるから

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 8 - \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6 = \frac{128}{3} \pi - \frac{54}{3} \pi = \frac{74}{3} \pi \text{ cm}^3$$

【問 33】

図のように、円柱形の容器アと円すい形の容器イ、ウがある。それぞれの容器に水を注ぎ、満水にした。このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとし、円周率は π とする。

(沖縄県 2007 年度)



問1 ア、イ、ウのなかで、水が最も多く入っているものはどれですか。また、その体積を求めなさい。

問2 ア、イ、ウに入っているすべての水を、図 I

の円柱形の容器(底面の半径が 3cm)に注ぐと、あふれることなくちょうど満水になった。このとき、高さ h を求めなさい。

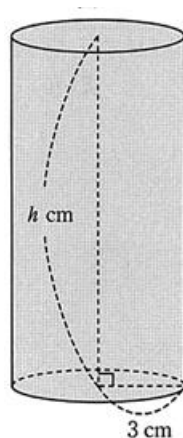
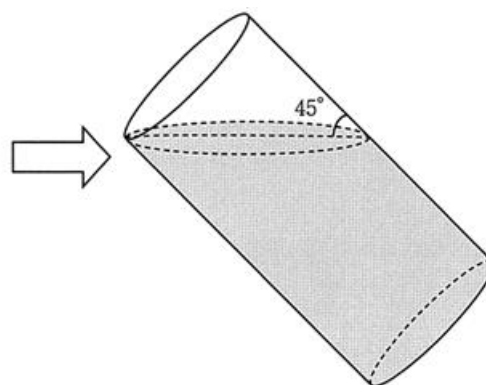


図 II



問3 図 I の満水の容器を 45° 傾けたとき、図 II のようになった。図 II の容器に残っている水の体積を求めなさい。

解答欄

問1	容器	体積	cm^3
問2	$h =$		cm
問3			cm^3

解答

問1 容器 ウ 体積 $60\pi \text{ cm}^3$

問2 $h=15 \text{ cm}$

問3 $108\pi \text{ cm}^3$

解説

底面の半径 3cm 高さが 15cm の円柱の体積から

底面の半径 3cm 高さが 6cm の円柱の体積の半分をひけばよい。

よって $\pi \times 3^2 \times 15 - \frac{1}{2} \times 3^2 \times 6 = 135\pi - 27\pi = 108\pi \text{ cm}^3$