

8. 規則性の問題 【2020 年度出題】

【問 1】

次の問いに答えなさい。

(北海道 2020 年度)

- 問 1 下の図は、2020 年の 9 月と 12 月のカレンダーです。2020 年だけでなく、毎年、9 月と 12 月は、1 日から 30 日までの曜日が同じです。このことを、次のように説明するとき、ア ～ ウ に当てはまる整数を、それぞれ書きなさい。

2020 年 9 月						
日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

2020 年 12 月						
日	月	火	水	木	金	土
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(説明)

9 月と 12 月の 1 日から 30 日までの曜日が同じであるためには、9 月 1 日と 12 月 1 日の曜日が同じであればよい。また、9 月 1 日の n 日後が、9 月 1 日と同じ曜日となるのは、 n が ア の倍数のときだけである。

9 月 1 日の n 日後が 12 月 1 日のとき、10 月が 31 日まで、11 月が 30 日まであることから、 $n =$ イ となり、イ = ア × ウ と表せるので、イ は ア の倍数であることがわかる。

よって、9 月 1 日と 12 月 1 日の曜日が同じであり、30 日までの曜日が同じとなる。

問2 下の資料は、2020年から2032年までの、1月1日の曜日とうるう年(2月29日がある年)である年をまとめたものです。2021年から2100年までの間に、2020年と1年間のすべての日の曜日が同じになる年を、すべて求めなさい。

(資料)

年	1月1日の曜日	うるう年(○)
2020	水	○
2021	金	
2022	土	
2023	日	
2024	月	○
2025	水	
2026	木	
2027	金	
2028	土	○
2029	月	
2030	火	
2031	水	
2032	木	○

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2		

解答

問1

ア 7

イ 91

ウ 13

問2 2048年, 2076年

解説

問2

2020年はうるう年なので、2020年と1月1日の曜日が同じうるう年が何年後かを考えればよい。(資料)より、うるう年の1月1日の曜日は、2020年から順に、水、月、土、木、火、日、金、水、月、…と5日分ずつ後ろにずれていき、7回ごとに同じ曜日になる。うるう年は4年に1回だから、2020年から n 年後に1年間のすべての日の曜日が同じになるとき、 n は $4 \times 7 = 28$ の倍数である。

2100年までの間で求めるので、 $2100 - 2020 = 80$ より $n \leq 80$ だから、 $n = 28, 56$ したがって、当てはまる年は2020年の28年後と56年後で、2048年と2076年。

【問 2】

異なる 4 つの自然数を小さい順に a, b, c, d とし、図 1 のように並べたとき、 ab, cd, ac, bd の和を p とした。

次の文章は、 p の値について考えているレンさんとメイさんの会話である。

ア ～ オ にあてはまる数を求めなさい。

図 1

a	b
c	d

(青森県 2020 年度) 図 2

レン：たとえば、図 2 のように、 $a=1, b=5, c=6, d=11$ のときは

$$\begin{aligned} p &= ab + cd + ac + bd \\ &= 1 \times 5 + 6 \times 11 + 1 \times 6 + 5 \times 11 \\ &= 132 \end{aligned}$$

になるね。では、図 3 のように、 $a=2, b=3, c=7$ で $p=150$ となると、 d の値はいくらになるかな？

図 2

1	5
6	11

図 3

2	3
7	d

メイ：方程式をつくって、それを解くと $d =$ ア になるよ。

レン：では、図 4 のように、 $a=3, d=9$ で $p=168$ となると、 b と c の値はいくらになるかな？

図 4

3	b
c	9

メイ：同じ考え方で方程式をつくると、イ $(b+c)=168$ となり、 $b+c =$ ウ になるよね。

条件を満たすのは、 $b =$ エ , $c =$ オ だということがわかったよ。

解答欄

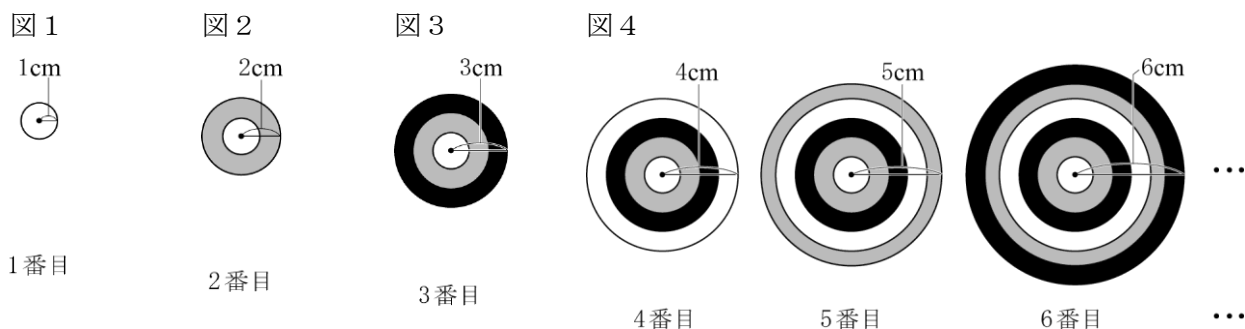
ア	
イ	
ウ	
エ	
オ	

解答

ア 13
イ 12
ウ 14
エ 6
オ 8

【問 3】

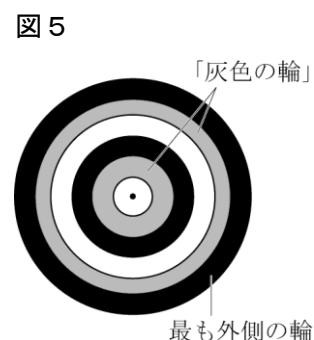
図 1 のように、半径 1 cm の円を白色で塗り、1 番目の図形とする。また、図 2 のように、1 番目の図形に中心が等しい半径 2 cm の円をかき加え、半径 1 cm の円と半径 2 cm の円に囲まれた部分を灰色で塗り、これを 2 番目の図形とする。さらに、図 3 のように、2 番目の図形に中心が等しい半径 3 cm の円をかき加え、半径 2 cm の円と半径 3 cm の円に囲まれた部分を黒色で塗り、これを 3 番目の図形とする。同様の操作を繰り返し、白色、灰色、黒色の順に色を塗り、できた図形を図 4 のように、4 番目の図形、5 番目の図形、6 番目の図形、…とする。



また、それぞれの色で塗られた部分を「白色の輪」，「灰色の輪」，「黒色の輪」とする。例えば、図 5 は 6 番目の図形で、「灰色の輪」が 2 個あり、最も外側の輪は「黒色の輪」である。

このとき、次の問 1，問 2，問 3，問 4 に答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(栃木県 2020 年度)



問 1 「灰色の輪」が初めて 4 個できるのは、何番目の図形か。

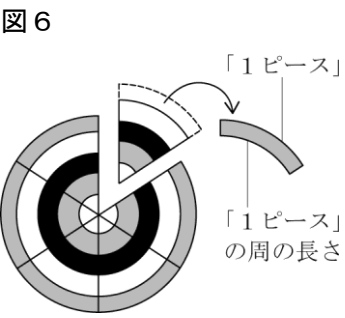
問 2 20 番目の図形において、「黒色の輪」は何個あるか。

問 3 n 番目 (n は 2 以上の整数) の図形において、最も外側の輪の面積が $77\pi \text{ cm}^2$ であるとき、 n の値を求めなさい。ただし、途中の計算も書くこと。

問 4 n 番目の図形をおうぎ形に m 等分する。このうちの 1 つのおうぎ形を取り出し、最も外側の輪であった部分を切り取り、これを「1 ピース」とする。例えば、 $n=5, m=6$ の「1 ピース」は図 6 のようになり、太線 (—) でかかれた 2 本の曲線と 2 本の線分の長さの合計を「1 ピース」の周の長さとする。

このとき、次の文の①, ②に当てはまる式や数を求めなさい。

ただし、文中の a, b は 2 以上の整数とする。



$n=a, m=5$ の「1 ピース」の周の長さと、 $n=b, m=9$ の「1 ピース」の周の長さが等しいとき、 b を a の式で表すと、(①) となる。①を満たす a, b のうち、それぞれの「1 ピース」が同じ色のとき、 b の値が最小となる a の値は、(②) である。

解答欄

問 1	番目	
問 2	個	
問 3	答え ($n=$)	
問 4	①	($b=$)
	②	($a=$)

解答

問 1 11 (番目)

問 2 6 (個)

問 3

最も外側にある輪の面積は

$$\pi n^2 - \pi (n-1)^2 = \pi (2n-1)$$

これが $77\pi \text{ cm}^2$ になるから

$$\pi (2n-1) = 77\pi$$

$$2n = 78$$

$$\text{よって } n = 39$$

この解は問題に適している。

答え ($n = 39$)

問 4

$$\textcircled{1} \quad (b = \frac{9a-2}{5})$$

$$\textcircled{2} \quad (a = 8)$$

解説

問 1

新たに白色が塗られるのは、1 番目、4 番目、7 番目、…

新たに灰色が塗られるのは、2 番目、5 番目、8 番目、…

新たに黒色が塗られるのは、3 番目、6 番目、9 番目、…

というように、白色、灰色、黒色はそれぞれ(3 で割ると 1 余る整数)番目、(3 で割ると 2 余る整数)番目、(3 の倍数)番目で新たに塗られることがわかる。

ここで、黒色に着目すると、「黒色の輪」が初めて 4 個できるのは、 $3 \times 4 = 12$ (番目)の図形である。

よって、「灰色の輪」が初めて 4 個できるのはその 1 つ前の時点なので、11 番目の図形である。

問 2

問 1 より「黒色の輪」は(3 の倍数)番目で新たに塗られるので、21 番目の図形においては 7 個の「黒色の輪」があるから、20 番目の図形において「黒色の輪」は 6 個ある。

問3

n 番目の図形における最も外側の輪は、半径 n cm の円から半径 $(n-1)$ cm の円を取り除いた図形なので、
 $\pi n^2 - \pi (n-1)^2 = 77\pi \Rightarrow n^2 - (n-1)^2 = 77 \Rightarrow 2n-1=77 \Rightarrow n=39$
 n は 2 以上の整数という条件にも適しているため、 $n=39$

問4

n 番目の図形をおうぎ形に m 等分したときの「1 ピース」の周の長さについて一般的に考えてみよう。

考える周は、

- (A) 半径 n cm の円の円周の一部、
- (B) 半径 $(n-1)$ cm の円の円周の一部、
- (C) 「輪」から切り取った際の切り口にあたる線分 2 つ分の大きく 3 つの部分に分かれる。それぞれについて順番に求めてみよう。

(A) 半径 n cm の円の円周の長さは、 $2\pi n$ (cm) であり、その円を m 等分しているため、

その長さは $2\pi n \times \frac{1}{m} = \frac{2\pi n}{m}$ (cm) である。

(B) 半径 $(n-1)$ cm の円の円周の長さは、 $2\pi (n-1)$ (cm) であり、その円を m 等分しているため、

その長さは $2\pi (n-1) \times \frac{1}{m} = \frac{2\pi (n-1)}{m}$ (cm) である。

(C) 切り口の長さは、最も大きい円とそれより 1 つ小さい円の半径の差なので 1 cm。よって、2 つ分なので 2 cm。

では次に、 $n=a$, $m=5$ の場合について「1 ピース」の周の長さを求めよう。(A) ~ (C) から、

$$\frac{2\pi n}{m} + \frac{2\pi (n-1)}{m} + 2 = \frac{2\pi a}{5} + \frac{2\pi (a-1)}{5} + 2 = \frac{4a-2}{5}\pi + 2 \text{ (cm)}$$

同様に、 $n=b$, $m=9$ の場合についても「1 ピース」の周の長さを求めると、

$$\frac{2\pi n}{m} + \frac{2\pi (n-1)}{m} + 2 = \frac{2\pi b}{9} + \frac{2\pi (b-1)}{9} + 2 = \frac{4b-2}{9}\pi + 2 \text{ (cm)}$$

これらの長さが等しくなればよいので、

$$\frac{4a-2}{5}\pi + 2 = \frac{4b-2}{9}\pi + 2 \Rightarrow b = \frac{9a-2}{5} \dots \textcircled{1}$$

ここで問1より、白色、灰色、黒色はそれぞれ(3 で割ると 1 余る整数)番目、(3 で割ると 2 余る整数)番目、(3 の倍数)番目で新たに塗られることを利用すると、

a 番目の図形と b 番目の図形における「1 ピース」の色が同じになるためには、 a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数、または 3 で割ると 2 余る整数、または 3 の倍数である必要がある。

すなわち、 a と b の差が 3 の倍数となればよい(※注)。

よって、 $a-b=3k$ (k は整数) とおくことができるので、 $a=b+3k$ として①に代入すると、

$$b = \frac{9(b+3k)-2}{5} \Rightarrow b = \frac{-27k+2}{4} \text{ となる。}$$

b が 2 以上の整数であり、かつ最小となることに気をつけて整数 k の値を考えると、

$k=-2$ のときの $b=14$ が題意を満たすことがわかる。

$a=b+3k$ にそれぞれ代入すると、 $a=14+3 \times (-2)=8$

※注 「 a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数、または 3 で割ると 2 余る整数、または 3 の倍数であるとき、 a と b の差は 3 の倍数となる」ことの証明

(i) a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数である場合

a, b は整数 k, l を用いて、 $a=3k+1, b=3l+1$ と表すことができる。

よって、 a と b の差は、 $a-b=(3k+1)-(3l+1)=3(k-l)$

(ii) a と b がどちらも 3 で割ると 2 余る整数である場合

a, b は整数 k, l を用いて、 $a=3k+2, b=3l+2$ と表すことができる。

よって、 a と b の差は、 $a-b=(3k+2)-(3l+2)=3(k-l)$

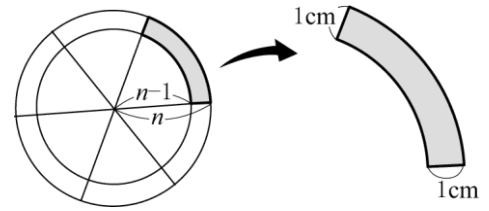
(iii) a と b がどちらも 3 の倍数である場合

a, b は整数 k, l を用いて、 $a=3k, b=3l$ と表すことができる。

よって、 a と b の差は、 $a-b=3k-3l=3(k-l)$

ここで、 $k-l$ は整数なので、 $3(k-l)$ は 3 の倍数である。

したがって (i) ~ (iii) より、 $a-b$ は 3 の倍数なので、 a と b がどちらも 3 で割ると 1 余る整数、または 3 で割ると 2 余る整数、または 3 の倍数であるとき、 a と b の差は 3 の倍数となる。(証明終)

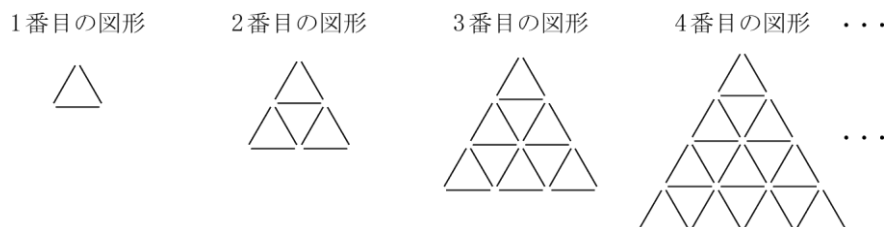


【問 4】

下の図のように、同じ長さの棒を使って正三角形を 1 個つくり、1 番目の図形とする。1 番目の図形の下に、1 番目の図形を 2 個置いてできる図形を 2 番目の図形、2 番目の図形の下に、1 番目の図形を 3 個置いてできる図形を 3 番目の図形とする。以下、この作業を繰り返して 4 番目の図形、5 番目の図形、…をつくっていく。

このとき、あとの問いに答えなさい。

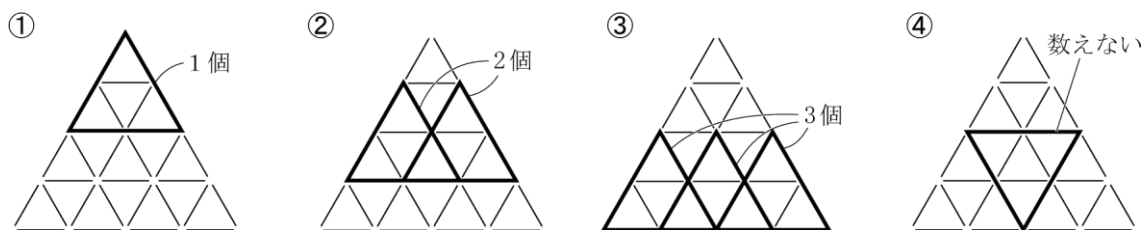
(富山県 2020 年度)



問 1 6 番目の図形は、棒を何本使うか求めなさい。

問 2 10 番目の図形に、2 番目の図形は全部で何個ふくまれているか求めなさい。

例えば、4 番目の図形には、下の①～③のように、2 番目の図形が全部で 6 個ふくまれている。ただし、④のように 2 番目の図形の上下の向きを逆にした図形は数えないものとする。



問 3 棒の総数が 234 本になるのは、何番目の図形か求めなさい。

解答欄

問 1	本
問 2	個
問 3	番目

解答

問1 63 本

問2 45 個

問3 12 番目

解説

問1

段ごとの棒の数の規則性に注目する。(図1) 1 段目は 3 本使われている。2 段目は 6 本, 3 段目は 9 本, 4 段目は 12 本…となる。よって, 6 番目の図形に使われている棒の数は, 1 段目から 6 段目までの棒の数の和であるから, $3+6+9+12+15+18=63$ (本)

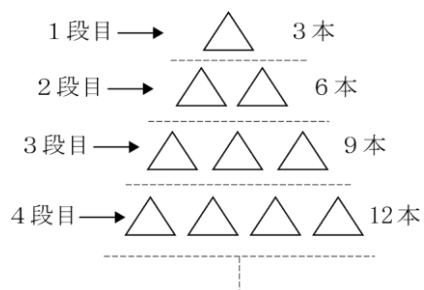
問2

1 段目に頂点のある三角形は 1 個 (問題文の図①), 2 段目に頂点のある三角形は 2 個 (問題文の図②), 3 段目に頂点のある三角形は 3 個 (問題文の図③) …という規則性があり, 10 番目の図形には 10 段目までであるので, 9 段目に頂点のある三角形の個数までを足せばよい。したがって, $1+2+3+\cdots+8+9=45$ (個)

問3

問1 で利用した規則性を利用する。棒の数は 1 段目に 3 本, 2 段目に 6 本, 3 段階に 9 本…つまり, n 段目には $3n$ 本あることになる。よって, $3+6+9+12+\cdots+3(n-1)+3n=234$ となる n を求めればよいことになる。この方程式を解きたいが, 左辺はこれ以上計算することはできない。そこで, 両辺を 3 で割り, $1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=78$ つまり, 1 から順に自然数を加えていって, その数までの和が 78 となる自然数を見つければよい。 $n=10$ のとき $1+2+3+\cdots+9+10=55$ 同様に $n=11$ のとき 66, $n=12$ のとき 78 となるので, 答えは 12 (番目)

図 1

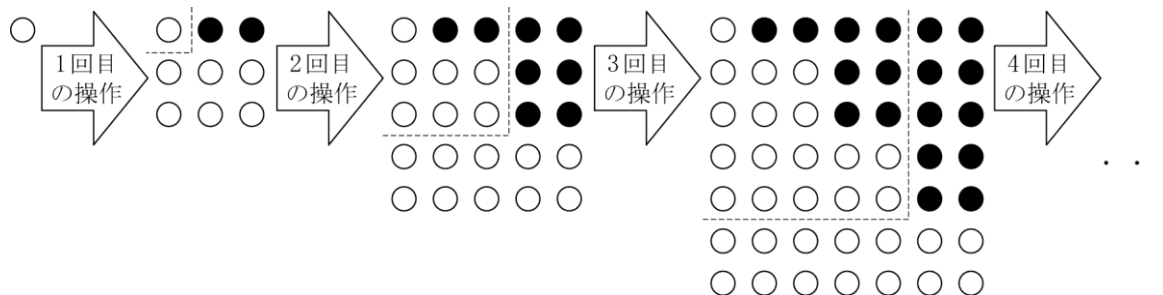


【問 5】

平面上に、はじめ、白の基石が 1 個置いてある。次の操作を繰り返し行い、下の図のように、基石を正形状に並べていく。

【操作】

すでに並んでいる基石の右側に新たに黒の基石を 2 列で並べ、次に、下側に新たに白の基石を 2 段で並べる。



次の問 1 ～問 4 に答えなさい。

(岐阜県 2020 年度)

問 1 4 回目の操作で、新たに並べる基石について、

(1) 黒の基石の個数を求めなさい。

(2) 白の基石の個数を求めなさい。

問 2 n 回目の操作を終えた後に、正形状に並んでいる基石の一辺の個数を、 n を使った式で表しなさい。

問3 次の文章は、 n 回目の操作を終えた後に並んでいる基石の個数について、花子さんの考えをまとめたものである。**ア**には数を、**イ**、**ウ**、**エ**には n を使った式を、それぞれ当てはまるように書きなさい。

はじめ、白の基石が 1 個だけ置いてある。また、1 回の操作で新たに並べる白の基石の個数は、新たに並べる黒の基石の個数より **ア** 個多い。

したがって、 n 回目の操作を終えた後に並んでいる黒の基石の個数を A 個とすると、白の基石の個数は、 $(1+A+ \text{イ})$ 個と表すことができる。

また、 n 回目の操作を終えた後に、正形状に並んでいる基石の総数は、**ウ** 個である。

これらのことから、方程式をつくると、
 $A+(1+A+ \text{イ})= \text{ウ}$
 となる。これを解くと、 $A= \text{エ}$ となる。

よって、 n 回目の操作を終えた後に並んでいる黒の基石の個数は、**エ** 個となる。

問4 20 回目の操作を終えた後に並んでいる白の基石の個数を求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	個
	(2)	個
問 2	個	
問 3	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
問 4	個	

解答

問 1

(1) 14 個

(2) 18 個

問 2 $(2n+1)$ 個

問 3

ア 4

イ $4n$

ウ $(2n+1)^2$

エ $2n^2$

問 4 881 個

解説

問 3

アについて、1 回目の操作で新たに並べる黒の基石と白の基石の数は、それぞれ 2 個と 6 個。2 回目の操作では、6 個と 10 個。以上のことから、1 回の操作で新たに並べる白の基石の個数は、黒の基石の個数より 4 個多いことがわかる。よって、アに当てはまる数は 4。

イについて、白の基石は黒の基石よりも 1 回の操作につき 4 個ずつ多く新たに並べられるので、 n 回の操作では $4n$ (個)だけ黒の基石よりも多く並べられる。よって、 n 回目の操作を終えた後に並んでいる黒の基石の個数を A 個とすると、新たに並ぶ白の基石の個数は $(A+4n)$ 個と表すことができる。これに操作前の 1 個を足すと、 n 回目の操作を終えた後に並んでいる白の基石の個数は $(1+A+4n)$ 個と求めることができる。よって、イに当てはまる式は $4n$ 。

ウについて、問 2 より、 n 回目の操作を終えた後に正形状に並んでいる基石の一辺の個数は $(2n+1)$ 個なので、その基石の総数は、 $(2n+1)^2$ 個。よって、ウに当てはまる式は $(2n+1)^2$ 。

エについて、 $A+(1+A+4n)=(2n+1)^2$ を A について解くと、 $A=2n^2$ となる。

よって、エに当てはまる式は $2n^2$ 。

問 4

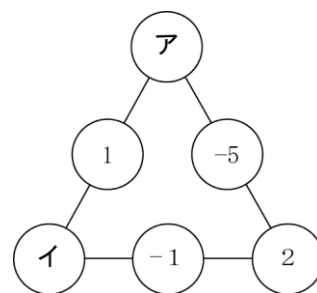
問 3 より、 n 回目の操作を終えた後に並んでいる白の基石の個数は $1+A+4n=1+2n^2+4n$ だから、 $n=20$ を代入して、 $1+2\times 20^2+4\times 20=881$ (個)

【問 6】

図の○の中には，三角形の各辺の 3 つの数の和がすべて等しくなるように，それぞれ数はいっている。

ア，イにあてはまる数を求めなさい。

(愛知県 A 2020 年度)



解答欄

ア	
イ	

解答

ア(0)

イ(-4)

【問 7】

次の文章は、自然数の計算について述べたものである。

文章中の , にあてはまる数を書きなさい。

(愛知県 B 2020 年度)

与えられた自然数を次の規則にしたがって計算する。

奇数ならば、3 倍して 1 を加え、偶数ならば、2 で割る。

結果が 1 となれば、計算を終わり、結果が 1 とならなければ、上の計算を続ける。

例えば、与えられた自然数が 3 のときは、下のように 7 回の計算で 1 となる。

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦
3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

このとき、7 回の計算で 1 となる自然数は、3 を含めて 4 個あり、小さい順に並べると、
3, , , 128 である。

解答欄

a	
b	

解答

a(20)

b(21)

解説

文章中に具体例として示されている「与えられた自然数が 3 のとき」や、解答の 1 つとしてすでに示されている「与えられた自然数が 128 のとき」を利用して考えよう。

「与えられた自然数が 128 のとき」を考えてみると、

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦

$128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

となり、「与えられた自然数が 3 のとき」と比較すると、3 回目の計算で同じ数字「16」となっていることがわかる。

つまり、「与えられた自然数が 3 のとき」と同じ回数の計算で同じ数字になるような数を探せばよい。

たとえば、1 回目の計算で「10」になる自然数は「3」のほかに「20」があるので、それが 1 つ目の答えとなる。

さて、「与えられた自然数が 3 のとき」に計算経過に現れる数字の中で、このときとは異なる規則でつくることができない数字を見つけよう。

「5」、「8」、「4」、「2」はそれぞれ、例と同じ「 $10 \rightarrow 5$ 」、「 $16 \rightarrow 8$ 」、「 $8 \rightarrow 4$ 」、「 $4 \rightarrow 2$ 」でしかつくれないので、のこる「10」と「16」に着目しよう。

「10」については、先ほど見つけた「 $20 \rightarrow 10$ 」以外にはない。

「16」については「 $5 \rightarrow 16$ 」のほかに「 $32 \rightarrow 16$ 」がある。また、「32」は「 $64 \rightarrow 32$ 」でしかつくれない。そして、「64」のつくり方は「 $128 \rightarrow 64$ 」のほかに「 $21 \rightarrow 64$ 」が存在することがわかる。よって、これが 2 つ目の答え。

小さい順で並べるので、a が 20, b が 21 である。

【問 8】

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の数が書かれた箱が 1 個ずつと、たくさんの赤玉がある。これらの箱に、次の〈規則〉にしたがって赤玉を入れる操作を行う。

〈規則〉

- ・ n は 1 から始まる連続した自然数とする。
- ・ n 回目の操作では、 n の約数を求め、その約数のうち 9 以下の数について、その数と同じ数が書かれた箱にそれぞれ 1 個ずつ赤玉を入れるものとする。
- ・ 箱に入れた玉は取り出さないものとする。

たとえば、1 回目の操作では、1 の数が書かれた箱に赤玉を 1 個入れる。2 回目の操作では、1, 2 の数が書かれた箱にそれぞれ 1 個ずつ赤玉を入れる。また、10 回目の操作では、1, 2, 5 の数が書かれた箱にそれぞれ 1 個ずつ赤玉を入れる。

次の表は、1 回目から 6 回目までの操作後、それぞれの箱に入っている赤玉の個数をまとめたものである。

	それぞれの箱に入っている赤玉の個数								
	1 の数が書かれた箱	2 の数が書かれた箱	3 の数が書かれた箱	4 の数が書かれた箱	5 の数が書かれた箱	6 の数が書かれた箱	7 の数が書かれた箱	8 の数が書かれた箱	9 の数が書かれた箱
1 回目の操作後	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2 回目の操作後	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3 回目の操作後	3	1	1	0	0	0	0	0	0
4 回目の操作後	4	2	1	1	0	0	0	0	0
5 回目の操作後	5	2	1	1	1	0	0	0	0
6 回目の操作後	6	3	2	1	1	1	0	0	0

このとき、次の問 1～問 3 に答えよ。

(京都府 2020 年度 前期)

問 1 次の文中の ア・イ に当てはまる数をそれぞれ求めよ。

6 の数が書かれた箱に入っている赤玉の個数は、ア 回目の操作ではじめて 3 個になり、
イ 回目の操作ではじめて 4 個になる。

問 2 a 回目の操作で、3 の数が書かれた箱に入っている赤玉の個数は、はじめて b 個になり、そこから 85 回目の操作で 8 の数が書かれた箱に入っている赤玉の個数は、はじめて b 個になった。このときの a と b の値をそれぞれ求めよ。

問 3 黄玉をたくさん用意し、267 回目の操作からは赤玉のかわりに黄玉を使って同様の操作を続けた。黄玉を使い始めてから、4 の数が書かれた箱に入っている赤玉の個数と、9 の数が書かれた箱に入っている黄玉の個数がはじめて等しくなるときの、4 の数が書かれた箱に入っている黄玉の個数を求めよ。

解答欄

問 1	ア	
	イ	
問 2	$a=$	
	$b=$	
問 3	個	

解答

問 1

ア 18

イ 24

問 2

$a=51$

$b=17$

問 3 147 個

解説

問 1

6 の数が書かれた箱は、 n が 6 の倍数のときに赤玉が 1 つずつ増えていくので、赤玉がはじめて 3 個になるのは、 $6 \times 3 = 18$ (回目) …ア

また、はじめて 4 個になるのは、 $6 \times 4 = 24$ (回目) …イ

問 2

3 つの数が書かれた箱に入っている赤玉の個数は、3 の倍数のときに増えるので、はじめて 1 個になるのが 3 回目、2 個になるのが 6 回目ということから、 b 個になるのは $3b$ 回目である。よって、 $a=3b$ …①

また、そこから 85 回目の操作で 8 の数が書かれた箱に入っている赤玉の個数がはじめて b 個になるので、同様にして、 $a+85=8b$ …②

よって、①、②を連立して解くと、 $a=51$ 、 $b=17$

問 3

266 回目の操作までは赤玉を使用しているので、ここまでは

4 の数が書かれた箱には、 $266 \div 4 = 66$ あまり 2 より、66 個の赤玉

9 の数が書かれた箱には、 $266 \div 9 = 29$ あまり 5 より、29 個の赤玉

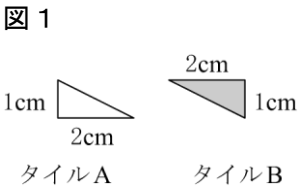
が入っている。9 の数が書かれた箱に入っている黄玉の個数がはじめて 66 個になるときを考えると、

9 の数が書かれた箱に入っている玉が合計で $29+66=95$ (個) になるときを考えればよいので、それは $9 \times 95 = 855$ (回目) の操作とわかる。

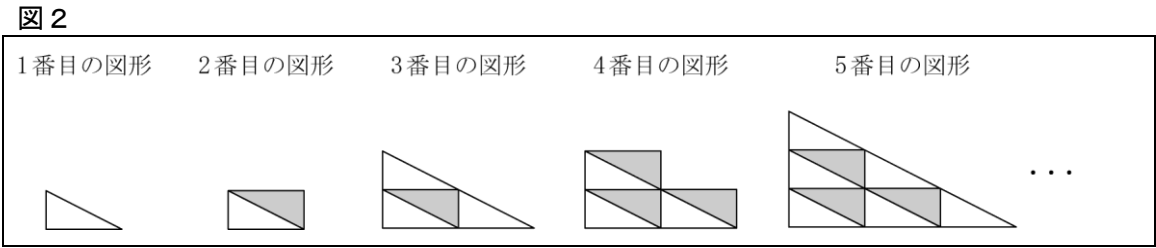
このときに 4 の数が書かれた箱には、 $855 \div 4 = 213$ あまり 3 より、213 個の玉が入っており、そのうち黄玉の個数は、 $213-66=147$ (個) である。

【問 9】

右の図 1 のような、直角三角形のタイル A とタイル B が、それぞれたくさんある。いずれのタイルも、直角をはさむ 2 辺の長さが 1 cm と 2 cm である。タイル A とタイル B を、次の図 2 のように、すき間なく規則的に並べて、1 番目の図形、2 番目の図形、3 番目の図形、…とする。



下の表は、それぞれの図形の面積についてまとめたものの一部である。



	1 番目の図形	2 番目の図形	3 番目の図形	…
面積 (cm ²)	1	2	4	…

このとき、次の問 1・問 2 に答えよ。

(京都府 2020 年度 中期)

問 1 7 番目の図形と 16 番目の図形の面積をそれぞれ求めよ。

問 2 n を偶数とするとき、 n 番目の図形と $(2n+1)$ 番目の図形の面積の差が 331 cm^2 となるような n を求めよ。

解答欄

問 1	7 番目の図形の面積	cm ²
	16 番目の図形の面積	cm ²
問 2	$n =$	

解答

問 1

7 番目の図形の面積 16 cm^2

16 番目の図形の面積 72 cm^2

問 2 $n=20$

解説

問 1

図形の面積は、1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72

となるので、7 番目の図形の面積は 16, 16 番目の図形の面積は 72

問 2

問題文より n は偶数なので、偶数番目の図形の面積を調べると、

2 番目が $2 (= 1 \times 2)$

4 番目が $6 (= 2 \times 3)$

6 番目が $12 (= 3 \times 4)$

となっているから、 n 番目は $\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$ と表される。

よって $2n$ 番目は $n(n+1)$ で、 $(2n+1)$ 番目は $2n$ 番目よりタイル A が $(n+1)$ 枚増えるから、面積は、 $n(n+1) + 1 \times (n+1) = n^2 + 2n + 1$

したがって、 $n^2 + 2n + 1 - \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 331$

整理すると、

$$n^2 + 2n - 440 = 0$$

$$(n-20)(n+22) = 0$$

$$n = 20$$

【問 10】

図 1 のように、1 辺が 1 cm の立方体の 3 つの面に 5, a , b を書き、それぞれの向かい合う面には同じ数を書いたものを立方体 X とする。ただし、 a , b は $a+b=10$, $a<b$ となる自然数とする。

1 目盛り 1 cm の方眼紙を、図 2 のように、縦 $(2x+1)$ cm, 横 $(2x+2)$ cm の長方形に切ったものを長方形 Y とし、長方形 Y の左上端のます目を P, P の右隣のます目を Q とする。ただし、 x は自然数とする。

長方形 Y を用いて、次のルールにしたがって、立方体 X を転がす。

＜ルール＞

- 最初に、立方体 X を P に、図 3 の向きで置く。
次に、立方体 X を P から、矢印 ($\downarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow$) の向きに、図 4 のように、すべらないように転がして隣のます目に移す操作を繰り返す。
- P には 5 を記録し、立方体 X を転がすたびに、上面に書かれた数を長方形 Y のます目に記録していく。

図 1

立方体 X

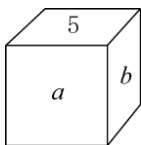


図 2

長方形 Y

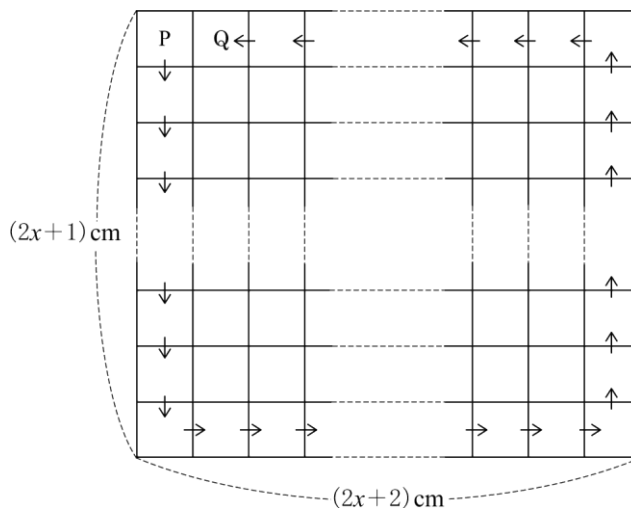


図 3

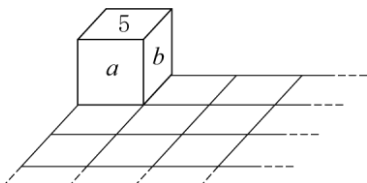
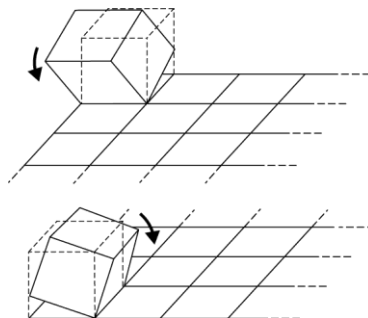


図 4



次の問いに答えなさい。

問1 立方体XをPからQまで転がし、数を記録する。

- (1) $a=3$, $b=7$ のときの立方体 X を，**図 5** の長方形の上に置いて転がしたとき，長方形のます目に記録された数を，解答欄の長方形のます目に全て記入しなさい。
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | 2 |
| 5 | 8 | 5 | 8 |
- (2) 立方体 X を，**図 5** の長方形の上に置いて転がしたとき，長方形のます目に記録された数の和が最も小さくなるような a , b の値を求めなさい。
- (3) (2) で定まる立方体 X を立方体 Z とする。立方体 Z を，**図 2** の長方形 Y の上に置いて転がしたとき，長方形のます目に記録された数の和が 2020 となるような x の値を求めなさい。

で転がし、 Q からさらに矢印の向きに
転がして移動させていく。長方形 Y の
すべてのます目に数が記録されたと
き、立方体 Z を転がすことをやめる。
 x は問 1 (3) の値とすると、最後に記
録された数を求めなさい。また、その
数の書かれたます目の位置は何行目
で何列目か、求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>												
(2)	$a=$													
	$b=$													
(3)	$x=$													
問 2	記録された数													
	行目	列目												

解答

問 1

(1)

5	7	5	7
3			3
5	7	5	7

(2)

($a=$) 4

($b=$) 6

(3) ($x=$) 49

問 2

(記録された数) 5

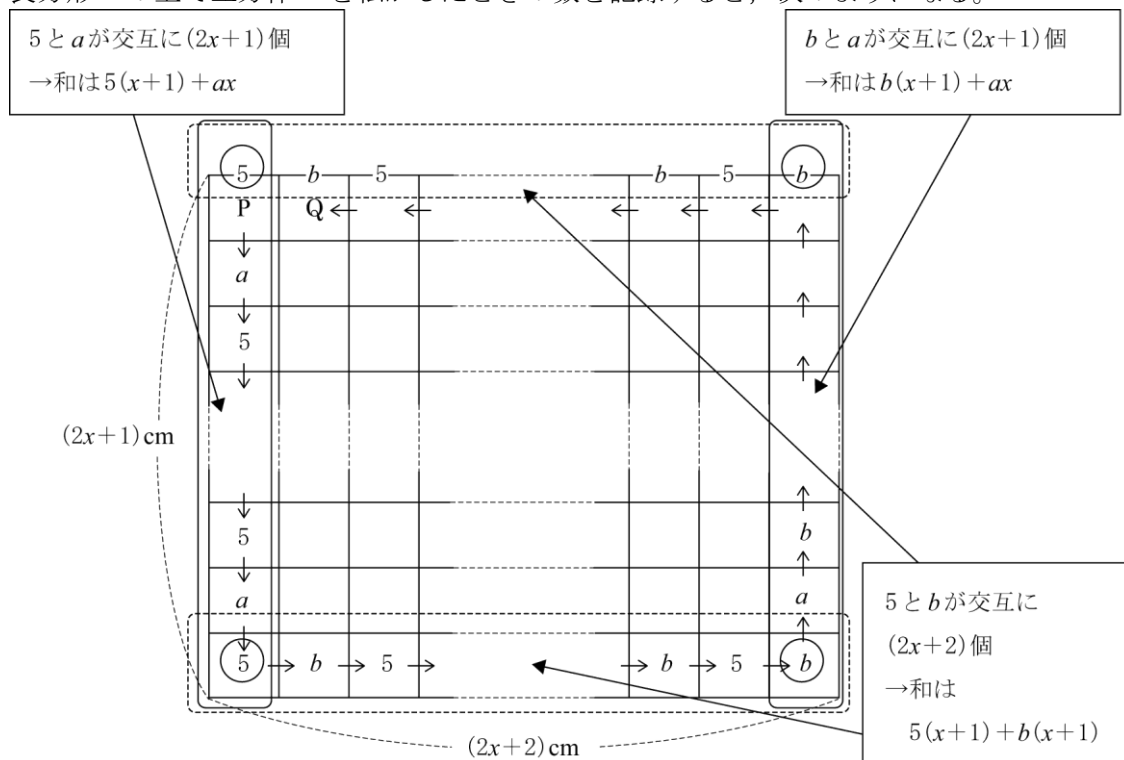
50 (行目) 51 (列目)

解説

問 1

(3)

長方形 Y の上で立方体 X を転がしたときの数を記録すると、次のようになる。



記録された数の和は、縦に並んだ数の和と横に並んだ数の和をたしたもののから、重複して数えた 4 つの角の数をひいて求めることができるので、

$$\{5(x+1) + ax\} + \{b(x+1) + ax\} + 2 \times \{5(x+1) + b(x+1)\} - (5+5+b+b) = (15+2a+3b)x + 5+b$$

(2) より、立方体 Z の a , b の値は $a=4$, $b=6$ だから、 $(15+2a+3b)x + 5+b = 41x+11$

記録された数の和が 2020 になる x を求めるから、 $41x+11=2020$ より、 $x=49$

問 2

立方体 Z が転がる行と列は、1 周ごとに上下 1 行ずつ左右 1 列ずつ内側になり、1 周を転がり始めるます目は 1 行目・1 列目、2 行目・2 列目、…の順に内側になる。長方形 Y の行の数は $2x+1$ 、列の数は $2x+2$ だから、最も内側の行は $x+1$ 行目の 1 行、列は $x+1$ 列目と $x+2$ 列目の 2 列となり、最も内側の 1 周を転がり始めるます目は $x+1$ 行目・ $x+1$ 列目となる。

問 1 (3) より $x=49$ だから、最も内側の行は 50 行目、列は 50 列目と 51 列目、1 周を転がり始めるます目は 50 行目・50 列目。このとき、数が記録されていないます目は、右隣にある 50 行目・51 列目のます目だけである。したがって、最後に数が記録されるます目は、50 行目・51 列目のます目である。

m 行目 n 列目のます目に記録される数が 5 であることを、 $(m,n)=5$ などと表すことにする。各周の角のます目に記録される数を調べていくと、次のようになる。ただし、 $\langle 5,a \rangle$ は、角と角の間のます目に記録される数は $5,a,5,a,\dots$ とくり返すことを表す。 $\langle 5,b \rangle$ や $\langle b,a \rangle$ も同様である。

49 行目	5	$b \leftarrow 5 \leftarrow b$	
50 行目	a	$a \rightarrow$	a
51 行目	5	$b \rightarrow 5 \rightarrow b$	
	50 列目	51 列目	52 列目

1 周目 $(1,1)=5 \rightarrow \langle 5,a \rangle \rightarrow (99,1)=5 \rightarrow \langle 5,b \rangle \rightarrow (99,100)=b \rightarrow \langle b,a \rangle \rightarrow (1,100)=b \rightarrow \langle b,5 \rangle \rightarrow (1,2)=b$

2 周目 $(2,2)=a \rightarrow \langle a,b \rangle \rightarrow (98,2)=a \rightarrow \langle a,5 \rangle \rightarrow (98,99)=5 \rightarrow \langle 5,b \rangle \rightarrow (2,99)=5 \rightarrow \langle 5,a \rangle \rightarrow (2,3)=5$

3 周目 $(3,3)=b \rightarrow \langle b,5 \rangle \rightarrow (97,3)=b \rightarrow \langle b,a \rangle \rightarrow (97,98)=a \rightarrow \langle a,5 \rangle \rightarrow (3,98)=a \rightarrow \langle a,b \rangle \rightarrow (3,4)=a$

4 周目 $(4,4)=5 \rightarrow \langle 5,a \rangle \rightarrow (96,4)=5 \rightarrow \langle 5,b \rangle \rightarrow (96,97)=b \rightarrow \langle b,a \rangle \rightarrow (4,97)=b \rightarrow \langle b,5 \rangle \rightarrow (4,5)=b$

5 周目 $(5,5)=a \rightarrow \langle a,b \rangle \rightarrow (95,5)=a \rightarrow \langle a,5 \rangle \rightarrow (95,96)=5 \rightarrow \langle 5,b \rangle \rightarrow (5,96)=5 \rightarrow \langle 5,a \rangle \rightarrow (5,6)=5$

6 周目 $(6,6)=b \rightarrow \langle b,5 \rangle \rightarrow (94,6)=b \rightarrow \langle b,a \rangle \rightarrow (94,95)=a \rightarrow \langle a,5 \rangle \rightarrow (6,95)=a \rightarrow \langle a,b \rangle \rightarrow (6,7)=a$

...

48 周目 $(48,48)=b \rightarrow \langle b,5 \rangle \rightarrow (52,48)=b \rightarrow \langle b,a \rangle \rightarrow (52,53)=a \rightarrow \langle a,5 \rangle \rightarrow (48,53)=a \rightarrow \langle a,b \rangle \rightarrow (48,49)=a$

49 周目 $(49,49)=5 \rightarrow \langle 5,a \rangle \rightarrow (51,49)=5 \rightarrow \langle 5,b \rangle \rightarrow (51,52)=b \rightarrow \langle b,a \rangle \rightarrow (49,52)=b \rightarrow \langle b,5 \rangle \rightarrow (49,50)=b$

50 周目 $(50,50)=a, \underline{(50,51)=5}$

例えば、1 周目について、 $(1,1)$ から $(99,1)$ までは、5 で始まり、 $5,a$ をくり返して、5 で終わる。そこで角を曲がって、 $(99,1)$ から $(99,100)$ までは、5 で始まり、 $5,b$ をくり返して、 b で終わる。そこでまた角を曲がって、 $(99,100)$ から $(1,100)$ までは、 b で始まり、 b,a をくり返して、 b で終わる。また角を曲がって、 $(1,100)$ から $(1,2)$ までは、 b で始まり、 $b,5$ をくり返して、 b で終わる。 $(1,2)$ までは $b,5$ をくり返していたので、角を曲がって次の $(2,2)$ に記録されるのは a である。以下、2 周目も同様である。

このように考えると、各周の角のます目に記録される数と、角と角の間のます目に記録されるくり返しの数には、3 周ごとに同じパターンがくり返されることがわかる。

【問 11】

図 1 のように、同じ大きさの立方体の箱をいくつか用意し、箱を置くための十分広い空間のある倉庫に箱を規則的に置いていく。倉庫の壁 A と壁 B は垂直に交わり、2 つの壁の面と床の面もそれぞれ垂直に交わっている。

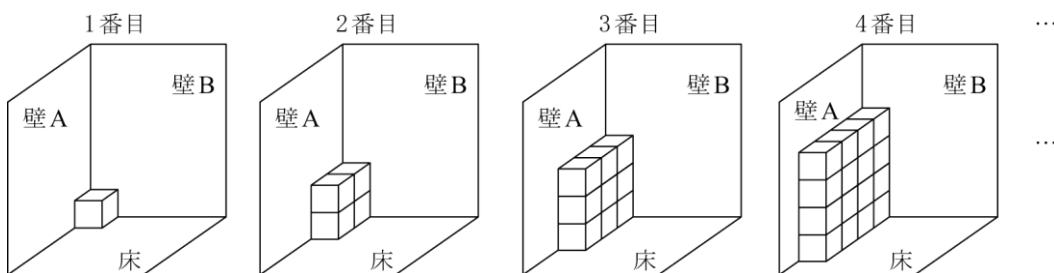
各順番における箱の置き方は、まず 1 番目として、1 個の箱を壁 A と壁 B の両方に接するように置く。

2 番目は、4 個の箱を 2 段 2 列に壁 A と壁 B に接するように置く。このように、3 番目は 9 個の箱を 3 段 3 列に、4 番目は 16 個の箱を 4 段 4 列に置いていく。なお、いずれの順番においても箱の面と面をきっちり合わせ、箱と壁や床との間にすき間がないように置いていくものとする。

このとき、次の問 1、問 2 に答えなさい。

(和歌山県 2020 年度)

図 1



問 1 各順番において、図 1 のように、置いた箱をすべて見わたせる方向から見たとき、それぞれの箱は 1 面が見えるもの、2 面が見えるもの、3 面が見えるもののいずれかである。

表 1 は、上の規則に従って箱を置いたときの順番と、1 面が見える箱の個数、2 面が見える箱の個数、3 面が見える箱の個数、箱の合計個数についてまとめたものである。

下の (1)～(3) に答えなさい。

表 1

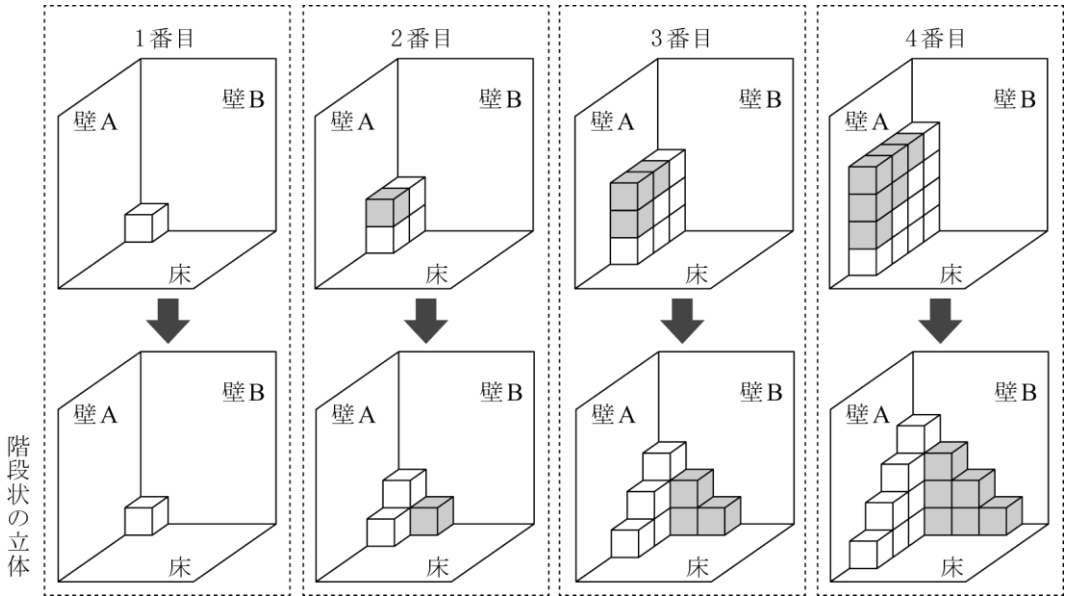
順番(番目)	1	2	3	4	5	6	...	n	$n+1$	...
1 面が見える箱の個数(個)	0	1	4	9	*	*	...	*	*	...
2 面が見える箱の個数(個)	0	2	4	6	ア	*	...	*	*	...
3 面が見える箱の個数(個)	1	1	1	1	*	*	...	*	*	...
箱の合計個数(個)	1	4	9	16	*	イ	...	*	*	...

* は、あてはまる数や式を省略したことを表している。

- (1) 表 1 中の ア , イ にあてはまる数をかきなさい。
- (2) 8 番目について、1 面が見える箱の個数を求めなさい。
- (3) $(n+1)$ 番目の箱の合計個数は、 n 番目の箱の合計個数より何個多いか、 n の式で表しなさい。

問2 図2は、図1の各順番において、いくつかの箱を壁Bに接するように移動して、壁Aと壁Bにそれぞれ接する階段状の立体に並べかえたものを表している。
このとき、下の(1)、(2)に答えなさい。

図2



(1) 6番目について、移動した箱の個数を求めなさい。

(2) 階段状の立体には、壁や他の箱に囲まれて見えない箱もある。

表2は、各順番における階段状の立体の見えない箱の個数、見えている箱の個数、箱の合計個数についてまとめたものである。

x 番目のとき、見えている箱の個数が111個であった。 x の値を求めなさい。

ただし、答えを求める過程がわかるようにかきなさい。

表2

順番(番目)	1	2	3	4	5	...	x	...
見えない箱の個数(個)	0	1	2	3	*	...	*	...
見えている箱の個数(個)	1	3	7	13	*	...	111	...
箱の合計個数(個)	1	4	9	16	*	...	*	...

*は、あてはまる数や式を省略したことを表している。

解答欄

問 1	(1)	ア	
		イ	
	(2)	個	
	(3)	個	
問 2	(1)	個	
	(2)	〔求める過程〕 $x=$	

解答

問 1

(1)

ア 8

イ 36

(2) 49 (個)

(3) $2n+1$ (個)

問 2

(1) 15 (個)

(2)

〔求める過程〕

x 番目について、箱の合計個数は、 x^2 (個)

見えない箱の個数は、 $x-1$ (個) である。

見えている箱の個数は、箱の合計個数から、

見えない箱の個数をひけばよい。

よって、見えている箱の個数は 111 個であることから、

$$x^2 - (x - 1) = 111$$

$$x^2 - x - 110 = 0$$

$$(x + 10)(x - 11) = 0$$

$$x = -10, 11$$

x は自然数だから、 $x = -10$ は問題にあわない。

$x = 11$ は問題にあっている。

したがって、 $x = 11$

$$x = 11$$

解説

問 1

1 面が見える箱の個数は、0, 1, 4, 9, 16, 25, ...となるので、 n 番目は $(n-1)^2$

2 面が見える箱の個数は、0, 2, 4, 6, 8, 10, ...となるので、 n 番目は $2(n-1)$

3 面が見える箱の個数は、つねに 1

箱の合計個数は、1, 4, 9, 16, 25, 36, ...となるので、 n 番目は n^2

よって、(1)のアは 8, イは 36

(2)は、 $(n-1)^2$ に $n=8$ を代入して、49

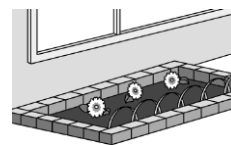
(3)は、 $(n-1)^2 - n^2 = 2n+1$

問 2

(1)について、移動した箱の個数は、0, 1, 3, 6, 10, 15, ...となるので、6 番目は 15(個)

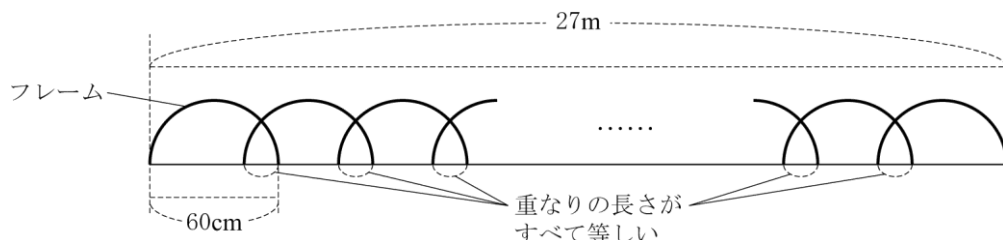
【問 12】

香奈さんのクラスでは、校舎前の花壇に柵を設置することになった。図 1 のように、長さ 27 m の花壇に直径 60 cm の半円のフレームを、重なりの長さがすべて等しくなるように 1 列に並べる。フレームは 56 個あり、すべて使って花壇にちょうど入るようにする。問 1 ～問 3 に答えなさい。ただし、フレームの厚さは考えないものとする。

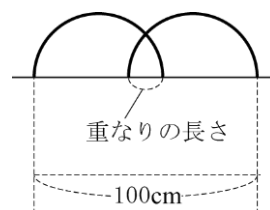


(岡山県 2020 年度 特別)

図 1



問 1 図 2 のように、フレームを 2 個並べて、その長さを 100 cm にするに
は、重なりの長さを何 cm にすればよいかを答えなさい。



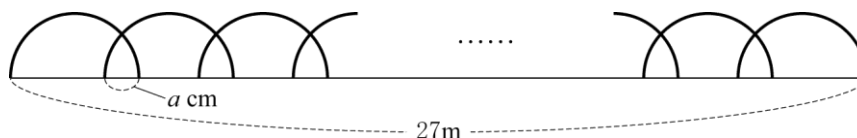
問 2 香奈さんは、花壇に並べるフレームの重なりの長さを次のように求めた。次の＜香奈さんの考え＞を読んで、 (1) ～ (3) に適当な数や式を書きなさい。

＜香奈さんの考え＞

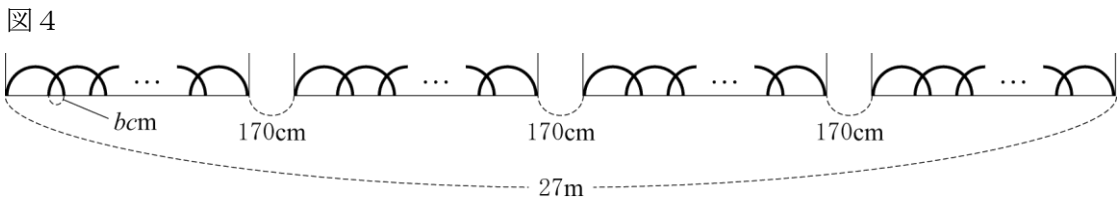
例えば、4 個のフレームを並べるとき、できる重なりは 3 か所である。同じように考えると、 n を自然数とし、 n 個のフレームを並べるとき、できる重なりは n を使って (1) か所と表すことができる。

フレームは 56 個あるから、 $n=56$ である。花壇の長さは 27 m だから、図 3 のように重なりの長さを a cm とすると、 a を求めるための方程式は (2) =2700 となる。これを解くことにより、重なりの長さは (3) cm にすればよいことがわかる。

図 3



問3 香奈さんは、図4のように幅170 cmの間隔を3か所とり、花壇を均等に4つに分けることにした。フレームの重なりをの長さを b cm とするとき、(1)、(2)に答えなさい。



- (1) b の値を求めなさい。
- (2) 間隔の幅をすべて 170 cm から x cm だけ短くしたとき、フレームの重なりをの長さは b cm とくらべて何 cm 短くなるかを、 x を使って表しなさい。ただし、 $0 < x < 170$ とする。

解答欄

問1		cm
問2	(1)	か所
	(2)	=2700
	(3)	cm
問3	(1)	$b =$ cm
	(2)	cm

解答

問 1 20 cm

問 2

(1) $n-1$ か所

(2) $3360-55a=2700$

(3) 12 cm

問 3

(1) $b=22.5$ cm

(2) $\frac{3}{52}x$ cm

解説

問 3

(1)

3 か所の間隔をとって花壇を 4 つに分けたとき、できる花壇 1 つ分の長さは、

$(2700-3 \times 170) \div 4 = 547.5$ (cm)

花壇 1 つ分に並べるフレームの個数は、 $56 \div 4 = 14$ (個)

したがって、フレームの重なりの長さを b cm とすると、

$14 \times 60 - 13b = 547.5$ より、 $b = 22.5$

(2)

3 か所の間隔の合計の長さは $3x$ cm 短くなるので、4 つに分けた花壇 1 つ分の長さは、

$3x \div 4 = \frac{3}{4}x$ (cm) 長くなる。

3 か所のフレームの重なりの合計の長さが $\frac{3}{4}x$ cm 短くなるので、1 つの重なりの長さは、

$\frac{3}{4}x \div 13 = \frac{3}{52}x$ (cm) 短くなる。

【問 13】

AさんとBさんは、ある遊園地のアトラクションに入場するため、開始時刻前にそれぞれ並んで待っている。このアトラクションを開始時刻前から待つ人は、図のように、6人ごとに折り返しながら並び、先頭の人から順に1, 2, 3, …の番号が書かれた整理券を渡される。並んでいる人の位置を図のように行と列で表すと、例えば、整理券の番号が27の人は、5行目の3列目となる。

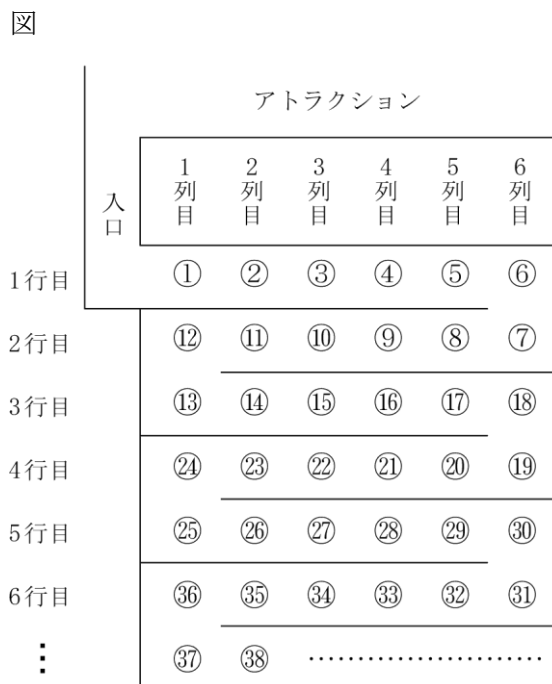
次の問1、問2に答えなさい。

(山口県 2020 年度)

問1 Aさんの整理券の番号は75であった。Aさんは、何行目の何列目に並んでいるか。求めなさい。

問2 自然数 m , n を用いて偶数行目のある列を $2m$ 行目の n 列目と表すとき、 $2m$ 行目の n 列目に並んでいる人の整理券の番号を m , n を使った式で表しなさい。

また、偶数行目の5列目に並んでいるBさんの整理券の番号が、4の倍数であることを、この式を用いて説明しなさい。



解答欄

問1	行目の	列目
問2	式	
	〔説明〕	

解答

問 1 13 行目の 3 列目

問 2

式 $12m - n + 1$

〔説明〕

B さんの整理券の番号は、偶数行目の 5 列目だから、

$$12m - n + 1 = 12m - 5 + 1 = 4(3m - 1)$$

となる。

m は自然数だから、 $3m - 1$ は整数であり、 $4(3m - 1)$ は 4 の倍数である。

したがって、B さんの整理券の番号は、4 の倍数となる。

解説

問 1

1 行目あたり 6 人並んでいて $75 = 6 \times 12 + 3$ であるから、A さんは 13 行目にいることがわかる。

偶数行の 1 列目は 12 の倍数で、12 行目の 1 列目は 72 であるから、75 は 13 行目の 3 列目

問 2

$2m$ 行目の 1 列目は $2m \times 6$ であるので、 $2m$ 行目の n 列目は $2m \times 6 - (n - 1) = 12m - n + 1$

【問 14】

図 1 のような同じ大きさの正方形の白と黒のタイルがたくさんある。

図 1



白のタイル

黒のタイル

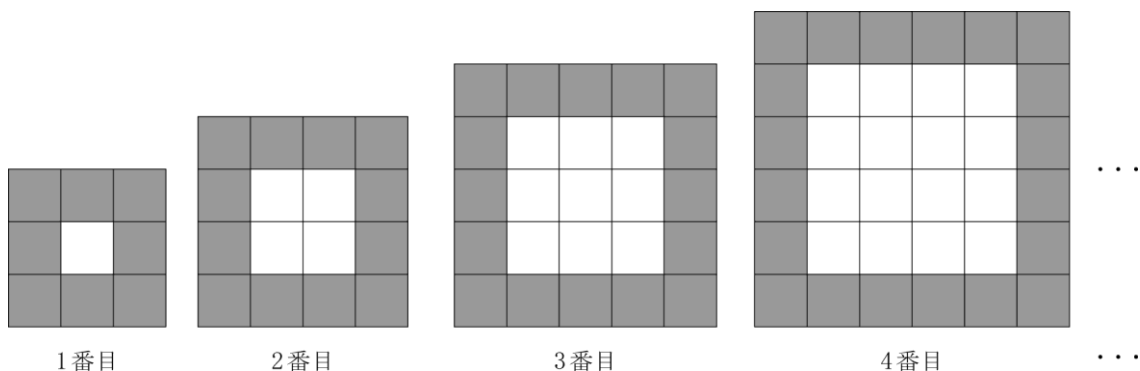
これらのタイルをすき間なく並べて、図 2 のように、1 番目、2 番目、3

番目、4 番目、……と一定の規則にしたがって正方形をつくっていく。

あゆむさんとかなでさんは、1 番目、2 番目、3 番目、4 番目、……の正方形をつくるときに必要なタイルの枚数について話し合っている。2 人の話し合いの一部を読んで、問 1・問 2 に答えなさい。

(徳島県 2020 年度)

図 2



【話し合いの一部】

あゆむさん 1 番目の正方形をつくるには、白のタイルが 1 枚と黒のタイルが 8 枚必要ですね。

かなでさん そうですね。2 番目の正方形をつくるには、白のタイルが 4 枚と黒のタイルが 12 枚必要です。それでは、5 番目の正方形をつくるには、タイルが何枚必要なのでしょうか。

あゆむさん 5 番目の正方形をつくるには、白のタイルが (ア) 枚と黒のタイルが (イ) 枚必要です。このような正方形をつくるときに必要な白と黒のタイルの枚数には、規則性がありますね。

かなでさん なるほど。例えば、 n 番目の正方形をつくるときに必要な黒のタイルの枚数は、 n を用いて (ウ) 枚と表すことができますね。

問 1 【話し合いの一部】の (ア)・(イ) にあてはまる数を、ウ にはあてはまる式を、それぞれ書きなさい。

問 2 白のタイルの枚数が、黒のタイルの枚数より 92 枚多くなるのは何番目の正方形か、求めなさい。

解答欄

問 1	ア	
	イ	
	ウ	
問 2	番目	

解答

問 1

ア 25

イ 24

ウ $4n+4$

問 2 12 (番目)

解説

問 1

白のタイルに着目すると、1 番目には $1=1^2$ (枚)、2 番目には $4=2^2$ (枚)、3 番目には $9=3^2$ (枚)、4 番目には $16=4^2$ (枚)使われているので、 n 番目には n^2 (枚)必要であることがわかる。

次に、黒のタイルに着目する。3 番目を例にとると、黒のタイルと白のタイルの総数は、 5^2 (枚)であり、そこから白のタイルの枚数である 3^2 (枚)を除いたのが黒のタイルの枚数である。よって、 n 番目には黒のタイルの枚数は、 $(n+2)^2-n^2=4n+4$ (枚)必要であることがわかる。

以上のことから、5 番目の正方形をつくるときに必要な白のタイルの枚数は、 $5^2=25$ (枚)。黒のタイルの枚数は、 $4\times 5+4=24$ (枚)。

よって、(ア)…25、(イ)…24、ウ… $4n+4$ 。

問 2

白のタイルの枚数 n^2 (枚)が、黒のタイルの枚数 $4n+4$ (枚)より 92 枚多くなるので、

$$n^2=4n+4+92 \Rightarrow n^2-4n-96=0 \Rightarrow (n-12)(n+8)=0 \Rightarrow n>0 \text{ より、} n=12 \text{ (番目)}$$

【問 15】

平方数とは、自然数の 2 乗で表すことができる数である。たとえば、25 は、 5^2 と表すことができるので平方数である。

下の表は、1 から 20 までの自然数 n を左から順に並べ、平方数 n^2 と差 $n^2 - (n-1)^2$ のそれぞれの値をまとめようとしたものである。あとの文は、この表についての花子さんと太郎さんの会話の一部である。

これについて、あとの (1)、(2) の問いに答えよ。

(香川県 2020 年度)

自然数 n	1	2	3	4	5	6	7		16		20
平方数 n^2	1	4	9	16	25	36	49		256		400
差 $n^2 - (n-1)^2$	1	3	5	7	9	11	13		a		39

花子：表の 1 番下の段には、奇数が並んでいるね。

太郎：それは、差 $n^2 - (n-1)^2$ を計算すると、 $2n-1$ になるからだね。

花子：ところで、その差の中には、たとえば 9 のように、平方数が含まれているね。

太郎：その 9 は $25 - 16 = 9$ で求めたね。

花子：そう、 $5^2 - 4^2 = 3^2$ であることから、 $3^2 + 4^2 = 5^2$ が成り立つよね。つまり、三平方の定理の逆から、3 辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形が見つかるね。

太郎：そうか。その場合、 $2n-1$ が 9 のときの n の値は 5 で、 $n-1$ の値は 4 だから、3 辺の長さが 3, 4, 5 の直角三角形が見つかるということだね。このようにすれば、他にも 3 辺の長さがすべて自然数の直角三角形を見つけることができそうだよ。

花子：差の $2n-1$ が平方数になっているところに注目すればいいから、次は $2n-1$ が 25 のときを考えてみようよ。このとき、 n の値は 13 だから、 $5^2 + 12^2 = 13^2$ が成り立つことがわかるから、3 辺の長さが 5, 12, 13 の直角三角形が見つかるね。

太郎：この方法で、その次に見つかる 3 辺の長さがすべて自然数の直角三角形は、 $2n-1$ が 49 のときだから、その場合は 3 辺の長さが P の直角三角形だね。

(1) 表中の a の値を求めよ。

(2) 会話文中の P の 内にあてはまる 3 つの自然数を求めよ。

解答欄

(1)	$a=$
(2)	

解答

(1) $a=31$

(2) 7, 24, 25

解説

(1)

$$256=16^2 \text{ より, } a=16^2-(16-1)^2=16^2-15^2=(16-15)\times(16+15)=1\times 31=31$$

(2)

$$2n-1=49 \text{ より } n=25, \quad n-1=24 \quad \text{よって, } 25^2-24^2=49=7^2$$

これより, $25^2=7^2+24^2$ となるから, 3 辺の長さは 7, 24, 25 である。

【問 16】

美咲さんと悠真さんは、次のような【課題】について考えた。下の【会話】は、2人が話し合っている場面の一部である。

このとき、下の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2020 年度)

【課題】

右の図は、自然数のある規則にしたがって、1から小さい順に書き並べたものである。ただし、図は途中から省略してある。また、上から a 番目で、左から b 番目の位置にある自然数を (a, b) で表すことにする。

例えば、 $(4, 2)=15$ である。

このとき、 $(3, 6)$ ， $(31, 1)$ ， (n, n) はどのような自然数になるか調べてみよう。

1	2	5	10	...
4	3	6	11	...
9	8	7	12	...
16	15	14	13	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

【会話】

美咲：おもしろそうな課題だね。

悠真：そうだね。一緒に考えてみようか。

美咲：この課題では、 $(4, 2)=15$ となっているので、 $(3, 6)=$ ① となるね。

悠真：なるほど。じゃあ、 $(31, 1)$ はどのような自然数になるかな。

美咲： $(31, 1)$ は、上から 31 番目で、左から 1 番目の位置にある自然数だね。
でも、書き並べて調べるのはたいへんそうだし、何かいい方法はないかな。

悠真：あっ！自然数の並び方に規則性を見つけたよ。左端に並んでいる自然数に着目すれば、 $(31, 1)=$ ② となるよ。

美咲：規則性に気づくとはよく求めることができるね。

じゃあ、 $(1, 1)=1$ ， $(2, 2)=3$ ， $(3, 3)=7$ ， $(4, 4)=13$ ，... となっているけれど、 (n, n) はどのような自然数になるかな。

(1) 【会話】の中の ①，② に当てはまる自然数を求めなさい。

(2) 【会話】の中の下線部について、 (n, n) はどのような自然数であるか、 n を用いて表しなさい。

解答欄

(1)	①	
	②	
(2)		

解答

(1)

①28

②961

(2) n^2-n+1

解説

(1)

一番上の数は、1, 2, 5, 10, 17, 26 となるので、上から 1 番目で、左から 6 番目の数は 26

よって、上から 3 番目で、左から 6 番目の数は $26+2=28$

左端に並んでいる数は、上から、1, 4, 9, 16, 25, …となっているので、

上から 31 番目で、左から 1 番目の数は、 $31^2=961$

(2)

(1)と同様に、上から n 番目で、左から 1 番目の数は、 n^2 であるので、

上から n 番目で、左から n 番目の数は、 $n^2-(n-1)=n^2-n+1$

【問 17】

次のように、1 から 6 までの数字がくり返し並んでいる。左から 100 番目の数字は何か。

(鹿児島県 2020 年度)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …

解答欄

解答

4

解説

数字の並び方にどのような規則性があるかを考える。

左から 6 番目の数は 6, 12 番目の数は 6, 18 番目の数は 6, …となるように
6 の倍数番目は 6 である。

よって, 96 番目の数も 6 であり, 100 番目の数は 4 となる。

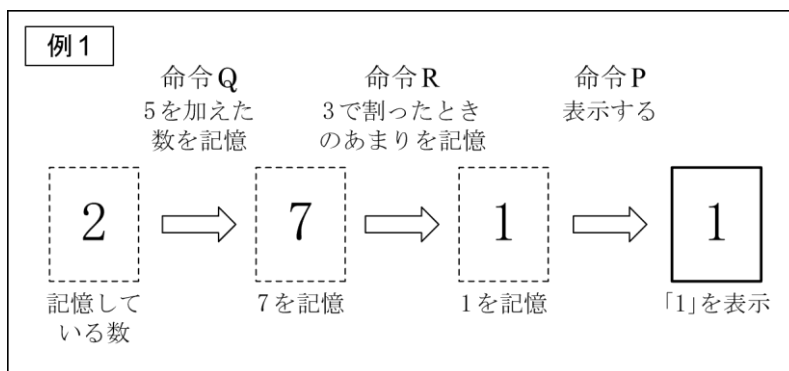
【問 18】

数を 1 つ記憶し、命令 P, Q, R を与えると、その命令通りに計算処理や画面表示ができるコンピュータがある。命令 P, Q, R の内容は下の表の通りである。

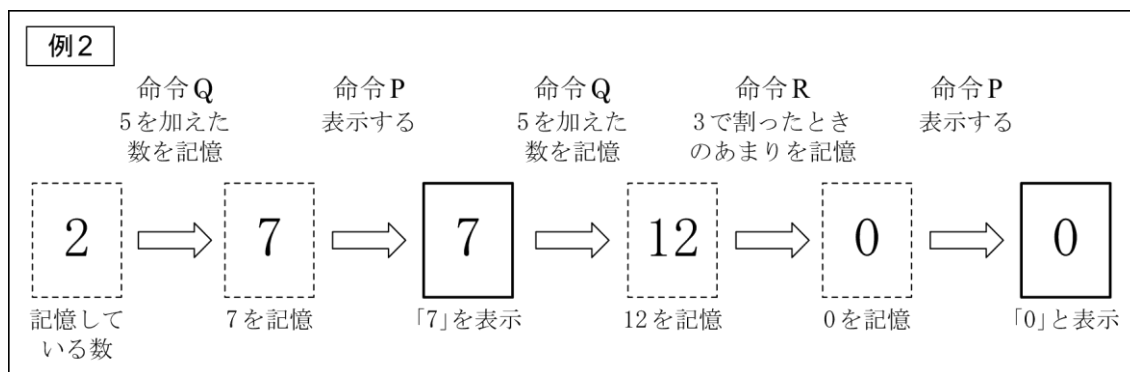
ただし、このコンピュータは数を 1 つしか記憶できないものとする。

命令	内 容
P	記憶している数を、画面に表示する。
Q	記憶している数に 5 を加えて、その和を記憶する。
R	記憶している数を 3 で割ったときのあまりを記憶する。 ただし、3 で割りきれるときは 0 を記憶する。

例 1 のように、コンピュータが記憶している数が 2 のとき、「Q, R, P」の順に命令した場合、画面には『1』が表示される。



例 2 のように、コンピュータが記憶している数が 2 のとき、「Q, P, Q, R, P」の順に命令した場合、画面には、はじめに『7』，次に『0』と表示される。



このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2020 年度)

問 1 コンピュータが記憶している数が 1 のとき、「Q, Q, R, P」の順に命令した場合、画面に表示される数を求めなさい。

問 2 次の は、コンピュータが記憶している数が 1 のとき、『0』と『1』を交互に画面に表示させるための命令である。 の中に Q, R のいずれかを 1 つずつ入れて命令を完成させなさい。

「 , , P, , , , P」

を繰り返す。

問 3 コンピュータが記憶している数が 3 のとき、「Q, R, Q, P」の順に命令することを 32 回繰り返す。このとき、これまで画面に表示された 32 個の数の和を求めなさい。
ただし、コンピュータが最初に記憶している数 3 は画面に表示されていない。

問 4 コンピュータがある数を記憶しているとき、「Q, Q, R, Q, R, P」の順に命令すると、画面に『2』と表示された。コンピュータが最初に記憶していた数として考えられる 10 以下の自然数をすべて答えなさい。

解答欄

問 1	
問 2	「 , , P, , , , P」を繰り返す。
問 3	
問 4	

解答

問 1 2

問 2 「 $\boxed{Q}$ 」, $\boxed{R}$, P, $\boxed{Q}$, $\boxed{Q}$, $\boxed{R}$, P」を繰り返す。

問 3 192

問 4 2, 5, 8

解説

問 1

「Q, Q, R, P」の順に命令した場合の数字の変化は、はじめ 1 を記憶しているので、
「 $1 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow \text{『2』}$ 」を表示」となる。

問 3

「Q, R, Q, P」という命令を 4 回繰り返すとコンピュータの数字は、はじめ 3 を記憶しているので次のように変わる。

「はじめ 3 を記憶 $\rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow \text{『7』}$ を表示 $\rightarrow 12 \rightarrow 0 \rightarrow 5 \rightarrow \text{『5』}$ を表示 $\rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow \text{『6』}$ を表示 $\rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow \text{『7』}$ を表示

となり、以降、画面に表示される数は 7, 5, 6 が繰り返される。

よって、「Q, R, Q, P」という命令を 32 回繰り返すので、 $32 \div 3 = 10$ 余り 2 より、7, 5, 6 を表示する繰り返しが 10 回行われた後、残り 2 回で 7, 5 を表示することになる。

したがってその合計は、 $(7 + 5 + 6) \times 10 + 7 + 5 = 192$

問 4

「Q, Q, R, Q, R, P」の命令のうち、最初の「Q, Q, R」までの命令を考える。

「Q, Q」の命令によってはじめに記憶している数に 10 が加えられ、その後「R」の命令によって 3 で割ったときの余りが記憶されるので、その余りが 0, 1, 2 のいずれになるかで分類すればよい。

はじめに記憶している数が 1, 4, 7, 10 であるとき、「Q, Q」の命令によってそれぞれ 11, 14, 17, 20 になり、「R」の命令によってすべて 2 になる。その後「Q, R, P」の命令により、「 $2 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow \text{『1』}$ を表示」となるため、条件に合わない。

同様にして、はじめに記憶している数が 2, 5, 8 であるとき、「Q, Q, R」の命令によってすべて 0 になる。その後「Q, R, P」の命令により、「 $0 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow \text{『2』}$ を表示」となるため、条件に合う。

はじめに記憶している数が 3, 6, 9 であるとき、「Q, Q, R」の命令によってすべて 1 になる。その後「Q, R, P」の命令により、「 $1 \rightarrow 6 \rightarrow 0 \rightarrow \text{『0』}$ を表示」となるため、条件に合わない。

以上のことから、2, 5, 8 が正解。