

9. 式の証明の問題（2010 年度出題）

【問 1】

花子さんは、メモに書いた式を見て、「連続する 3 つの自然数では、もっとも小さい自然数ともっとも大きい自然数の積に 1 を加えると、中央の自然数の 2 乗に等しくなる」と予想した。この予想がいつでも成り立つことを、もっとも小さい自然数を n として証明しなさい。

（青森県 2010 年度 前期）

花子さんのメモ

2, 3, 4 の場合	$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2$
3, 4, 5 の場合	$3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$
6, 7, 8 の場合	$6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2$
11, 12, 13 の場合	$11 \times 13 + 1 = 144 = 12^2$

解答欄

〔証明〕

解答

もっとも小さい自然数を n とすると

中央の自然数は $n+1$

もっとも大きい自然数は $n+2$ と表される。

もっとも小さい自然数ともっとも大きい自然数の積に 1 を加えると

$$n(n+2)+1$$

$$=n^2+2n+1$$

$$=(n+1)^2$$

したがって

連続する 3 つの自然数では

もっとも小さい自然数ともっとも大きい自然数の積に 1 を加えると中央の自然数の 2 乗に等しい。

解説

別解

連続する 3 つの自然数を $n-1, n, n+1$ とおく。

もっとも小さい自然数ともっとも大きい自然数の積に 1 を加えると

$$(n-1)(n+1)+1=n^2-1+1=n^2$$

よって中央の自然数 n の 2 乗になる。

【問 2】

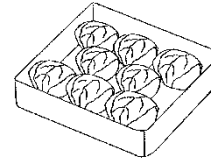
数学の授業で、次の【課題】が出されました。 内は、課題の 1 を考えている《1 班》と、課題の 2 へ進んだ《2 班》の生徒と先生の会話です。

あとの問1、問2に答えなさい。

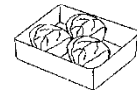
(宮城県 2010 年度)

【課題】ある和菓子屋では、500 個の桜もちを販売する予定です。

- 1 8 個入りの商品 A を何箱かと 3 個入りの商品 B を何箱か作り、桜もちの総数を 500 個になるようにします。和菓子屋では、①箱の数の合計が最も少なくなるようにしたいと思っています。このとき、箱の数の合計について考えなさい。
- 2 3 個入りの商品 B と 6 個入りの商品 C とでは、それぞれの箱の数をどのようにしても、②桜もちの総数を 500 個にできません。そのわけを考えなさい。



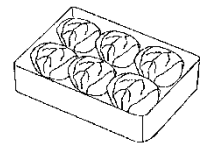
商品 A



商品 B



商品 B



商品 C

《1 班》

先生:何か気づいたことはありますか。

生徒:桜もちの総数が 500 個になるのは、例えば、商品 A が 10 箱と商品 B が 140 箱のときや、商品 A が 40 箱と商品 B が ア 箱のときで、それぞれの場合では、箱の数の合計が異なります。

先生:そうですね。箱の数の合計について、他に気づいたことはありますか。

生徒:商品 A の箱の数が増えると、商品 A と商品 B の箱の数の合計が減るという関係があるようです。

先生:なるほど。その考え方を使ってみるとよいですね。

《2 班》

生徒:商品 A と商品 B では桜もちの総数を 500 個にできたのに、商品 B と商品 C ではできないのはなぜかな。どう考えればよいのだろう。

先生:商品 B が x 箱と商品 C が y 箱あるとき、箱に入っている桜もちの総数は何個になりますか。

生徒:はい。 x と y を使った式で表すと イ (個) になります。

先生:500 にならないわけは、その式を利用して考えるとみえてきますよ。

問1 課題の 1 について、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) ア にあてはまる数を求めなさい。

(2) 下線部①のとき、商品 A と商品 B の箱の数の合計が何箱になるか求めなさい。

問2 課題の 2 について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) イ にあてはまる x と y を使った式を答えなさい。

(2) 下線部②のようになるわけを文字式を用いて説明しなさい。

解答欄

問1	(1)	ア	
	(2)	箱	
問2	(1)	イ	
	(2)		

解答

問1

(1)

ア 60

(2) 65 箱

問2

(1)

イ $3x+6y$

(2)

桜もちの総数は $3x+6y=3(x+2y)$

$x+2y$ は整数だから $3(x+2y)$ は 3 の倍数である。

500 は 3 の倍数でないから $3x+6y$ は 500 にならない。

よって 500 個にはできない。

解説

問1

(2)

商品 A を x 箱, 商品 B を y 箱とすると桜もちの総数が 500 個より $8x+3y=500$

商品 A の箱の数 x 箱が増えると

箱の数の合計が減ることを利用して考えるので x について変形する。

$$x = \frac{500-3y}{8}$$

y の値が小さいほど x の値が大きくなるので $\frac{500-3y}{8}$ が整数になる y の値を考える。

y が奇数のとき x は分数になるので問題に合わない。

$$y=2 \text{ のとき } x = \frac{494}{8} = \frac{247}{4} \text{ これも問題に合わない。}$$

$$y=4 \text{ のとき } x = \frac{488}{8} = 61$$

よって $(x, y) = (61, 4)$

箱の数は $61+4=65$ 箱

【問 3】

連続する 4 つの整数を小さい方から順に a, b, c, d とするとき、 $bc - ad$ の値はつねに 2 になる。このことを、 a を用いて説明しなさい。

(栃木県 2010 年度)

解答欄

解答

b, c, d をそれぞれ a を用いて表すと

$b = a + 1, c = a + 2, d = a + 3$ となる。

よって $bc - ad$

$$= (a + 1)(a + 2) - a(a + 3)$$

$$= a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a$$

$$= 2$$

したがって、 $bc - ad$ の値はつねに 2 になる。

解説

b, c, d は

$$b = a + 1$$

$$c = a + 2$$

$d = a + 3$ と表せる。

$$bc - ad = (a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = a^2 + 3a + 2 - a^2 - 3a = 2$$

よって $bc - ad$ の値は常に 2 である。

【問 4】

連続する 2 つの自然数の平方の和が 145 となると、この連続する 2 つの自然数を求めなさい。

(群馬県 2010 年度)

解答欄

〔解〕

答 _____ , _____

解答

連続する 2 つの自然数を x , $x+1$ とすると、

$$x^2 + (x+1)^2 = 145$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 145$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$(x+9)(x-8) = 0$$

よって、 $x = -9$, $x = 8$

x は自然数だから、 $x = 8$

したがって、連続する 2 つの自然数は 8, 9

【問 5】

ある中学校の数学の授業で、S さんが作った問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

(東京都 2010 年度)

[S さんが作った問題]

a, h を正の数とする。

右の図1で、四角形 $ABCD$ は 1 辺の長さが a cm の正方形である。

四角形 $ABCD$ の 2 つの対角線の交点を M とする。

右の図2に示した立体は、図1の四角形 $ABCD$ を、四角形 $ABCD$ と垂直な方向に、一定の距離だけ平行に動かしてできた直方体を表している。

点 M が動いてできた線分の長さを h cm、この立体の体積を P cm^3 とするとき、体積 P を a, h を用いた式で表しなさい。

図1

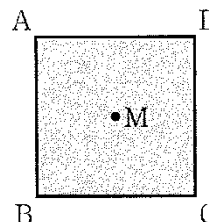
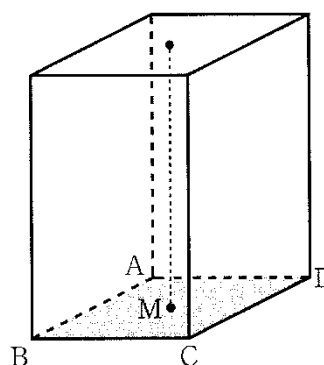


図2



問1 [S さんが作った問題]で、 P を a, h を用いた式で表せ。

先生は、[S さんが作った問題]をもとにして、次の問題を作った。

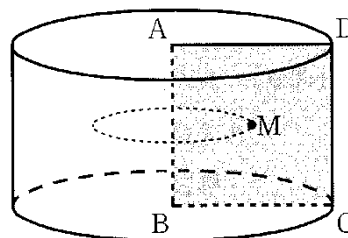
[先生が作った問題]

a, ℓ を正の数とする。

右の図3に示した立体は、図1の四角形 $ABCD$ を、頂点 A, B を通る直線を軸として 1 回転させてできた円柱を表している。

点 M が動いてできた円の周の長さを ℓ cm、
この立体の体積を V cm^3 とするとき、 $V = a^2 \ell$ となることを確かめなさい。

図3



問2 [先生が作った問題]で、 V, ℓ をそれぞれ a を使って表し、 $V = a^2 \ell$ となることを証明せよ。ただし、円周率は π とする。

解答欄

問1	P=
問2	〔証明〕 V=a^2 \ell

解答

問1 $P=a^2h$

問2

〔証明〕

この立体は、底面の半径が a cm, 高さが a cm の円柱であるから体積 V は

$$V = \pi a^2 \times a$$

$$= \pi a^3 \dots \textcircled{1}$$

また線分 AB と点 M との距離は $\frac{a}{2}$ cm であるから点 M が通ってできる円周の長さ l は

$$\ell = 2\pi \times \frac{a}{2}$$

$$= \pi a$$

よつて

$$a^2 \ell = a^2 \times \pi a$$

$$= \pi a^3 \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$V \equiv a^2 \ell$$

解説

問1

直方体の体積＝底面積×高さより

$$P=a^2\times h$$

$$P=a^2h$$

問2

円柱の体積は

底面積×高さより

$$V = \pi a^2 \times a = \pi a^3 \dots (1)$$

また点 M が動くと半径 $\frac{a}{2}$ cm の円周になるから

$$\ell = 2\pi \times \frac{a}{2} = \pi a \cdots (2)$$

(1), (2)より

$$V = \pi a^3 = a^2 \times \pi a = a^2 \times \ell = a^2 \ell$$

【問 6】

次の文は、ある中学校の先生と生徒の会話の一部である。

この文を読んで、下の問1～問3に答えなさい。

(新潟県 2010 年度)

先生：これから配る箱の中には、1 から 7 までの数字が 1 つずつ書かれた 7 枚のカード

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ が入っています。これらをよくかき混ぜてから、3 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた数字を使って 3 けたの整数を作ります。このようにしてできる 3 けたの整数の中で、最も大きい整数から、最も小さい整数を引いたときの値を n とします。

例えば、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{7}$ の 3 枚のカードを取り出して 3 けたの整数を作ったとき、最も大きい整数は 721 で、最も小さい整数は 127 となります。このときの n の値は、 $n=721-127=594$ となります。

それでは、それぞれが 3 枚のカードを取り出して、 n の値を求めてみましょう。

A さん: $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ の 3 枚のカードが出ました。最も大きい 3 けたの整数は $\boxed{\text{ア}}$ で、最も小さい 3 けたの整数は $\boxed{\text{イ}}$ となるから、 $n= \boxed{\text{ウ}}$ です。

B さん: 私は、2 回取り出してみました。1 回目の n の値は、 $n=396$ になりましたが、2 回目の n の値は、 $n=198$ になりました。

先生：いろいろな n の値があることがわかりましたね。求めた n の値に何か共通していることはありませんか。

C さん: 私も $n=198$ でしたが、先生が求めた $n=594$ も、B さんが求めた $n=396$ も、99 の倍数になっていると思います。

先生：そうです。Ⅰ n の値は 99 の倍数になっていますね。

B さん、C さんは、 n の値が、同じ $n=198$ となりましたが、結果が同じでも取り出したカードは異なっているかもしれませんね。なぜなら、 n の値が、 $n=198$ となるカードの取り出し方を調べてみると、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ と $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ と $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ と $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ と $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ の 5 通りあるからです。

それでは、B さんが求めた、Ⅱ n の値が、 $n=396$ となるとき、カードの取り出し方は何通りあるか考えてみましょう。

問1 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数を、それぞれ答えなさい。

問2 下線部分Ⅰについて、取り出したカードに書かれた数字を、大きい順にそれぞれ a , b , c とし、 n の値が 99 の倍数となることを、 a , b , c を使って説明しなさい。

問3 下線部分Ⅱについて、カードの取り出し方は何通りあるか、求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	〔説明〕	
問3	通り	

解答

問1

ア 631

イ 136

ウ 495

問2

〔説明〕

$$\begin{aligned} n &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ &= 99(a - c) \end{aligned}$$

$a - c$ は整数だから

n は 99 の倍数である。

問3 9 通り

解説

問3

3 枚のカードを大きい順にそれぞれ a, b, c とおくと $n = 99(a - c)$ と表せる。

$$99(a - c) = 396$$

$$a - c = 4$$

よってカードの組み合わせは

$(a, b, c) = (5, 4, 1), (5, 3, 1), (5, 2, 1), (6, 5, 2), (6, 4, 2), (6, 3, 2), (7, 6, 3), (7, 5, 3), (7, 4, 3)$ の 9 通り。

【問 7】

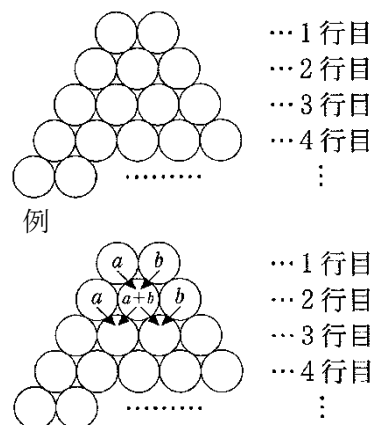
数学の授業で、先生から、次の課題が出された。

課 題

「下のルールに従って、右の図の○の中に自然数を入れたときの規則性を見つけよう」

ルール

- ア 1 行目の○には、自然数を 1 個ずつ入れる。
- イ 2 行目以降の左端の○には、すべて「1 行目の左の数」を入れる。右端の○には、すべて「1 行目の右の数」を入れる。
- ウ 2 行目以降の両端以外の○には、右の例のように、1 つ上の行で接する 2 つの○に入れた数の和を入れる。



この課題に取り組んでいる太郎さんと花子さんの次の会話を読んで、あとの問いに答えなさい。

(富山県 2010 年度)

太郎 まず、1 行目に左から順に 1, 2 を入れた場合について考えてみよう。各行の左から 2 番目の数を 1 行目から順に見ると、規則正しく並んでいるね。

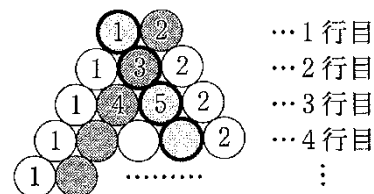
花子 右から 2 番目の数も、規則正しく並んでいるよ。

太郎 本当だ！そうすると 8 行目の右から 2 番目の数は A になるね。

花子 各行の左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和には規則性があるのかしら。

太郎 1 行目の左から 2 番目の数は 2, 右から 2 番目の数は 1 だから和は 3, 2 行目の左から 2 番目の数は 3, 右から 2 番目の数も 3 だから和は 6, 3 行目の左から 2 番目の数は 4, 右から 2 番目の数は 5 だから和は 9……。 B どの行についても、左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和は 3 の倍数になっているようだね。

花子 c 1 行目の 2 つの自然数が他の場合はどうなるのかしら。



問1

A

 にあてはまる数を求めなさい。

問2 下線Bが成り立つことを、 n 行目の左から 2 番目の数と右から 2 番目の数をそれぞれ n を使った式で表し、説明しなさい。

問3 下線Cについて、1 行目の 2 つの自然数を左から順に a, b として、 n 行目の左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和を n, a, b を使った式で表しなさい。

問4 10 行目の、左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和が 150 になるとき、1 行目の自然数の入れ方は何通りあるか求めなさい。

解答欄

問1		
問2	左から 2 番目	右から 2 番目
	したがって、どの行についても、左から 2 番目の数と右から 2 番目の数の和は 3 の倍数になる。	
問3		
問4	通り	

解答

問1 15

問2

左から2番目 $n+1$

右から2番目 $2n-1$

左から2番目の数と右から2番目の数の和は

$$(n+1)+(2n-1)$$

$$=n+1+2n-1$$

$$=3n$$

n は整数だから $3n$ は3の倍数である。

したがって、どの行についても、左から2番目の数と右から2番目の数の和は3の倍数になる。

問3 $n(a+b)$ など

問4 14通り

解説

問3

n 行目の左から2番目の数は $(n-1)a+b$

右から2番目の数は、 $a+(n-1)b$ と表せる。

よってその和は

$$(n-1)a+b+a+(n-1)b$$

$$=na+nb$$

問4

10行目の左から2番目の数と右から2番目の数の和は $10a+10b$ と表せる。

この値が150だから

$$10a+10b=150$$

$$a+b=15$$

この式を満たす a, b の値の組は

a, b は自然数より $(a, b) = (1, 14), (2, 13), (3, 12) \cdots (14, 1)$ の14通り。

【問 8】

n を整数とすると、いつでも 6 の倍数になる式を、下のア～エの中から 1 つ選び、その記号を書きなさい。

(山梨県 2010 年度)

ア $3n$

イ $n-6$

ウ $6n+3$

エ $6n-6$

解答欄

--

解答

エ

解説

いつでも 6 の倍数になる数は $6 \times (\text{整数})$ になる。

$$6n-6=6(n-1)$$

n が整数のとき $(n-1)$ も整数だから $6(n-1)$ は 6 の倍数である。

よってエ

【問 9】

図のように、1 から 25 までの整数を、1 から順に縦に 5 個ずつ並べる。連続して横に並んだ 3 個の数を線で囲み、わくの中の 3 つの数を小さい方から順に a, b, c とする。たとえば $\boxed{7 \ 12 \ 17}$ のわくでは、 $a=7, b=12, c=17$ である。わくをどこにとっても、 a と c との積に 25 を加えると、和は b^2 になることを証明しなさい。

(岐阜県 2010 年度)

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25

解答欄

〔証明〕

解答

$a=b-5, c=b+5$ と表せる。

ただし、 b は 6 から 20 までの整数である。

$$ac+25=(b-5)(b+5)+25$$

$$=(b^2-25)+25$$

$$=b^2$$

したがって、 $ac+25=b^2$ である。

解説

a, b, c は 5 ずつ増えているので $a=b-5, c=b+5$ とおける。

$$ac+25=(b-5)(b+5)+25=b^2-25+25=b^2$$

よって a と c の積に 25 を加えると和は b^2 になる。

【問 10】

図は、ある月のカレンダーである。

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

次の問1、問2に答えなさい。

(山口県 2010 年度)

問1 図の **10 11 12** のように横に並んだ連続する 3 つの数について、和が 72 となるような 3 つの数を求め、小さい順に左から書きなさい。

問2 図の **9 16** のように縦に並んだ 2 つの数について、上にある数を a 、下にある数を b とするとき、

$6a^2 + b^2$ が 7 の倍数となることを、 b を a を使った式で表して説明しなさい。

解答欄

問1			
問2	〔説明〕		

解答

問1 23, 24, 25

問2

〔説明〕

上にある数を a とするとき下にある数 b は $a+7$ と表される。

このとき

$$6a^2 + b^2 = 6a^2 + (a+7)^2$$

$$= 6a^2 + a^2 + 14a + 49$$

$$= 7(a^2 + 2a + 7)$$

$a^2 + 2a + 7$ は整数なので $7(a^2 + 2a + 7)$ は 7 の倍数である。

よって 2 つの数字 a, b について $6a^2 + b^2$ は 7 の倍数となる。

解説

問1

連続する 3 つの数を $x-1, x, x+1$ とおく。

和が 72 より

$$(x-1) + x + (x+1) = 72$$

$$3x = 72$$

$$x = 24$$

よって連続する 3 つの数は 23, 24, 25

【問 11】

「連続する 2 つの奇数において、2 つの奇数の積から小さい方の奇数の 2 倍をひいた数は、小さい方の奇数の 2 乗に等しい」ことの証明を、 の中に完成せよ。

(福岡県 2010 年度)

〔証明〕

整数 n を使って、小さい方の奇数を $2n-1$ とする。

解答欄

〔証明〕

整数 n を使って、小さい方の奇数を $2n-1$ とする。

解答

大きい方の奇数は $2n+1$ である。

2 つの奇数の積から小さい方の奇数の 2 倍をひいた数は

$$(2n-1)(2n+1)-2(2n-1)=4n^2-4n+1$$

小さい方の奇数の 2 乗は

$$(2n-1)^2=4n^2-4n+1$$

である。

だから連続する 2 つの奇数において

2 つの奇数の積から小さい方の奇数の 2 倍をひいた数は小さい方の奇数の 2 乗に等しい。

解説

小さい方の奇数を $2n-1$ とすると大きい方の奇数は $2n+1$ と表せる。

2 つの奇数の積から小さい方の奇数の 2 倍をひいた数は

$$(2n-1)(2n+1)-2(2n-1)=4n^2-1-4n+2=4n^2-4n+1$$

小さい方の奇数の 2 乗は $(2n-1)^2=4n^2-4n+1$

よって $(2n-1)(2n+1)-2(2n-1)=(2n-1)^2$

【問 12】

小さい順に並べた連続する 3 つの奇数 3, 5, 7 において, $5 \times 7 - 5 \times 3$ を計算すると 20 となり, 中央の奇数 5 の 4 倍になっている。

このように, 「小さい順に並べた連続する 3 つの奇数において, 中央の奇数と最も大きい奇数の積から, 中央の奇数と最も小さい奇数の積をひいた差は, 中央の奇数の 4 倍に等しくなる」ことを文字 n を使って説明せよ。ただし, 説明は解答用紙の「 n を整数とし, 中央の奇数を $2n+1$ とする。」に続けて完成させよ。

(長崎県 2010 年度)

解答欄

〔説明〕

n を整数とし, 中央の奇数を $2n+1$ とする。

したがって, 小さい順に並べた連続する 3 つの奇数において, 中央の奇数と最も大きい奇数の積から, 中央の奇数と最も小さい奇数の積をひいた差は, 中央の奇数の 4 倍に等しくなる。

解答

〔説明〕

n を整数とし中央の奇数を $2n+1$ とする。

最も小さい奇数は $2n-1$ 最も大きい奇数は $2n+3$ と表すことができる。

よって

$$(2n+1)(2n+3) - (2n+1)(2n-1)$$

$$= 4n^2 + 8n + 3 - (4n^2 - 1)$$

$$= 8n + 4$$

$$= 4(2n+1)$$

したがって小さい順に並べた連続する 3 つの奇数において

中央の奇数と最も大きい奇数の積から中央の奇数と最も小さい奇数の積をひいた差は

中央の奇数の 4 倍に等しくなる。