

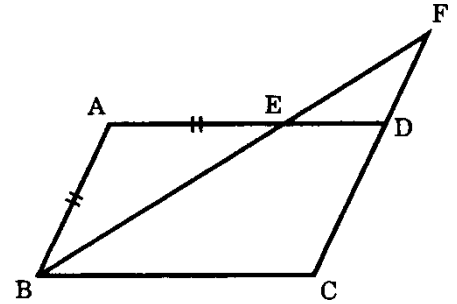
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題 【2002 年度出題】

【問 1】

図のように、平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AD 上に $AB=AE$ となるように点 E をとる。また、辺 CD の延長と BE の延長との交点を F とする。

このとき、 $AD=CF$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2002 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$AB=AE$ より

$$\angle ABE = \angle AEB \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$AB \parallel FC$ より

$$\angle ABE = \angle CFE \cdots \textcircled{2}$$

$AD \parallel BC$ より

$$\angle AEB = \angle CBE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\angle CFE = \angle CBE$$

よって $BC=CF \cdots \textcircled{4}$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$$AD=BC \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

$$AD=CF$$

解説

$AB=AE$ より

$$\angle ABE = \angle AEB \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから $AB \parallel FC$ より

$$\angle ABE = \angle CFE \cdots \textcircled{2}$$

$AD \parallel BC$ より

$$\angle AEB = \angle CBE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\angle CFE = \angle CBE$$

よって $BC=CF \cdots \textcircled{4}$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$$AD=BC \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

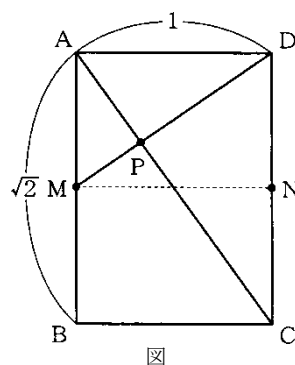
$$AD=CF$$

【問 2】

A4判の紙は図の長方形 $ABCD$ のように、2辺の長さの比が $AB:AD=\sqrt{2}:1$ となっていて、辺 CD の中点を N とすると長方形 $DAMN$ は長方形 $ABCD$ と相似になります。

この長方形 $ABCD$ で、線分 DM と対角線 AC との交点を P とするとき、 $\angle APM=90^\circ$ となることを証明しなさい。

(群馬県 2002 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle APM$ と $\triangle ABC$ において

共通の角だから

$$\angle MAP = \angle CAB \cdots \textcircled{1}$$

長方形DAMNと長方形ABCDは相似なので

$\triangle AMD$ と $\triangle BCA$ は

2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいから

相似になり $\angle AMD = \angle BCA$

よって $\angle PMA = \angle BCA \cdots \textcircled{2}$

①, ②により

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle APM \sim \triangle ABC$

したがって

$$\angle APM = \angle ABC = 90^\circ$$

解説

$\triangle APM$ と $\triangle ABC$ において

共通の角だから

$$\angle MAP = \angle CAB \cdots \textcircled{1}$$

長方形 DAMN と長方形 ABCD は相似なので

$\triangle AMD$ と $\triangle BCA$ は

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから相似になり

$$\angle AMD = \angle BCA$$

よって $\angle PMA = \angle BCA \cdots \textcircled{2}$

①, ②により

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle APM \sim \triangle ABC$

したがって $\angle APM = \angle ABC = 90^\circ$

【問 3】

次の会話文を読んで、後の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(群馬県 2002 年度)

妹:お兄ちゃん、「円Oに外接する四角形ABCDの周の長さを求めよ。」とい

う問題の解説を見たら、

「 $AD + \boxed{\text{(ア)}} = \boxed{\text{(イ)}} + \boxed{\text{(ウ)}}$ である。」とあるのよ。

この式はどうして成り立つの。

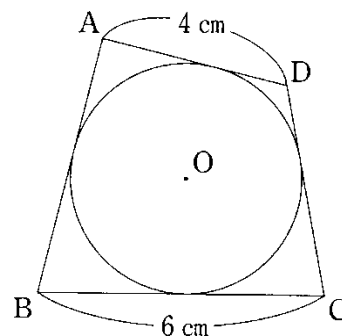
兄:それは「円外の1点から円に引いた2本の接線の長さは等しい。」という

定理を利用するんだよ。たとえば、円外の1点を点Bとすれば、線分ABと円Oとの接点をP、線分BCと円Oとの接点をQとすると、 $BP=BQ$ が成り立つんだよ。

妹:そうか。その定理を利用して、接線の長さで四角形の辺の長さを表して

いけば、さっきの式が示せるのね。

それで、四角形ABCDの周の長さは $\boxed{\text{(エ)}}$ cmとなるわけね。

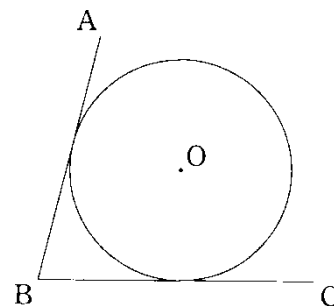


- (1) $\boxed{\text{(ア)}} \sim \boxed{\text{(ウ)}}$ に AB, BC, CD のいずれかを1つずつ入れて、円 O に外接する四角形 ABCD の4つの辺の長さの関係を表す式を完成しなさい。

- (2) $\boxed{\text{(エ)}}$ に当てはまる数を求めなさい。

- (3) 右の図は、円 O とそれに外接する四角形 ABCD の一部を示したものである。

必要な点や補助線を記入し、前の _____ を証明しなさい。



解答欄

(1)	$AD + \boxed{\text{(ア)}} = \boxed{\text{(イ)}} + \boxed{\text{(ウ)}}$
(2)	cm
(3)	証明

解答

(1)

ア BC

イ AB(CD)

ウ CD(AB)

(2) 20cm

(3)

証明

$\triangle BPO$ と $\triangle BQO$ において

円Oの接線は、接点を通る半径に垂直に交わるから

$\angle BPO = \angle BQO = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

円Oの半径だから

$PO = QO \dots \textcircled{2}$

共通な辺だから

$BO = BO \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle BPO \cong \triangle BQO$

ゆえに $BP = BQ$

解説

(1)

線分 AD と円 O との接点を S, 線分 CD と円 O との接点を R とする。

円外の1点からその円に引いた2本の接線の長さは等しいから

$AP = AS = a, BP = BQ = b, CQ = CR = c$

$DR = DS = d$ とおくと $AD = a + d, BC = b + c, AB = a + b, CD = c + d$

したがって $AD + BC = a + b + c + d$

$AB + CD = a + b + c + d$

よって $AD + BC = AB + CD$

(2)

(1)より四角形 ABCD の周の長さは $2 \times (AD + BC) = 2 \times (4 + 6) = 20\text{cm}$

(3)

$\triangle BPO$ と $\triangle BQO$ において

円 O の接線は

接点を通る半径に垂直に交わるから

$\angle BPO = \angle BQO = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

円 O の半径だから

$PO = QO \dots \textcircled{2}$

共通な辺だから

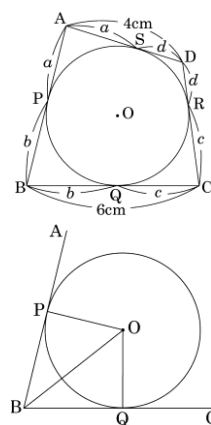
$BO = BO \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいから

$\triangle BPO \cong \triangle BQO$

ゆえに $BP = BQ$

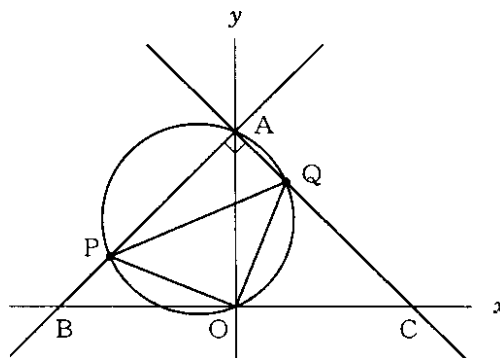


【問 4】

図のように、直線 $y=x+5$ と $y=-x+5$ は y 軸上の点 A で垂直に交わります。

この2つの直線と x 軸との交点をそれぞれ B , C とし、点 P が直線 $y=x+5$ 上を、点 B から A まで動くとき、3点 A , P , O を通る円が直線 $y=-x+5$ と交わる点を Q とします。ただし、点 P が点 A にきたとき、この円は線分 AC を直径とする円とします。

座標軸の単位の長さを 1 cm とするとき、次の各問に答えなさい。



(群馬県 2002 年度)

(1) $\triangle OQP$ は特別な三角形になります。どのような三角形になりますか。その三角形の名称を答えなさい。
また、その三角形になるわけを説明しなさい。

(2) 点 P が点 B から A まで動くとき、3点 A , P , O を通る円の中心をえがく線の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	三角形の名称	
	説明	
(2)	cm	

解答

(1)

三角形の名称 : 直角二等辺三角形

説明

四角形APOQは円に内接するから

$$\angle POQ = 90^\circ$$

また $\triangle OAB$ は直角二等辺三角形だから

$$\angle OAB = 45^\circ$$

同じ弧に対する円周角なので

$$\angle OQP = \angle OAP = 45^\circ \text{ となるから}$$

(2) 5cm

解説

(1)

説明

四角形APOQは円に内接するから $\angle POQ = 90^\circ$

また $\triangle OAB$ は直角二等辺三角形だから $\angle OAB = 45^\circ$

同じ弧に対する円周角なので $\angle OQP = \angle OAP = 45^\circ$ となるから

(2)

AOはつねに3点A, P, Oを通る円の弦だから

円の中心はAOの垂直二等分線上にある。

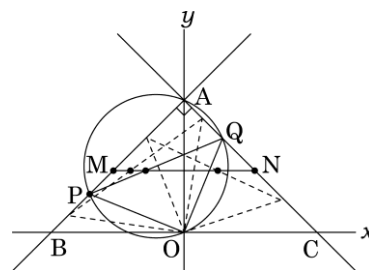
また $\triangle OQP$ は直角二等辺三角形だから

Pが点BにあるときQは点AにありPが点AにあるときQは点Cにある。

よって、線分AB, ACの中点をそれぞれM, Nとすると

円の中心がえがく線は線分MNとなり

中点連結定理より $MN = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ cm}$ である。



【問 5】

平行四辺形 ABCD について、次の問いに答えなさい。

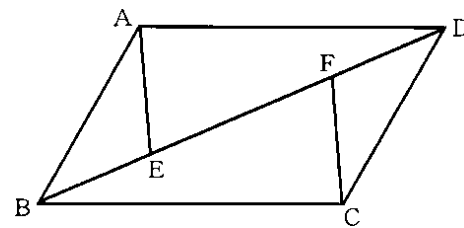
(富山県 2002 年度)

- (1) 対角線 BD 上に、 $BE=DF$ となるように2点 E, F をとる。このとき、 $AE=CF$ となることを次のように証明した。

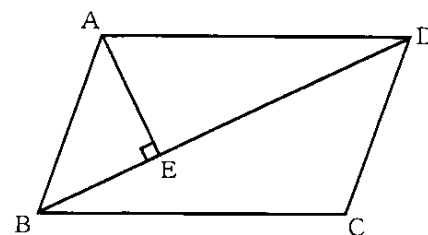
()には適切なことばを、 にはあてはまる辺や角を書き入れて、証明を完成させなさい。

〈証明〉

{	$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において $BE = DF$ … 仮定から = … 平行四辺形の()は等しいから = … 平行な2直線に1つの直線が交わるとき()は等しいから ()がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$ 合同な図形の対応する辺は等しいから $AE=CF$ である。
---	--



- (2) 右の図のように、頂点 A から対角線 BD に垂線をひいて、その交点を E とする。このとき、 $BE=4\text{ cm}$ となり、 $\triangle ABE$ の面積は平行四辺形 ABCD の $\frac{1}{6}$ で、 8cm^2 であった。このとき、AD の長さを求めなさい。



解答欄

(1)	$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において $BE=DF$ … 仮定から = … 平行四辺形の()は等しいから = … 平行な2直線に1つの直線が交わるとき()は等しいから ()がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$ 合同な図形の対応する辺は等しいから $AE=CF$ である。
(2)	AD = cm

解答

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において

$BE=DF$ …仮定から

$$\boxed{AB} = \boxed{CD} \quad \cdots \text{平行四辺形の(対辺)は等しいから}$$

$$\boxed{\angle ABE} = \boxed{\angle CDF} \quad \cdots \text{平行な2直線に1つの直線が交わるとき(錯角)は等しいから}$$

(2辺とその間の角)がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$AE=CF$ である。

(2) $AD=4\sqrt{5}$ cm

解説

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において

$BE=DF$ …仮定から

$$\boxed{AB} = \boxed{CD} \quad \cdots \text{平行四辺形の(対辺)は等しいから}$$

$$\boxed{\angle ABE} = \boxed{\angle CDF} \quad \cdots \text{平行な2直線に1つの直線が交わるとき(錯角)は等しいから}$$

(2辺とその間の角)がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$AE=CF$ である。

(2)

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \square ABCD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

$$\triangle AED = \triangle ABD - \triangle ABE = 24 - 8 = 16$$

よって $BE:ED=8:16=1:2$

$BE=4$ cmより $ED=8$ cm

また $\triangle ABE=8$ より $AE=4$ cm

直角三角形AEDで、三平方の定理より

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = 4^2 + 8^2 = 80$$

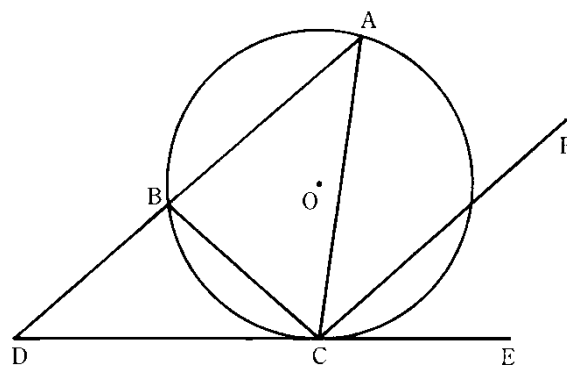
$AD > 0$ から

$$AD = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 6】

図のように、 $\triangle ABC$ は円 O に内接している。点 C における円 O の接線 CE と、直線 AB との交点を D とする。 $\angle ACE$ の二等分線 CF と直線 AB が平行なとき、 $BD=BC$ であることを証明しなさい。

(石川県 2002 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$AD \parallel FC$ より

$$\angle BDC = \angle FCE \cdots ①$$

$$\angle BAC = \angle FCA \cdots ②$$

$$\text{仮定より } \angle FCA = \angle FCE \cdots ③$$

①, ②, ③より

$$\angle BDC = \angle BAC \cdots ④$$

接線と弦のつくる角だから

$$\angle BCD = \angle BAC \cdots ⑤$$

④, ⑤より

$$\angle BDC = \angle BCD$$

よって $BD=BC$

解説

$$AD \parallel FC \text{ より } \angle BDC = \angle FCE \cdots ① \quad \angle BAC = \angle FCA \cdots ② \quad \text{仮定より } \angle FCA = \angle FCE \cdots ③$$

$$\text{①, ②, ③より } \angle BDC = \angle BAC \cdots ④$$

$$\text{接線と弦のつくる角だから } \angle BCD = \angle BAC \cdots ⑤$$

$$\text{④, ⑤より } \angle BDC = \angle BCD$$

よって $BD=BC$

【問 7】

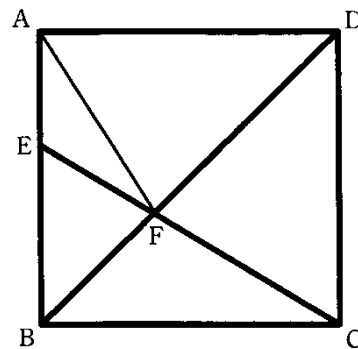
図で、正方形 $ABCD$ の辺 AB 上に点 E をとり、対角線 BD と CE との交点を F とする。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(岐阜県 2002 年度)

(1) $AF=CF$ であることを証明しなさい。

(2) $AE:EB=2:3$ であるとき、 $EF:AF$ を求めなさい。



解答欄

	証明
(1)	
(2)	:

解答

(1)

証明

$\triangle ADF$ と $\triangle CDF$ で

四角形 $ABCD$ は正方形だから

$$DA=DC\cdots\textcircled{1}$$

共通な辺だから

$$DF=DF\cdots\textcircled{2}$$

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ は直角二等辺三角形だから

$$\angle ADF=\angle CDF\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ADF\equiv\triangle CDF$$

対応する辺だから

$$AF=CF$$

(2) 3:5

解説

(1)

$\triangle ADF$ と $\triangle CDF$ で四角形 $ABCD$ は正方形だから

$$DA=DC\cdots\textcircled{1}$$

共通な辺だから

$$DF=DF\cdots\textcircled{2}$$

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ は直角二等辺三角形だから

$$\angle ADF=\angle CDF\cdots\textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ADF\equiv\triangle CDF$$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$$AF=CF$$

(2)

$\triangle EBF\sim\triangle CDF$ より

$$EF:CF=EB:CD=3:(2+3)=3:5$$

ここで(1)より

$$AF=CF \text{ だから}$$

$$EF:AF=3:5$$

【問 8】

図 I において A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L は円 O の周を 12 等分する点でありこの順に左回りに並んでいる。円 O の半径を a cm として、次の問いに答えなさい。答えが無理数になる場合は、無理数のままでよい。

(大阪府 2002 年度 一般)

図 I

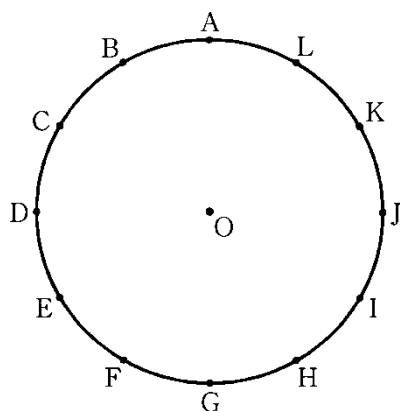
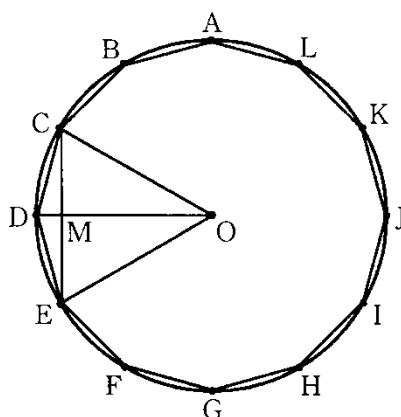


図 II



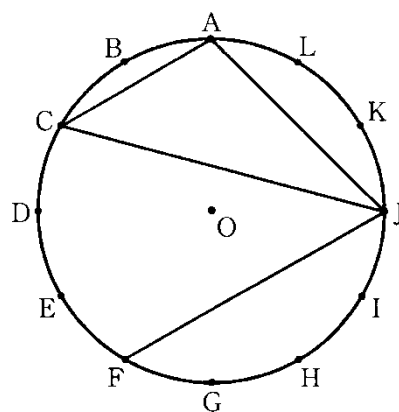
- (1) 図 II は、図 I に円 O の周上の 12 点を頂点とする正十二角形と四つの線分 OC, OD, OE, CE をかき加えたものである。線分 OD と線分 CE との交点を M とする。

- ① $\triangle OCE$ の内角 $\angle COE$ の大きさを求めなさい。
- ② 線分 CM の長さを a を用いて表しなさい。
- ③ 図 II 中の正十二角形の面積を a を用いて表しなさい。

- (2) 図 III は、図 I に四つの線分 AC, AJ, CJ, FJ をかき加えたものである。

- ① $CA \parallel FJ$ であることを証明しなさい。
- ② $a=2$ のとき、 $\triangle ACJ$ の面積を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図 III



解答欄

(1)	①	度
	②	cm
	③	cm ²
(2)	①	証明
	②	求め方 cm ²

解答

(1)

① 60 度

② $\frac{1}{2}a$ cm

③ $3a^2$ cm²

(2)

①

$\widehat{AJ}$, $\widehat{CF}$ の長さはともに円Oの周の長さの $\frac{1}{4}$ 倍であるから

$\widehat{AJ} = \widehat{CF}$ の

一つの円で等しい弧に対する円周角は等しいから

$\angle ACJ = \angle FJC$

錯角が等しいから

$CA \parallel FJ$

②

求め方

Oを通り二つの線分CA, FJに垂直な直線と線分CA, FJとの交点をそれぞれPQとする。

$OA = OC = 2$ cm, $\angle AOC = 60^\circ$ だから $AC = 2$ cm, $OP = \sqrt{3}$ cm

$OF = OJ = 2$ cm, $\angle FOJ = 120^\circ$ だから $OQ = 1$ cm

よって $\triangle ACJ = \frac{1}{2} \times AC \times (OP + OQ) = 1 + \sqrt{3}$ cm²

答 $1 + \sqrt{3}$ cm²

解説

(1)

①

おうぎ形の中心角は弧の長さに比例するから $\angle COE = 360 \times \frac{2}{12} = 60$ 度

②

$\triangle OCE$ は, $OC = OE$ で①より正三角形である。

また直線ODは, 頂角を2等分しているから $CM = ME$, $CE \perp OD$ である。

よって $CM = \frac{1}{2} CE = \frac{1}{2}a$ cm

③

$\triangle CDO$ は, ODを底辺とみると高さはCMになる。

$\triangle CDO = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$

正十二角形の面積は

$\triangle CDO$ の12倍だから $\frac{1}{4}a^2 \times 12 = 3a^2$ cm²

(2)

①

$\widehat{AJ}$, $\widehat{CF}$ の長さはともに円Oの周の長さの $\frac{1}{4}$ 倍であるから $\widehat{AJ} = \widehat{CF}$

一つの円で等しい弧に対する円周角は等しいから

$\angle ACJ = \angle FJC$ 錯角が等しいから $CA \parallel FJ$

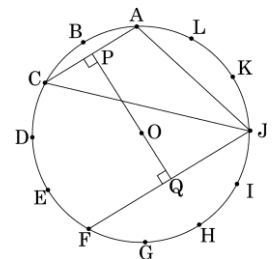
②

Oを通り二つの線分CA, FJに垂直な直線と線分CA, FJとの交点をそれぞれP, Qとする。

$OA = OC = 2$ cm $\angle AOC = 60^\circ$ だから $AC = 2$ cm, $OP = \sqrt{3}$ cm

$OF = OJ = 2$ cm, $\angle FOJ = 120^\circ$ だから $OQ = 1$ cm

よって $\triangle ACJ = \frac{1}{2} \times AC \times (OP + OQ) = \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{3} + 1) = 1 + \sqrt{3}$ cm²



【問 9】

半径 2 cm の円 O と半径 1 cm の円 P が点 A で内接している。
 下の図1～図3は、その2円の共通接線 BC 上に点 D を $AD=2$ cm となるようにとり、 D を通り2円と交わる直線 ℓ をひいたものである。

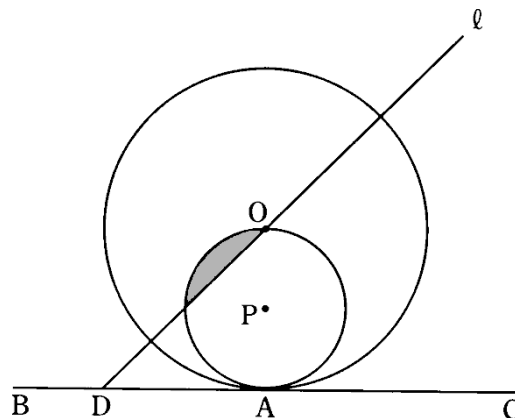
次の問1～問3に答えなさい。

(和歌山県 2002 年度)

問1. 図1のように、直線 ℓ が円 O の中心を通るとき、 の部分の面積を求めなさい。

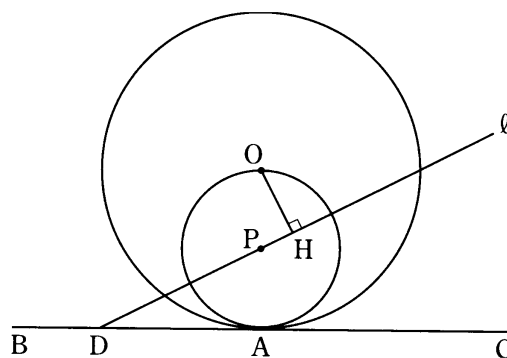
ただし、円周率は π とする。

図1



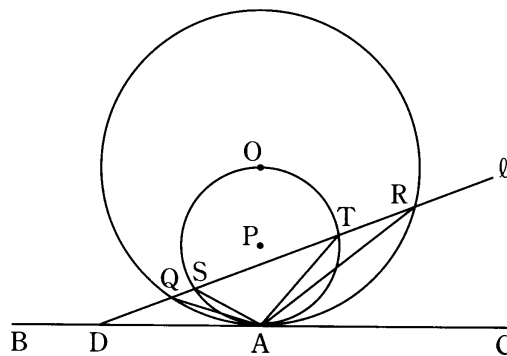
問2. 図2のように、直線 ℓ が円 P の中心を通るとき、円 O の中心から直線 ℓ に垂線 OH をひく。このとき、線分 OH の長さを求めなさい。

図2



問3. 図3のように、直線 ℓ と円 O との交点を Q, R とし、直線 ℓ と円 P との交点を S, T とする。このとき、 $\angle QAT = \angle RAS$ が成り立つことを証明しなさい。

図3



解答欄

問1	cm ²
問2	cm
問3	証明

解答

問1 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\text{cm}^2$

問2 $\frac{2\sqrt{5}}{5}\text{cm}$

問3

証明

接線と弦がつくる角より

$$\angle \text{BAQ} = \angle \text{ARQ} \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle \text{CAT} = \angle \text{AST} \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\angle \text{BAQ} + \angle \text{QAT} + \angle \text{CAT} = 180^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$$\angle \text{ARQ} + \angle \text{RAS} + \angle \text{AST} = 180^\circ \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④より

$$\angle \text{QAT} = \angle \text{RAS}$$

解説

問1

点Oと点Aを結ぶ。

直線 ℓ と円Pの交点のうちOでないものをEとすると

$$\text{OA} = \text{AD} = 2\text{ cm}$$

$$\angle \text{OAD} = 90^\circ \text{ より}$$

$\triangle \text{ADO}$ は直角二等辺三角形だから

$\triangle \text{PEO}$ は $\text{OP} = \text{PE} = 1\text{ cm}$, $\angle \text{OPE} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となる。

よって求める部分の面積は

$$\text{おうぎ形PEO} - \triangle \text{PEO} = \pi \times 1^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\text{cm}^2$$

問2

$$\triangle \text{PDA} \text{ において「三平方の定理」を用いると } \text{PD} = \sqrt{5}\text{ cm}$$

$\triangle \text{PDA} \sim \triangle \text{POH}$ なので

$$\text{DA} : \text{OH} = \text{PD} : \text{PO} = \sqrt{5} : 1$$

$$\text{DA} = 2\text{cm} \text{ より}$$

$$\text{OH} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\text{cm}$$

問3

接線と弦がつくる角より

$$\angle \text{BAQ} = \angle \text{ARQ} \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle \text{CAT} = \angle \text{AST} \cdots \textcircled{2}$$

また $\angle \text{BAC} = 180^\circ$ なので

$$\angle \text{BAQ} + \angle \text{QAT} + \angle \text{CAT} = 180^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle \text{RAS}$ の内角について考えてみると

$$\angle \text{ARQ} + \angle \text{RAS} + \angle \text{AST} = 180^\circ \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④より

$$\angle \text{QAT} = \angle \text{RAS}$$

【問 10】

図 I は, $OA=OB=CA=CB=\sqrt{3}$ cm, $AB=OC=2$ cm の四面体 $OABC$ である。図 II は, その展開図である。
このとき, 次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2002 年度)

問1. 図 II の展開図の点 E は, 図 I の四面体 $OABC$ のどの頂点と重なっていたか, 記号で答えなさい。

図 I

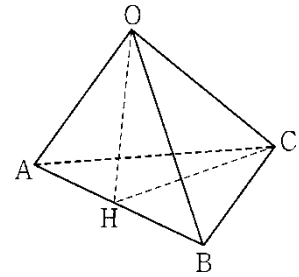
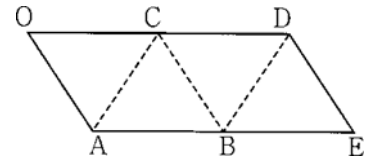


図 II



問2. 図 I の四面体で, 辺 AB の中点を H とするとき, $\angle OHC=90^\circ$ であることを証明したい。下の に必要なことを述べ, にあてはまる数を書き入れて, 証明を完成させなさい。

証明

$\triangle OAH$ と $\triangle OBH$ で,



$\triangle OAH \equiv \triangle OBH$

したがって, $\angle OHA = \angle OHB = 90^\circ$

よって, $OH = \text{ア}$ cmとなる。

同じようにして, $\triangle CAH \equiv \triangle CBH$ なので, $CH = \text{ア}$ cmとなる。

ここで, $\triangle OCH$ について考えると,

$OC^2 = OH^2 + CH^2$ が成り立つので,

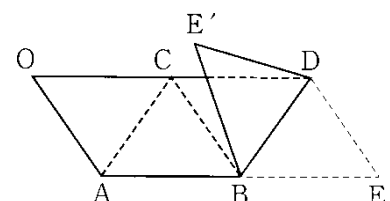
$\angle OHC = 90^\circ$ である。

問3. 図 I の $\triangle OHC$ に内接する円の半径を求めなさい。

問4. 図 II の展開図で, $\triangle BDE$ を, 図 III のように線分 BD を折り目として

折り返したとき, 点 E が移動した点を E' とする。このとき, 点 C と E' を結んでできる線分 CE' の長さを求めなさい。

図 III



解答欄

問1		
問2	証明 $\triangle OAH$と$\triangle OBH$で, $\triangle OAH \equiv \triangle OBH$	
	ア	cm
問3		cm
問4		cm

解答

問1 A

問2

証明

$\triangle OAH$ と $\triangle OBH$ で

$OA=OB$ …①

$AH=BH$ …②

$OH=OH$ …③

①, ②, ③から

3辺がそれぞれ等しいので

$\triangle OAH \equiv \triangle OBH$

ア $\sqrt{2}$ cm

問3 $\sqrt{2} - 1$ cm

問4 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

解説

問1

辺ABと辺EBが重なるので点Eは頂点Aと重なっていた。

問2

$\triangle OAH$ と $\triangle OBH$ で

$OA=OB$ …①

$AH=BH$ …②

$OH=OH$ …③

①, ②, ③から

3辺がそれぞれ等しいので

$\triangle OAH \equiv \triangle OBH$

したがって $\angle OHA = \angle OHB = 90^\circ$

$\triangle OAH$ に三平方の定理を用いると

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

よって ア $= \sqrt{2}$

問3

内接円の半径を r cmとおくと右図において

$$HP = HQ = r \text{ cm} \quad OP = CQ = \sqrt{2} - r \text{ cm}$$

円外の1点からその円にひいた2本の接線の長さは等しいから

$$OR = OP, \quad CR = CQ$$

$$\text{よって } OC = 2(\sqrt{2} - r) \text{ cm}$$

$$2(\sqrt{2} - r) = 2 \text{ より}$$

$$r = \sqrt{2} - 1 \text{ cm}$$

問4

四面体OABCの1つの面の面積は $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ cm}^2$ だから

次の図のように点F, Gをとり $CF = E'G = h$ cmとおくと

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times h = \sqrt{2} \text{ より } h = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

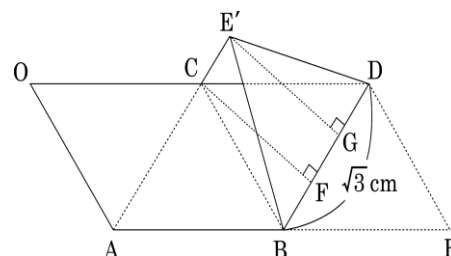
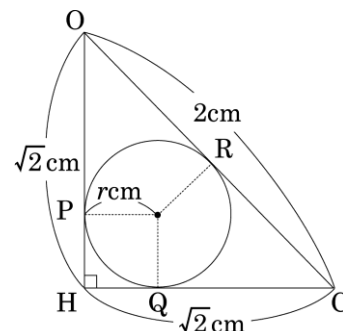
$\triangle CBF$ に三平方の定理を用いて

$$BF = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$DG = BF = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$CE' \parallel BD$ だから

$$CE' = FG = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$



【問 11】

図のように、長方形 $ABCD$ があり、対角線 BD の中点を E とする。辺 AD 上に、2点 A, D と異なる点 F をとり、2点 E, F を通る直線と辺 BC との交点を G とする。

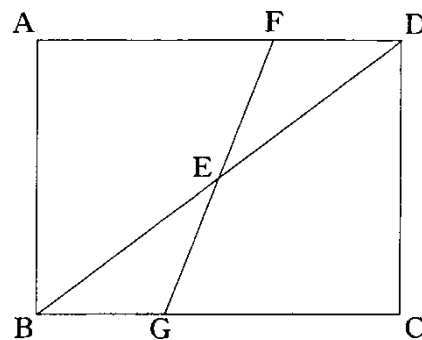
このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(香川県 2002 年度)

(1) $BG = DF$ であることを証明せよ。

(2) 点 G を通り、対角線 BD と平行な直線をひき、辺 CD との交点を H とする。

点 F と点 H を結ぶとき、 $FH + GH = BD$ であることを証明せよ。



解答欄

(1)	証明
(2)	証明

解答

(1)

証明

$\triangle BEG$ と $\triangle DEF$ において

仮定より $BE = DE \cdots ①$

$AD \parallel BC$ より錯角は等しいから $\angle EBG = \angle EDF \cdots ②$

対頂角は等しいから $\angle BEG = \angle DEF \cdots ③$

①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BEG \equiv \triangle DEF$

よって $BG = DF$

(2)

証明

点 H を通り辺 BC と平行な直線をひき対角線 BD との交点を I とする。

四角形 $BGHI$ において

仮定より $BI \parallel GH$ で, $IH \parallel BG$ だから四角形 $BGHI$ は平行四辺形

よって $HI = BG$, $BI = GH \cdots ①$

$\triangle FHD$ と $\triangle IDH$ において DH は共通 $\cdots ②$

(1)より $DF = BG$ で $HI = BG$ だから

$DF = HI \cdots ③$

$IH \parallel BC$ より同位角は等しいから

$\angle IHD = \angle BCD$

四角形 $ABCD$ は長方形なので $\angle FDH = \angle BCD$ だから

$\angle FDH = \angle IHD \cdots ④$

②, ③, ④より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle FHD \equiv \triangle IDH$

よって $FH = ID \cdots ⑤$

したがって①, ⑤より

$FH + GH = ID + BI = BD$

解説

(1)

$\triangle BEG$ と $\triangle DEF$ において

仮定より $BE = DE \cdots ①$

$AD \parallel BC$ より錯角は等しいから $\angle EBG = \angle EDF \cdots ②$

対頂角は等しいから $\angle BEG = \angle DEF \cdots ③$

①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BEG \equiv \triangle DEF$

よって $BG = DF$

(2)

点 H を通り, 辺 BC と平行な直線をひき対角線 BD との交点を I とする。

四角形 $BGHI$ において仮定より $BI \parallel GH$ で, $IH \parallel BG$ だから

四角形 $BGHI$ は平行四辺形

よって $HI = BG$, $BI = GH \cdots ①$

$\triangle FHD$ と $\triangle IDH$ において DH は共通 $\cdots ②$

(1)より $DF = BG$ で $HI = BG$ だから $DF = HI \cdots ③$

$IH \parallel BC$ より同位角は等しいから $\angle IHD = \angle BCD$

四角形 $ABCD$ は長方形なので $\angle FDH = \angle BCD$ だから $\angle FDH = \angle IHD \cdots ④$

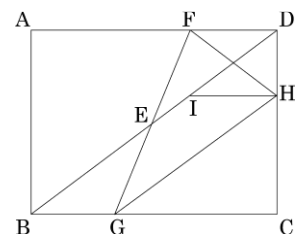
②, ③, ④より2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle FHD \equiv \triangle IDH$

よって $FH = ID \cdots ⑤$

したがって①, ⑤より

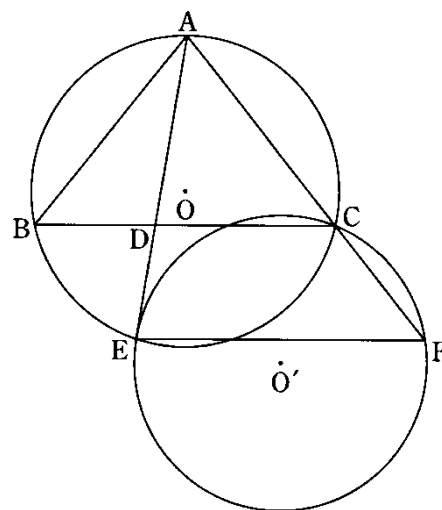
$FH + GH = ID + BI = BD$



【問 12】

図のように、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC が、円 O に内接している。
 辺 BC 上に2点 B, C とは異なる点 D をとり、 AD の延長と円 O との交点
 を E とする。また、点 C を通り、点 E で直線 AE に接する円を O' とし、
 AC の延長と円 O' との交点を F とする。このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2002 年度)



(1) $BC \parallel EF$ であることを証明せよ。

(2) $AB=AC=4\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$, $BD=2\text{ cm}$ のとき、線分 EF の長さを求めよ。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$AB=AC$ だから

$$\angle ABC = \angle BCA \cdots \textcircled{1}$$

CとEを結ぶと直線AEは点Eで円O' に接するから

$$\angle AEC = \angle EFC \cdots \textcircled{2}$$

また $\angle ABC$ と $\angle AEC$ は $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle ABC = \angle AEC \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\angle BCA = \angle EFC$$

同位角が等しいから

$$BC \parallel EF$$

(2) 4.8 cm

解説

(1)

証明

$AB=AC$ だから

$$\angle ABC = \angle BCA \cdots \textcircled{1}$$

CとEを結ぶと直線AEは点Eで円O' に接するから

$$\angle AEC = \angle EFC \cdots \textcircled{2}$$

また $\angle ABC$ と $\angle AEC$ は、 $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle ABC = \angle AEC \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\angle BCA = \angle EFC$$

同位角が等しいから

$$BC \parallel EF$$

(2)

右の図のように点Aから辺BCに垂線AGをひく。

$$\text{三平方の定理より } AG = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$\text{また } DG = \frac{1}{2} \text{ だから } AD = \sqrt{10}$$

$\triangle ABD \sim \triangle CED$ だから

$$AD:CD = BD:ED$$

$$\sqrt{10}:3 = 2:ED$$

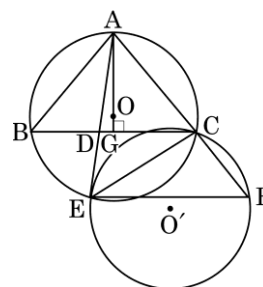
$$ED = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

$\triangle ADC \sim \triangle AEF$ より

$$AC:AE = DC:EF$$

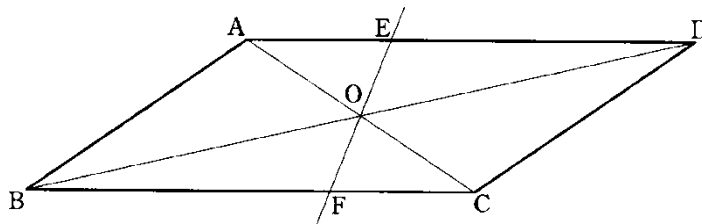
$$\sqrt{10}:(\sqrt{10} + \frac{3}{5}\sqrt{10}) = 3:EF$$

$$EF = \frac{24}{5} \text{ または } 4.8\text{cm}$$



【問 13】

図は、 $\square ABCD$ の2つの対角線 AC , BD の交点を O とし、点 O を通る直線が2辺 AD , BC と交わる点をそれぞれ E , F としたものである。このとき、次の1～3の問いに答えなさい。



(鹿児島県 2002 年度)

1. $\angle OAE$ と大きさの等しい角をあげよ。
2. $EO=FO$ であることを証明せよ。
3. $AC < BD$, $AB=5\text{ cm}$, $AD=8\text{ cm}$ で、 $\square ABCD$ の面積を 24 cm^2 とする。対角線 AC を直径とする円をかき、この円と辺 AD との交点のうち、 A と異なる点を P とし、さらに点 C におけるこの円の接線 ℓ をひく。
このとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。
 - (1) 2点 P , C を結んだ線分 PC の長さは何 cm か。
 - (2) 接線 ℓ と辺 AD との交点を Q とする。このとき、 $\triangle OCD$ と $\triangle QCD$ が重なっている部分の面積は何 cm^2 か。

解答欄

1		
2	証明	
3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

1 $\angle OCF$

2

証明

$\triangle OAE$ と $\triangle OCF$ において

平行四辺形の対角線は中点で交わるから

$OA=OC$ …①

対頂角は等しいから

$\angle AOE=\angle COF$ …②

平行線の錯角は等しいから

$\angle OAE=\angle OCF$ …③

①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAE \equiv \triangle OCF$

したがって

$EO=FO$

3

(1) 3 cm

(2) $\frac{28}{13}$ cm²

解説

1

平行線の錯角は等しいから $\angle OAE=\angle OCF$

2

$\triangle OAE$ と $\triangle OCF$ において平行四辺形の対角線は中点で交わるから

$OA=OC$ …①

対頂角は等しいから

$\angle AOE=\angle COF$ …②

平行線の錯角は等しいから

$\angle OAE=\angle OCF$ …③

①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAE \equiv \triangle OCF$

したがって $EO=FO$

3

(1)

AC が直径より $\angle APC=90^\circ$ だから

$\square ABCD=BC \times PC$ $24=8 \times PC$

よって $PC=3$ cm

(2)

$PD=\sqrt{CD^2-PC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

点 P は AD の中点となるので

$\triangle APC \equiv \triangle DPC$ から, $AC=DC=5$

また $\triangle ACP \sim \triangle AQC$ より

$AP:AC=AC:AQ$

$4:5=5:AQ$

よって $AQ=\frac{25}{4}$ cm…①

$\triangle QHD \sim \triangle CHB$ から

相似比は①より $QD:BC=(8-\frac{25}{4}):8=7:32$

よって求める面積は $\triangle CQD \times \frac{32}{7+32}=\frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times 3 \times \frac{32}{39}=\frac{28}{13}$ cm²

