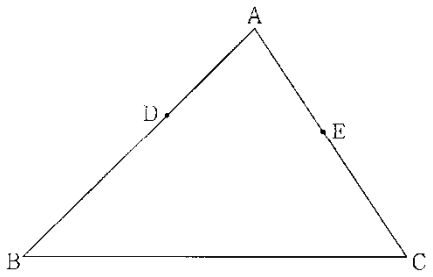
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2012 年度出題】

【問 1】

図のように, △ABC の辺 AB 上に点 D, 辺 AC 上に点 E があります。次の問いに答えなさい。



（北海道　2012 年度）

問1　AD:DB＝AE:EC＝1:2, BC＝12 cm のとき, 線分 DE の長さを求めなさい。

問2　線分 DB, 辺 BC, 線分 CE, 線分 DE 上にそれぞれ中点 F, G, H, I をとります。このとき, 四角形 FGHI が平行四辺形であることを証明しなさい。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕

解答
問1　4cm
問2
四角形 DBCE の対角線 DC をひく。
△BCD で, 2 点 F, G はそれぞれ線分 DB, 辺 BC の中点であるから
中点連結定理より
FG // DC
$FG=\frac{1}{2}DC$…①
同様に, △DCE で
IH // DC
$IH=\frac{1}{2}DC$…②
①, ②より
FG // IH…③
FG＝IH…④
③, ④より
1 組の対辺が平行で長さが等しいので
四角形 FGHI は平行四辺形である。
解説
問1
△ADE と△ABC において
AD:AB＝AE:AC＝1:3
∠DAE＝∠BAC より
2 組の辺の比とその間の角が等しいので
△ADE∽△ABC
よって DE:BC＝1:3　BC＝12 cm より
DE:12＝1:3
3DE＝12
DE＝4 cm

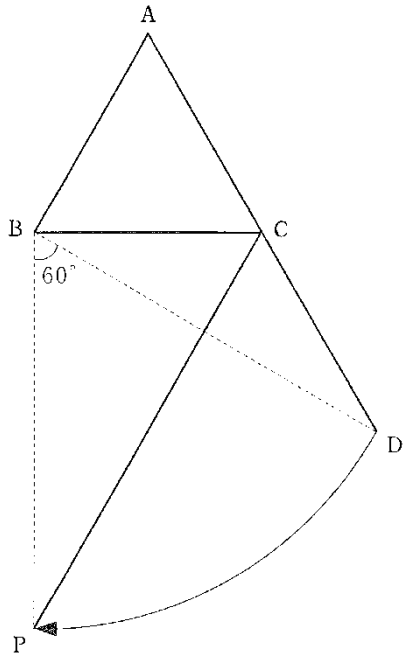
【問 2】

図のように，正三角形 ABC があり，辺 AC の延長上に CD＝AC となる点 D をとる。

また，同じ平面上で，点 B を中心として，D を矢印の方向に 60° 回転させた点を P とする。

このとき，AB // CP であることを証明しなさい。

（福島県　2012 年度）



解答欄

〔証明〕

解答
〔証明〕例 1
△ABD と△CBP において
仮定より
BA＝BC…①
BD＝BP…②
∠ABD＝∠ABC＋∠CBD＝60°＋∠CBD…③
∠CBP＝∠DBP＋∠CBD＝60°＋∠CBD…④
③, ④より∠ABD＝∠CBP…⑤
①, ②, ⑤より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABD≡△CBP
合同な三角形の対応する角は等しいから
∠BAD＝∠BCP…⑥
△ABC は正三角形であるから
∠ABC＝∠BAD…⑦
⑥, ⑦より∠ABC＝∠BCP で
錯角が等しいから
AB // CP
例 2
△BCP と△DCP において
仮定より
BC＝DC…①
△BPD は頂角が 60° の二等辺三角形であるから正三角形となり
BP＝DP…②
CP は共通…③
①, ②, ③より
3 辺がそれぞれ等しいから
△BCP≡△DCP
合同な三角形の対応する角は等しいから
∠PCB＝∠PCD…④
△ABC は正三角形であるから
∠BAC＝60° …⑤
∠ACB＝60° より∠BCD＝120° …⑥
④, ⑥より∠PCD＝60° …⑦
⑤, ⑦より∠BAC＝∠PCD で
同位角が等しいから
AB // CP
解説
△ABD と△CBP において
△ABC は正三角形より
AB＝CB…①
B を中心として D を 60° 回転させた点が P より
BD＝BP…②
∠ABD＝60° ＋∠CBD, ∠CBP＝60° ＋∠CBD より
∠ABD＝∠CBP…③
①, ②, ③より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABD≡△CBP
よって∠BAD＝∠BCP…④
△ABC は正三角形より
∠ABC＝∠BAC＝∠BAD…⑤
④, ⑤より∠BCP∠ABC
よって錯角が等しいので
AB // CP

【問 3】

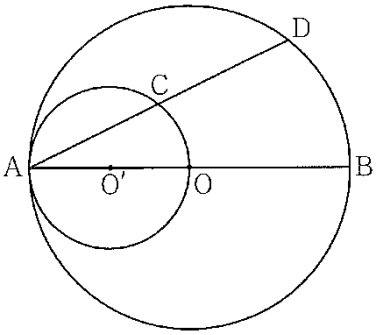
右の図のように，線分 AB を直径とする円 O と，線分 AO を直径とする円 O′ がある。

円 O′ の周上に，A，O とは異なる点 C をとり，直線 AC と円 O の交点のうち，A とは異なる点を D とする。

このとき，C が線分 AD の中点であることを証明したい。

次の太郎さんと花子さんの方法のどちらか一方を選んで証明しなさい。

（群馬県　2012 年度）



太郎の方法

線分 OC，OD をひいて証明する。

花子の方法

線分 OC，BD をひいて証明する。

解答欄

（選んだ方法の □ の中に○を付ける。）

	太郎の方法
	花子の方法

(証明)

よって，C は線分 AD の中点である。

解答
〔太郎の方法〕
△OAC と△ODC において
OC は共通…①
OA, OD は円 O の半径だから
OA＝OD…②
半円の弧に対する円周角は直角だから
∠ACO＝90°
∠DCO＝180°－∠ACO＝90°
したがって, ∠ACO＝∠DCO＝90°…③
①, ②, ③より
直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから
△OAC≡△ODC
対応する辺だから AC＝DC
よって C は線分 AD の中点である。
〔花子の方法〕
半円の弧に対する円周角は直角だから
∠ACO＝90°…①
また∠ADB＝90°…②
①, ②より同位角が等しいから
OC // BD
したがって AC:CD＝AO:OB…③
AO, OB は円 O の半径だから
AO:OB＝1:1…④
③, ④より
AC:CD＝1:1
よって C は線分 AD の中点である。
解説
[太郎の方法]
線分 OC, OD をひく。
△OAC と△ODC において
円周角の定理より
∠OCA＝∠OCD＝90°…①
円 O の半径より
OA＝OD…②
共通なので
OC＝OC…③
①, ②, ③より
直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので
△OAC≡△ODC
よって AC＝DC
したがって C は AD の中点である。
[花子の方法]
線分 OC, BD をひく。
円 O′において円周角の定理より∠ACO＝90°
また円 O において同様に∠ADB＝90°
よって∠ACO＝∠ADB より, 同位角が等しいので
CO // DB
△ABD において
平行線と線分の比の定理より
AC:CD＝AO:OB＝1:1
よって点 C は AD の中点である。

【問 4】

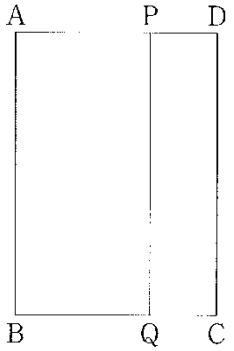
AD＝12 cm で，縦と横の長さの比が $\sqrt{2}$:1 の長方形 ABCD があります。図1のように，辺 AD 上に点 P をとって，点 P を通り辺 AB，DC と平行な直線をかき，辺 BC との交点を Q とします。図2のように，点 C が点 P と重なるように折ったとき，この折り目の線と，線分 AB，PQ，DC との交点をそれぞれ J，K，L とします。

このとき，次の各問に答えなさい。

なお，考えるときに，別紙を点線にそって切り取って利用してもさしつかえありません。切り取ったそれぞれの用紙の辺の比は，$\sqrt{2}$:1 です。

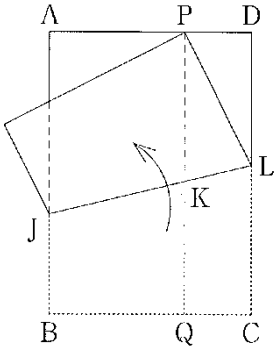
（埼玉県　2012 年度）

図1



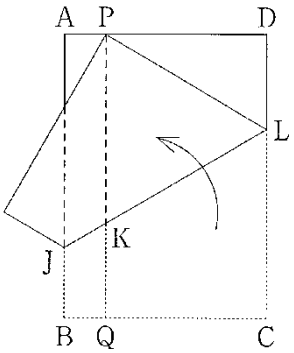
問1　△PKL が二等辺三角形であることを証明しなさい。

図2



問2　図3のように，△PKL が正三角形となるように点 P をとったときの，線分 PD の長さを求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。その際，解答用紙の図に数や記号をかいて，それを用いて説明してもよいものとします。

図3



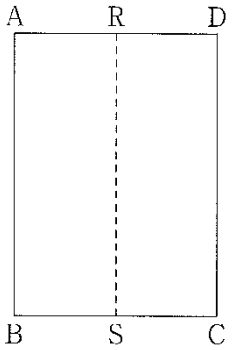
問3　△PKL が正三角形となるときの点 P の位置は，次の①～③の手順で見つけることができます。(ア) , (イ) にあてはまる記号をそれぞれ書きなさい。

① 辺 AB が辺 DC に重なるように折り，図4のようにもとに戻したときの折り目の線を RS とします。

② 点 (ア) を通る線分を折り目として，点 (イ) が線分 RS 上に重なるように折ったとき，点 (イ) の移った点を E とします。

③ さらに，2 点 E，C を通る線分を折り目として折ったとき，この折り目の線と線分 AD の交点が点 P の位置となります。

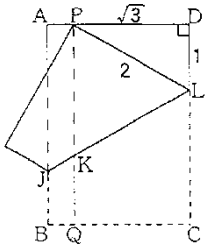
図4



解答欄

問1	〔証明〕	
問2	〔説明〕 答え PD＝　　cm	
問3	ア	
	イ	

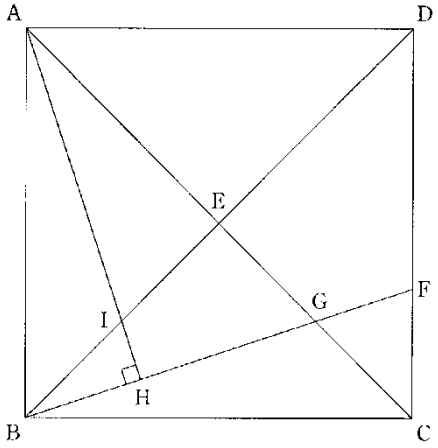
解答
問1
〔証明〕
折っているので
∠CLK＝∠PLK
また PQ // DC で錯角が等しいから
∠CLK＝∠PKL
したがって∠PLK＝∠PKL
よって 2 つの角が等しいので
△PKL は二等辺三角形である。
問2
〔説明〕
△PKL は正三角形で
∠LPK＝60° だから∠DPL＝30° となり
△PLD は，下の図のような辺の比の直角三角形となる。



また折っているから PL＝LC なので
DL:LC＝1:2
DC＝$12\sqrt{2}$ なので
DL＝$\frac{1}{3}$ DC＝$4\sqrt{2}$
よって PD＝DL×$\sqrt{3}$ ＝$4\sqrt{6}$
答え PD＝$4\sqrt{6}$ cm
問3
ア C
イ B
解説
問2
△PKL が正三角形であるとき
その 1 辺の長さを x cm とする。
∠PLK＝∠KLC＝60° より∠PLD＝60°　∠PDL＝90° だから
△PLD は DL:PL:PD＝1:2:$\sqrt{3}$ の直角三角形である。
よって PL＝x cm のとき
LC＝x cm
DL＝$\frac{x}{2}$ cm
PD＝$\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm と表せる。
DC＝$12\sqrt{2}$ cm より
$\frac{x}{2}+x=12\sqrt{2}$
$\frac{3}{2}x=12\sqrt{2}$
$x=8\sqrt{2}$ cm
よって PD＝$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8\sqrt{2}$ ＝$4\sqrt{6}$ cm

【問 5】

図の正方形 ABCD において，2 つの対角線の交点を E とする。辺 CD 上に 2 点 C，D と異なる点 F をとり，線分 BF と線分 AC との交点を G とする。また，点 A から線分 BF に垂線 AH をひき，線分 AH と線分 BD との交点を I とする。



このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（千葉県　2012 年度　前期）

問1　AI＝BG であることを，下の [　] の考えにしたがって証明するとき，(a) と (b) に入る最も適当なものを，選択肢のア～エのうちからそれぞれ一つずつ選び，符号で答えなさい。また，(c) に入る最も適当なことばを書きなさい。

> AI＝BG であることを証明するためには，(a) と (b) が，(c) であることを証明すればよい。

選択肢

ア　△ABI　　イ　△AIE　　ウ　△ABG　　エ　△BGE

問2　問1の [　] の考えにしたがって，AI＝BG であることを証明しなさい。

問3　BH＝2 cm，HG＝3 cm となるとき，正方形 ABCD の面積を求めなさい。

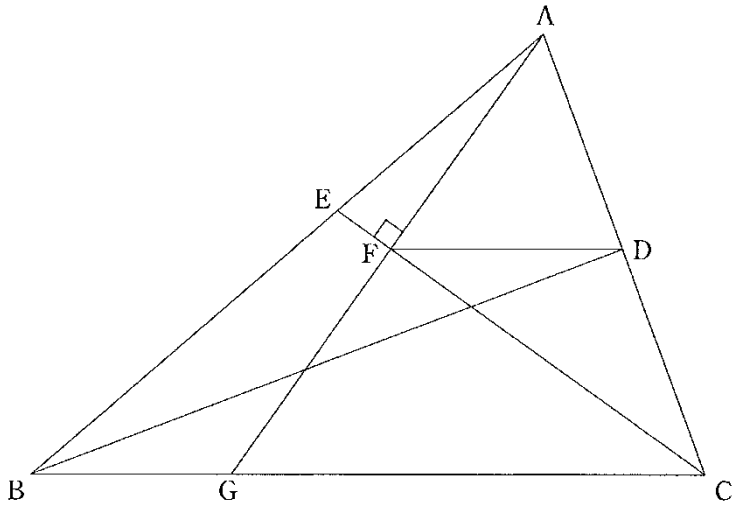
解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2		
問3		cm^2

解答
問1
(a) イ　　(b) エ　　(c) 合同
問2
△AIE と△BGE において
AE＝BE…①
∠AEI＝∠BEG＝90°…②
△AIE と△BIH において
仮定から∠AEI＝∠BHI＝90°
∠AIE＝∠BIH(対頂角)
よって 2 組の角がそれぞれ等しいので残りの角も等しい
∠EAI＝∠EBG…③
①, ②, ③より
一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△AIE≡△BGE
よって AI＝BG
解説
問3
IH＝x cm とする。
△BHI と△AHG は 2 組の角がそれぞれ等しいので相似になるから
BH:AH＝HI:HG　2:(5＋x)＝x:3　$x(5+x)=6$　$x^2+5x-6=0$　$(x+6)(x-1)=0$　$x>0$ より, $x=1$
△BHI において三平方の定理より BI＝$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
BH:AE＝BI:AI　2:AE＝$\sqrt{5}$:5　$\sqrt{5}$ AE＝10　AE＝$2\sqrt{5}$
よって正方形の面積は$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}\times 4=40$ cm^2

【問 6】

図で，△ABC は BA＝BC，∠ABC が 60°より小さい二等辺三角形である。∠ABC の二等分線と辺 AC との交点を D，∠ACB の二等分線と辺 AB との交点を E とする。また，点 A から線分 CE に垂線をひき，線分 CE との交点を F，辺 BC との交点を G とする。



このとき，FD＝$\frac{1}{2}$GC となる。

次の［　　］の中は，FD＝$\frac{1}{2}$GC の証明を途中まで示したものである。

証明

△BAD と△BCD において，

(a)　…①

(b)　…②

(c)　…③

①，②，③より (d) が，それぞれ等しいから，

△BAD≡△BCD

したがって，(e)　…④

△CAF と△CGF において，

(続く)

次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県　2012 年度　後期）

問1　証明の［　　］の中は，二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を 2 等分することの証明である。

(a) ～ (c)，(e) に入る最も適当なものを，次のア～カのうちからそれぞれ一つずつ選び，符号で答えなさい。また，(d) に入る最も適当なことばを書きなさい。

ア　BA＝BC	イ　∠BDA＝∠BDC＝90°	ウ　∠BAD＝∠BCD
エ　AD＝CD	オ　BD＝BD (共通)	カ　∠ABD＝∠CBD

問2　［　　］の中の証明の続きを書き，証明を完成させなさい。

ただし，［　　］の中の①～④に示されている関係を使う場合，番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(a)</td><td></td><td>(b)</td><td></td><td>(c)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(d)</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>(e)</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="7">△CAF と△CGF において,</td></tr>
</table>

解答
問1
(a) ア　　(b) オ　　(c) カ

ただし，次のものも正解とする。

(a)	ア	(b)	ウ	(c)	カ
(d)	1 辺とその両端の角				

(a)	イ	(b)	オ	(c)	カ
(d)	1 辺とその両端の角				

(a)	ア	(b)	イ	(c)	ウ
(d)	直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角				

(a)	ア	(b)	イ	(c)	カ
(d)	直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角				

(a)	ア	(b)	イ	(c)	オ
(d)	直角三角形の斜辺と他の 1 辺				

(d) 2 辺とその間の角
(e) エ
問2
△CAF と△CGF において
CF＝CF (共通)…⑤
∠ACF＝∠GCF…⑥
∠AFC＝∠GFC＝90° …⑦
⑤⑥⑦より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△CAF≡△CGF
したがって AF＝GF…⑧
△AGC において
④, ⑧より中点連結定理から

$\mathrm{FD}=\frac{1}{2}\mathrm{GC}$ となる

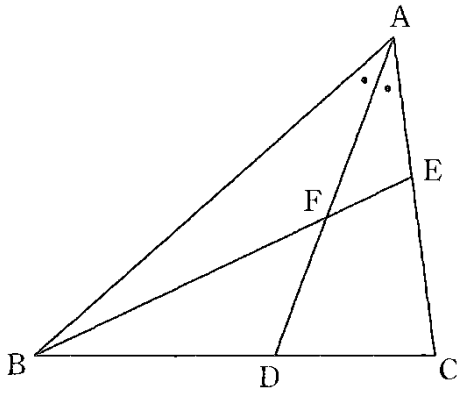
解説
問2
△CAF と△CGF において
共通なので CF＝CF…⑤
仮定より∠ACF＝∠GCF…⑥
仮定より∠AFC＝∠GFC＝90° …⑦
⑤, ⑥, ⑦より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△CAF≡△GFC
したがって AF＝GF
△AGC において
AF＝FG, AD＝DC より

中点連結定理から $\mathrm{FD}=\frac{1}{2}\mathrm{GC}$

【問 7】

図の△ABC で，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D とし，辺 AC 上に点 E をとり，線分 AD と BE との交点を F とする。AB＝12 cm，BC＝10 cm，AC＝8 cm である。

次の問1，問2に答えなさい。



（岐阜県　2012 年度）

問1　CD の長さを求めなさい。

問2　CE＝5 cm のとき，

(1)　∠CAD＝∠CBE を証明しなさい。

(2) EF:AF を求めなさい。

(3) EF の長さを求めなさい。

解答欄

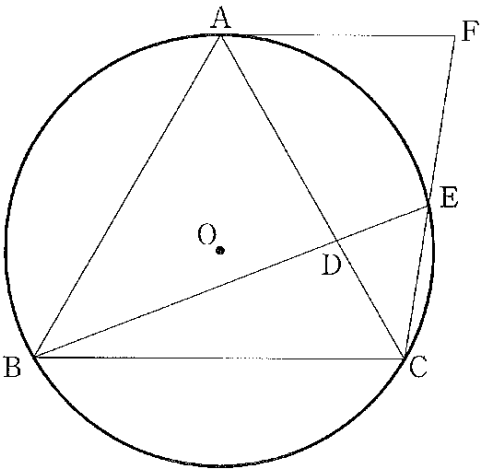
問1		cm
問2	(1)	〔証明〕
	(2)	:
	(3)	cm

解答
問1　4cm
問2
(1)
〔証明〕
△CAD と△CBE で
仮定から
CA＝8 cm, CB＝10 cm だから
CA:CB＝4:5…①
問1と仮定から
CD＝4 cm, CE＝5 cm だから
CD:CE＝4:5…②
①, ②から
CA:CB＝CD:CE…③
共通な角だから
∠ACD＝∠BCE…④
③, ④から
2 組の辺の比が等しくそのはさむ角が等しいので
△CAD∽△CBE
対応する角だから
∠CAD＝∠CBE
(2)　1:2
(3)　$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm
解説
問1
B を通り AC に平行な直線と AD の延長線の交点を G とする。
AC // BG より
∠BGA＝∠CAG＝∠BAG
よって BG＝AB＝12 cm
BD:CD＝BG:CA＝12:8＝3:2
よって CD＝$10\times\frac{2}{5}$＝4 cm
問2
(2)
△AFE∽△ABD
EF:AF＝DB:AB＝6:12＝1:2
(3)
EF＝x cm とする。
EF:AF＝1:2 より AF＝$2x$ cm
△AFE∽△BFD より
AE:BD＝3:6＝1:2
よって FD＝$2x$ cm, BF＝$4x$ cm とおける。
△ABD∽△AFE より
BD:FE＝AD:AE
6:x＝$4x$:3
$4x^2$＝18
x^2＝$\frac{9}{2}$
x＞0 より
x＝$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

【問 8】

3 点 A, B, C は円 O の円周上にあり, △ABC は正三角形である。AC 上に点 D をとり, BD の延長と円 O との交点を E とする。点 A を通り BC に平行な直線と CE の延長との交点を F とする。

このとき, 次の問1, 問2に答えなさい。



（静岡県　2012 年度）

問1　AD＝AF であることを証明しなさい。

問2　2 点 D, F を直線で結ぶ。∠DFE＝28° で, 円 O の半径が 5 cm のとき, $\overset{\frown}{AE}$の長さを求めなさい。ただし, 円周率はπとする。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm

解答

問1

〔証明〕

省略

問2 $\frac{16}{9}\pi$ cm

解説

問2

△ABD≡△ACF より

AD＝AF

∠DAF＝∠CAF＝∠BAC＝60°より

△ADF は正三角形である。

よって∠AFD＝60°

△ACF において

∠ACF＝180°－(60°＋60°＋28°)＝32°

円周角の定理より∠AOE＝2∠ACE＝2×32°＝64°

よって$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$＝$2\pi\times5\times\frac{64}{360}=\frac{16}{9}\pi$ cm

【問 9】

△ABC は AB＝AC の直角二等辺三角形である。D は辺 BC 上の点で，BA＝BD であり，E は辺 AC 上の点で，ED⊥BC である。

このとき，線分 BE は∠ABC の二等分線であることを次のように証明したい。

［Ⅰ］，［Ⅱ］，［Ⅲ］にあてはまる最も適当なものを，［Ⅰ］には下の A 群のアからウまで，［Ⅱ］には B 群のエからカまで，［Ⅲ］には C 群のキからコまでの中からそれぞれ選んで，そのかな符号を書きなさい。

（愛知県 2012 年度 A）

〔証明〕△ABE と△［Ⅰ］で，

［Ⅱ］

①，②，③から，［Ⅲ］ので，

△ABE≡△［Ⅰ］

よって，∠ABE＝∠［Ⅰ］

したがって，線分 BE は∠ABC の二等分線である。

【A 群】

アCBE　　イ　ACB　　ウ　DBE

【B 群】

エBE＝BE……①，∠ABE＝∠DBE……②，∠AEB＝∠DEB……③

オBE＝BE……①，BA＝BD……②，∠BAE＝∠BDE＝90°……③

カBE＝BE……①，BA＝BD……②，AB＝AC……③

【C 群】

キ直角三角形の斜辺と他の 1 辺が，それぞれ等しい

ク 1 辺とその両端の角が，それぞれ等しい

ケ 2 辺とその間の角が，それぞれ等しい

コ 3 辺が，それぞれ等しい

解答欄

Ⅰ（　　），Ⅱ（　　），Ⅲ（　　）

解答

Ⅰ ウ

Ⅱ オ

Ⅲ キ

【問 10】

次のアからエまでのそれぞれの条件にあてはまる四角形 ABCD が，必ず平行四辺形となるものをすべて選んで，そのかな符号を書きなさい。

（愛知県 2012 年度 B）

ア AB // DC，AB＝DC である四角形 ABCD

イ AB // DC，AD＝BC である四角形 ABCD

ウ AB // DC，∠A＝∠C である四角形 ABCD

エ AB // DC，∠A＝∠D である四角形 ABCD

解答欄

解答
ア，ウ

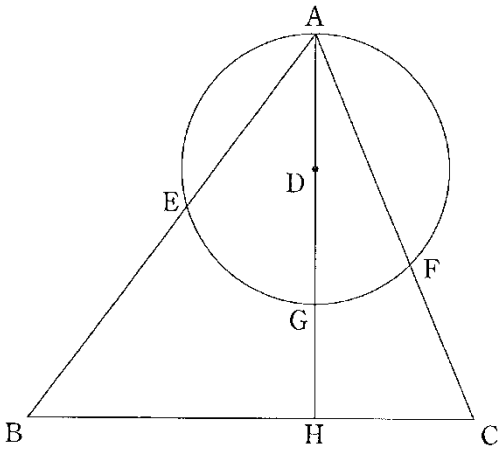
【問 11】

図は，△ABC の内部に点 D をとり，点 A を通る円 D をかいたものである。

円 D が，辺 AB，AC と交わる点を，それぞれ E，F とし，直線 AD が，点 A 以外に円 D と交わる点，辺 BC と交わる点を，それぞれ G，H とする。

AB:AF＝AC:AE が成り立つとき，あとの各問いに答えなさい。

（三重県　2012 年度）



問1　次の ［　　］ は，AH⊥BC であることを，〈1〉，〈2〉の順に証明したものである。

(ア) ，(イ) 及び ［　　］ に，それぞれあてはまる適切なことがらを書きなさい。

〔証明〕

〈1〉　点 E，F をむすび，△AFE をつくる。

△ABC と△AFE において，

仮定から，　　AB:AF＝AC:AE　…①

共通しているから，　　∠BAC＝ (ア)　…②

①，②より，　　(イ)　　ので，△ABC∽△AFE　…③

〈2〉　点 E，G をむすび，△AEG をつくる。

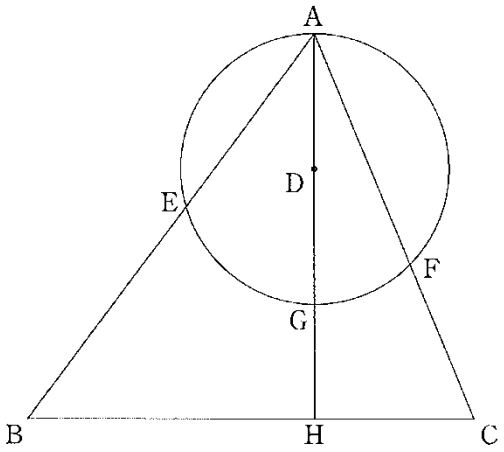
△AHB と△AEG において，

［　　］

したがって，∠AHB＝90° なので，AH⊥BC

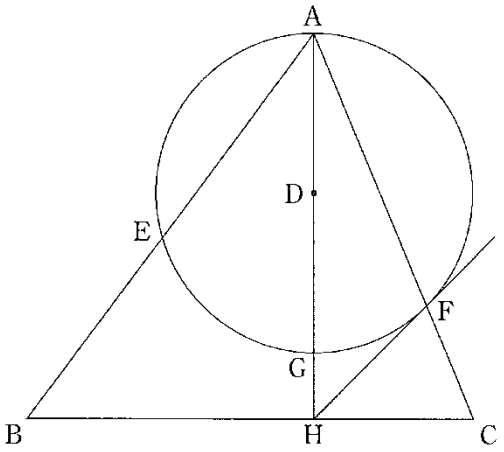
問2 右の図で，円 D に点 F で接する接線を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。

なお，作図に用いた線は消さずに残しておきなさい。



問3 AB＝15 cm，BC＝14 cm，AC＝13 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

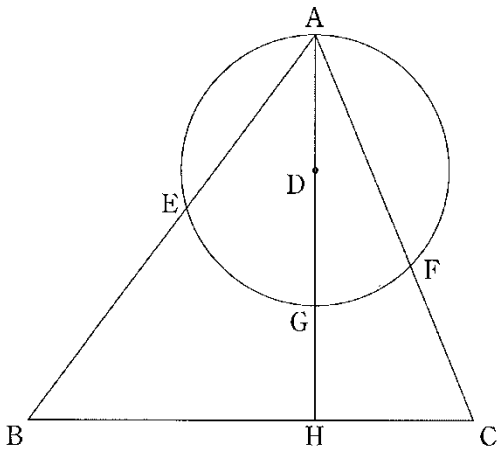
(1) △ABC の面積を求めなさい。



(2) AB：AF＝AC：AE＝m：n のとき，図のように，円 D に点 F で接する接線が点 H を通った。このときの m：n を，最も簡単な整数の比で答えなさい。

解答欄

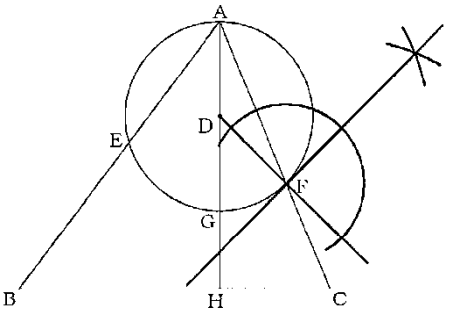
<table>
<tr><td rowspan="4">問1</td><td colspan="3">〔証明〕</td></tr>
<tr><td rowspan="2">〈1〉</td><td>(ア)</td><td></td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td></td></tr>
<tr><td>〈2〉</td><td colspan="2">点 E, G をむすび, △AEG をつくる。
△AHB と△AEG において,

したがって, ∠AHB＝90° なので, AH⊥BC</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="3"> 
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">$m:n=$:</td></tr>
</table>

解答
問1
〔証明〕
〈1〉
(ア)　∠FAE
(イ)
(例 1)
2 組の辺の比と, その間の角がそれぞれ等しい
(例 2)
2 組の辺の比が等しく, その間の角が等しい
〈2〉
点 E, G をむすび△AEG をつくる。
△AHB と△AEG において

共通だから
∠BAH＝∠GAE…④
③より相似な図形では対応する角は等しいから
∠ABH＝∠AFE…⑤
弧 AE に対する円周角は等しいから
∠AFE＝∠AGE…⑥
⑤, ⑥より
∠ABH＝∠AGE…⑦
④, ⑦より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△AHB∽△AEG…⑧
⑧で対応する角は等しいから
∠AHB＝∠AEG…⑨
∠AEG は, 半円の弧 AG に対する円周角なので∠AEG＝90°

したがって, ∠AHB＝90° なので, AH⊥BC
問2



問3
(1)　84cm^2
(2)　$m:n$＝195:119

解説
問3
(1)
CH＝x cm とおく。
三平方の定理より
$AC^2-CH^2=AB^2-BH^2$
$13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$
$169-x^2=225-(196-28x+x^2)$
$28x=140$
$x=5$
$AH=\sqrt{13^2-5^2}=12$ cm
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$ cm^2
(2)
△AGF∽△ACH で
AH:HC:AC＝12:5:13 だから
AF:FG:AG＝12:5:13
△AHF と△FHG において
∠AHF＝∠FHG　∠HAF＝∠DFA＝∠AFH－90°＝∠HFG より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△AHF∽△FHG
よって, AH:FH＝HF:HG＝AF:FG＝12:5
AH＝12 cm より
12:FH＝12:5
FH＝5 cm
5:HG＝12:5
12HG＝25
$HG=\frac{25}{12}$ cm
$AG=12-\frac{25}{12}=\frac{119}{12}$ cm
AG:AF＝13:12
$\frac{119}{12}$:AF＝13:12
13AF＝119
$AF=\frac{119}{13}$ cm
よって $m:n$＝AB:AF＝$15:\frac{119}{13}$＝195:119

【問 12】

右の図1のように，AB＝AC である直角二等辺三角形 ABC と頂点 A を通る直線 ℓ があり，頂点 B から直線 ℓ に垂線 BP を，頂点 C から直線 ℓ に垂線 CQ を引く。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

（鳥取県　2012 年度）

(1) 直線 ℓ と点 B が図2の位置にあるとき，点 P をコンパスと定規を用いて作図しなさい。

なお，作図に用いた線は，消さずに残しておきなさい。

(2) △ABP と△CAQ に着目して，AP＝CQ となることを証明しなさい。

図1

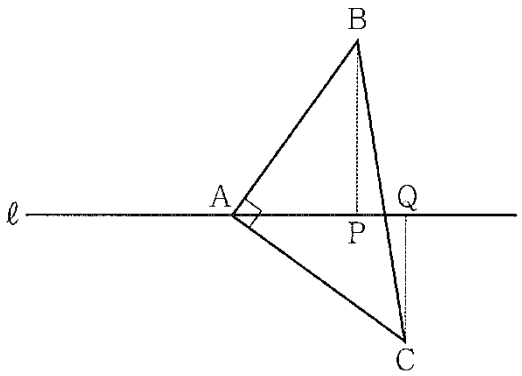
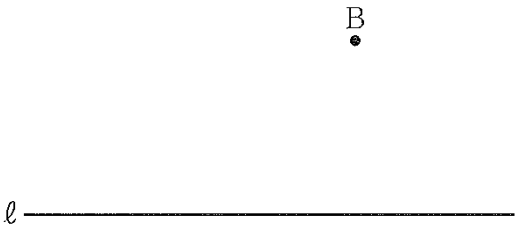
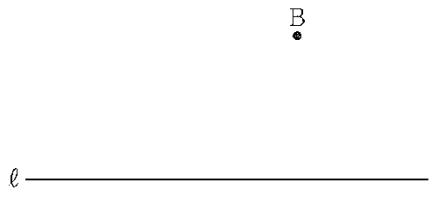


図2



解答欄

(1)

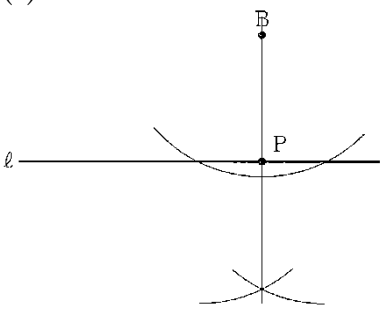


(2)

〔証明〕 △ABP と△CAQ において

よって，AP＝CQ

解答
(1)



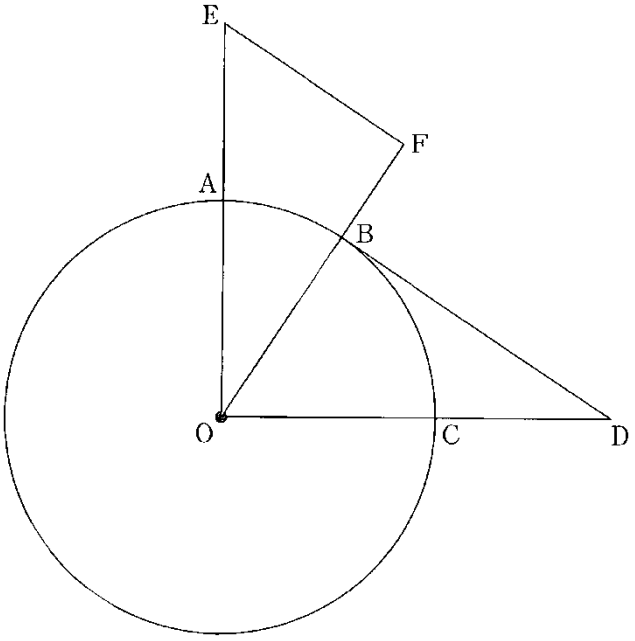
(2)
〔証明〕
△ABP と△CAQ において
条件より
∠APB＝∠CQA＝90° …①
AB＝CA…②
∠BAP＝90° －∠CAQ…③
△CAQ が直角三角形なので
∠ACQ＝90° －∠CAQ…④
③, ④より
∠BAP＝∠ACQ…⑤
①, ②, ⑤から
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので
△ABP≡∠CAQ
よって AP＝CQ

【問 13】

図のように，円 O の円周上に 3 点 A，B，C があり，∠AOC＝90° です。点 B における円 O の接線と線分 OC の延長との交点を D とします。線分 OA の延長上に EO＝OD となるように点 E をとります。点 E から直線 OB に垂線をひき，直線 OB との交点を F とします。

これについて，次の問1・問2に答えなさい。

（広島県　2012 年度）



問1　EF＝OB であることを証明しなさい。

問2　円 O の半径が $3\sqrt{2}$ cm，四角形 AOCB の面積が 11 cm^2 のとき，点 B と直線 AC との距離は何 cm ですか。

解答欄

問1	〔仮定〕 図において，∠AOC＝90°，BD は点 B における円 O の接線，EO＝OD，EF は直線 OB の垂線 〔結論〕 EF＝OB 〔証明〕
問2	cm

解答
問1
△EOF と△ODB において
EO＝OD…①
∠EFO＝90° …②
BD は円 O の接線であるから
∠OBD＝90° …③
∠AOC＝90° であるから
∠EOF＋∠BOD＝90° …④
また③より
∠ODB＋∠BOD＝90° …⑤
④, ⑤より
∠EOF＝∠ODB…⑥
①, ②, ③, ⑥より
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△EOF≡△ODB
したがって EF＝OB

問2 $\frac{2}{3}$ cm

解説
問2
△AOC は OA＝OC＝$3\sqrt{2}$ cm
∠AOC＝90° の直角二等辺三角形だから
AC＝$\sqrt{2}$ OA＝$\sqrt{2}$ ×$3\sqrt{2}$ ＝6 cm

$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9\ \text{cm}^2$

よって△ABC＝11－9＝2 cm^2
点 B と AC との距離は
△ABC において AC を底辺としたときの高さと一致する。
この高さを h とすると

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times h$ より

$\frac{1}{2} \times 6 \times h = 2$

$h = \frac{2}{3}$ cm

【問 14】

AB＝AC＝10 cm の直角二等辺三角形 ABC がある。

図1は，△ABC の外部に点 P を，直線 BC について点 A と同じ側に∠APB＝90° となるようにとり，点 P と辺 BC の中点 M を結び，線分 PM と辺 AB との交点を Q としたものである。

図2は，図1において，△APB と△PBM の面積比が 3:2 となる場合を表している。

図1

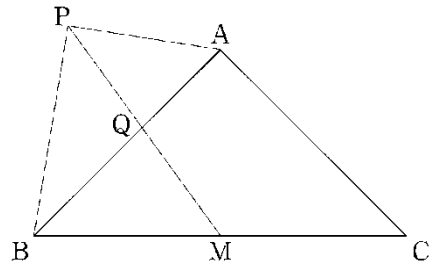
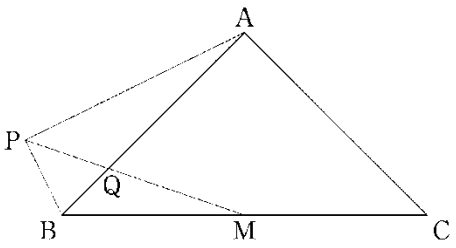


図2



次の問1は指示にしたがって答え，問2，問3は ［　　］ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2012 年度）

問1　図1において，∠APM＝45° であることを，［　　］ の中に証明せよ。

〔証明〕

問2　図1において，線分 AP の長さが 6 cm のとき，PQ:QM＝［　　:　　］ である。

問3　図2において，線分 PM の長さは ［　　cm］ である。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	:
問3	cm

解答
問1
〔証明〕
点 A と点 M を結ぶ。
△ABM と△ACM において
仮定から
AB＝AC…①
BM＝CM…②
また AM は共通…③
①, ②, ③より
3 辺がそれぞれ等しいから
△ABM≡△ACM
よって∠AMB＝90° …④
また仮定から
∠APB＝90° …⑤
④, ⑤より 4 点 A, P, B, M は辺 AB を直径とする円周上にある。
∠APM と∠ABM は$\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$に対する円周角だから
∠APM＝∠ABM＝45°
問2　24:25
問3　$4\sqrt{5}$ cm
解説
問2
△ABP において
三平方の定理より BP＝$\sqrt{10^2-6^2}$ ＝8 cm
△ABC において
AB＝AC, ∠BAC＝90° より AM＝BM＝CM＝$\dfrac{10}{\sqrt{2}}$＝$5\sqrt{2}$ cm
△APQ∽△MBQ だから
QA:QM＝PA:BM＝6: $5\sqrt{2}$
QM＝$\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$ QA
△AQM∽△PQB だから
QA:QP＝AM:PB＝$5\sqrt{2}$:8
QP＝$\dfrac{8}{5\sqrt{2}}$ QA
よって PQ:QM＝$\dfrac{8}{5\sqrt{2}}$: $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$ ＝24:25
問3
M から PB の延長線上に垂線をひき交点を H とする。
△APB と△PBM の面積比が 3:2 より AP:MH＝3:2
∠BPM＝45° だから△HPM は PH＝MH の直角二等辺三角形である。
M から AP に垂線をひき交点を K とする。
△MBH≡△MAK だから
BH＝AK　AK:KP＝1:2
よって BH:MH＝1:2
BH＝x cm とおくと MH＝2x cm とおける。
△MHB で三平方の定理より
$x^2+(2x)^2=(5\sqrt{2})^2$
$x^2=10$
$x>0$ より $x=\sqrt{10}$ cm
MH＝$2x=2\sqrt{10}$ cm
よって PM＝$\sqrt{2}$ MH＝$\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}=4\sqrt{5}$ cm