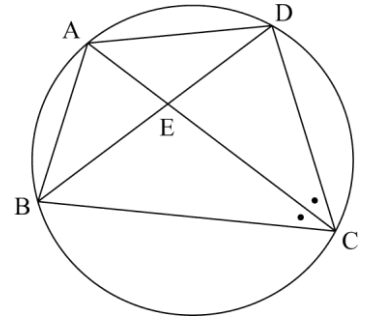


4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2017 年度出題】

【問 1】

右の図で、点 A, B, C, D は円周上にあり、AC と BD の交点を E とする。 $\angle ACB = \angle ACD$ のとき、次の(1), (2)に答えなさい。

(青森県 2017 年度)



(1) $\triangle ABE$ と $\triangle ACB$ が相似になることを次のように証明した。

㉑ , ㉒ にあてはまることばを入れなさい。

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle ACB$ で

$\widehat{AD}$ に対する ㉑ は等しいので

$$\angle ABD = \angle ACD$$

仮定より, $\angle ACB = \angle ACD$

よって, $\angle ABE = \angle ACB \cdots \textcircled{1}$

また, $\angle BAC$ は共通だから, $\angle BAE = \angle CAB \cdots \textcircled{2}$

①, ②から, ㉒ がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \sim \triangle ACB$

(2) $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 9 \text{ cm}$ のとき, AE の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	㉑	
	㉒	
(2)	cm	

解答

(1)

㊤ 円周角

㊦ 2組の角

(2) 4 cm

解説

(1)

㊤ $\angle ABD$ と $\angle ACD$ は $\widehat{AD}$ に対する円周角だから「円周角」が入る。

㊦ ①, ②は等しい角の組み合わせが 2 組あることを指しているから「2 組の角」が入る。

(2)

(1)より

$\triangle ABE \sim \triangle ACB$ だから

$AE = x$ cm とすると

$AE:AB = AB:AC$

$x:6 = 6:9$

$9x = 36$

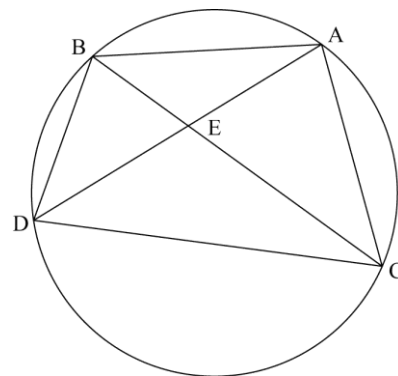
$x = 4$

【問 2】

次の図のように、3 点 A, B, C が円周上にあり、 $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ です。また、A を含まない $\widehat{BC}$ 上に、B, C と異なる点 D をとります。点 E は 2 つの線分 AD と BC の交点です。

このとき、 $BE:AC = ED:CD$ となることを証明しなさい。

(岩手県 2017 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle BED$ と $\triangle ACD$ において

$\widehat{AB} = \widehat{AC}$ であり

等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle BDE = \angle ADC \cdots \text{①}$$

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle DBE = \angle DAC \cdots \text{②}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BED \sim \triangle ACD$$

対応する辺の長さの比は等しいから

$$BE:AC = ED:CD$$

解説

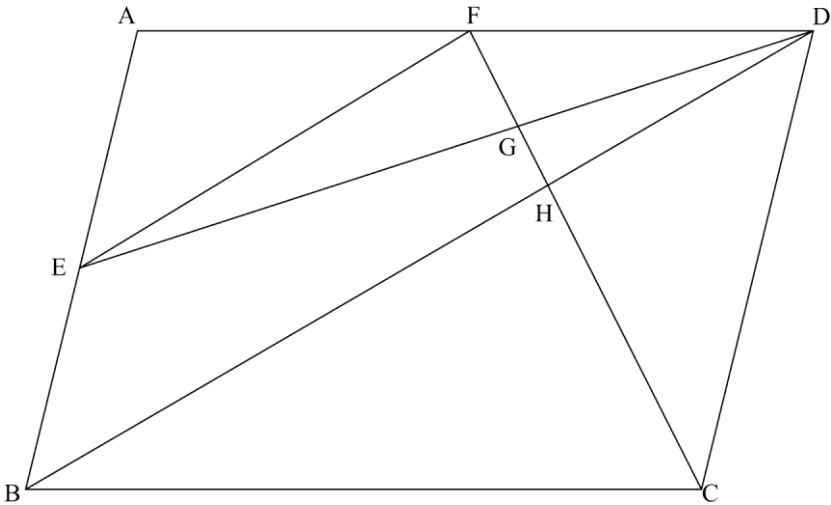
$BE:AC = ED:CD$ という式から三角形の相似の証明を考える。

BE, ED を辺としてもつ $\triangle BED$ と

AC, CD を辺としてもつ $\triangle ACD$ が相似であることを示せばよい。

【問 3】

下の図のように、平行四辺形 $ABCD$ がある。辺 AB の中点を E とし、点 E を通り線分 BD に平行な直線と辺 AD との交点を F とする。また、線分 CF と線分 ED , BD との交点をそれぞれ G , H とする。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2017 年度)

問1 $\triangle AEF \sim \triangle ABD$ であることを証明しなさい。

問2 $CH:HG$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	
問2	:

解答

問1

$\triangle AEF$ と $\triangle ABD$ で

共通な角だから

$$\angle EAF = \angle BAD \cdots \textcircled{1}$$

平行線の同位角だから

$$\angle AEF = \angle ABD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AEF \sim \triangle ABD$$

問2 5:1

解説

問1

共通な角と平行線の同位角が等しくなることを利用して証明する。

問2

まず $EF \parallel BD$ より

$$AF:FD = AE:EB = 1:1 \text{ だから}$$

$$\text{中点連結定理より } EF = \frac{1}{2} BD$$

次に $\triangle HBC \sim \triangle HDF$ より

$$HC:HF = BC:DF = 2:1 \text{ だから}$$

$$HC = \frac{2}{3} CF \quad HF = \frac{1}{3} CF$$

$$HB:HD = BC:DF = 2:1 \text{ より}$$

$$HD = \frac{1}{3} BD$$

また $\triangle FEG \sim \triangle HDG$ より

$$FG:HG = FE:HD = \frac{1}{2} BD : \frac{1}{3} BD = 3:2$$

$$\text{よって } HG = \frac{2}{5} FH = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} CF = \frac{2}{15} CF \text{ だから}$$

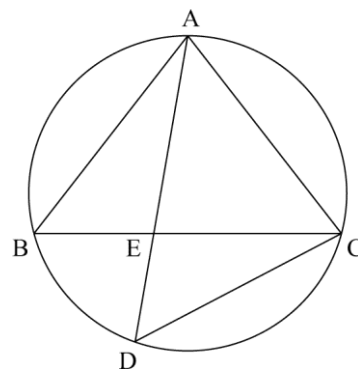
$$CH:HG = \frac{2}{3} CF : \frac{2}{15} CF = \frac{1}{3} : \frac{1}{15} = 5:1$$

【問 4】

右の図のように、円周上の 3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ があり, $AB = AC$ である。点 A を含まない方の弧 BC 上に点 D をとり, AD と BC の交点を E とする。

このとき, $\triangle ADC \sim \triangle ACE$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2017 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ADC$ と $\triangle ACE$ において

共通な角であるから

$$\angle DAC = \angle CAE \cdots \textcircled{1}$$

弧 AC に対する円周角の大きさは等しいから

$$\angle ABC = \angle ADC \cdots \textcircled{2}$$

仮定より $\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから

2 つの底角は等しいので

$$\angle ABC = \angle ACE \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ADC = \angle ACE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADC \simeq \triangle ACE$$

解説

円周角の定理と二等辺三角形の 2 つの底角の大きさが等しくなることから

$\angle ABC = \angle ACE$ を導く。

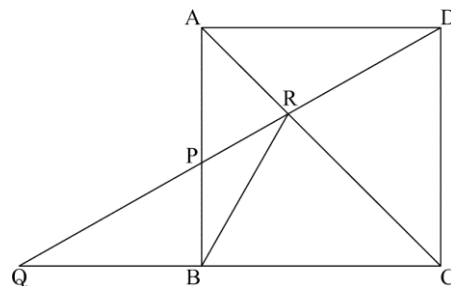
これと仮定から証明をする。

【問 5】

下の図のように、正方形 $ABCD$ があり、辺 AB 上に、2 点 A, B と異なる点 P をとる。2 点 D, P を結んだ延長線と辺 CB の延長線との交点を Q 、線分 DQ と正方形 $ABCD$ の対角線 AC との交点を R とする。また、2 点 B, R を結ぶ。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2017 年度 後期)



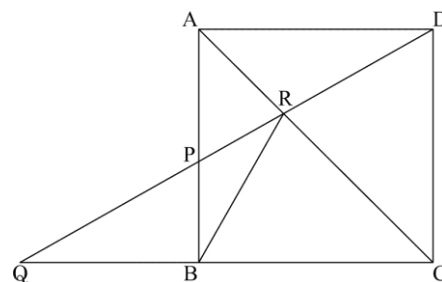
問1 $\triangle PRB \sim \triangle BRQ$ となることの証明を、次の の中に途中まで示してある。

(a) と (b) に入る最も適当なものを、次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び、符号で答えなさい。また、(c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

ただし、 中の①～④に示されている関係を使う場合、番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle ABR$ と $\triangle ADR$ において、
 四角形 $ABCD$ は正方形であるから、
 $AB =$ (a) $\cdots \text{①}$
 共通な辺は等しいので、
 $AR = AR \cdots \text{②}$
 $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ は直角二等辺三角形であるから、
 $\angle BAR =$ (b) $= 45^\circ \cdots \text{③}$
 ①, ②, ③より、
 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので、
 $\triangle ABR \equiv \triangle ADR \cdots \text{④}$



(c)

選択肢

ア BC

イ AD

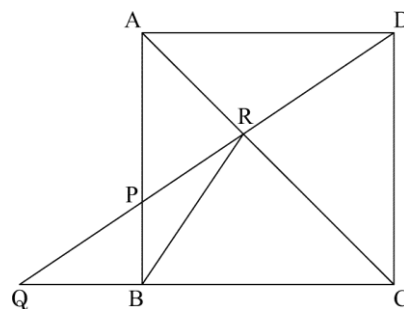
ウ DC

エ $\angle DCR$

オ $\angle DAR$

カ $\angle BCR$

問2 $AB = 6 \text{ cm}$ 、 $AP : PB = 2 : 1$ のとき、線分 BR の長さを求めなさい。



解答欄

問1	(a)		(b)	
	(c)			
問2	cm			

解答

問1

(a) イ

(b) オ

(c)

④より

$$\angle PBR = \angle ADR \cdots ⑤$$

$\triangle PRB$ と $\triangle BRQ$ において

共通な角だから

$$\angle PRB = \angle BRQ \cdots ⑥$$

仮定より $AD \parallel QC$ で

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ADR = \angle BQR \cdots ⑦$$

⑤, ⑦より

$$\angle PBR = \angle BQR \cdots ⑧$$

⑥, ⑧より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle PRB \sim \triangle BRQ$

問2 $\frac{6\sqrt{13}}{5} \text{ cm}$

解説

問1

(a)

四角形 $ABCD$ は正方形であるから AB と長さが等しく $\triangle ADR$ 上にある辺を見つけると AD だからイ

(b)

$\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ は直角二等辺三角形であるから $\angle BAR = \angle DAR = 45^\circ$ となるからオ

(c)

合同な図形で対応する角の大きさが等しくなることと平行線の錯角が等しくなることから $\angle ADR = \angle BQR$ を導く。
また共通な角より $\angle PRB = \angle BRQ$ がいえ 2組の角がそれぞれ等しいことがわかるのでこれらを書く。

問2

$AB = 6 \text{ cm}$, $AP:PB = 2:1$ より

$$AP = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \text{ cm} \quad PB = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$$

$BQ = x \text{ cm}$ とすると

$\triangle APD \sim \triangle BPQ$ より

$$AD:BQ = AP:BP$$

$$6:x = 4:2$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

また $\triangle ARD \sim \triangle CRQ$ より

$$DR:QR = AD:CQ = 6:(6+3) = 6:9 = 2:3$$

$DQ = y \text{ cm}$ とすると

$\triangle CDQ$ において

三平方の定理より

$$9^2 + 6^2 = y^2$$

$$y^2 = 117$$

$y > 0$ だから

$$y = 3\sqrt{13}$$

$$\text{よって } DR = \frac{2}{5} DQ = \frac{2}{5} \times 3\sqrt{13} = \frac{6\sqrt{13}}{5} \text{ cm}$$

$\triangle ABR \equiv \triangle ADR$ より

$$\text{合同な図形では対応する辺の長さは等しいので } BR = DR = \frac{6\sqrt{13}}{5} \text{ cm}$$

【問 6】

右の図1で、四角形 ABCD は、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $BC=12\text{ cm}$ の長方形である。

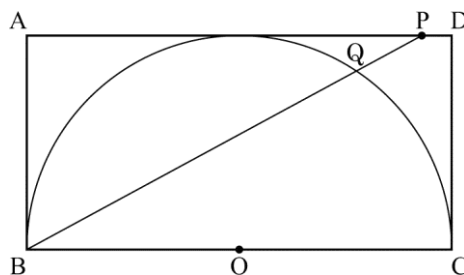
辺 BC を直径とする半円 O の $\widehat{BC}$ は、2 つの頂点 B、C を通る直線に対して頂点 A と同じ側にある。

点 P は、辺 AD 上にある点で、頂点 A に一致しない。

頂点 B と点 P を結んだ線分と、 $\widehat{BC}$ との交点のうち、頂点 B と異なる点を Q とする。

次の各問に答えよ。

図1



(東京都 2017 年度)

問1 図1において、 $\angle PBC = a^\circ$ とするとき、 $\widehat{CQ}$ の長さを表す式を、次のア～エのうちから選び、記号で答えよ。

ただし、円周率は π とする。

ア $12\pi a\text{ cm}$

イ $6\pi a\text{ cm}$

ウ $\frac{1}{10}\pi a\text{ cm}$

エ $\frac{1}{15}\pi a\text{ cm}$

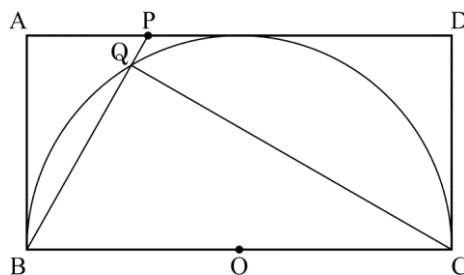
問2 右の図2は、図1において、頂点 C と点 Q を結んだ場合を表し

ている。

次の(1)、(2)に答えよ。

(1) $\triangle ABP \sim \triangle QCB$ であることを証明せよ。

図2



(2) 次の 中の「お」「か」「き」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図2において、 $AP:PD=1:3$ のとき、

線分 PQ の長さは、 $\frac{\text{お} \sqrt{\text{か}}}{\text{き}}\text{ cm}$ である。

解答欄

問1	ア イ ウ エ										
問2	(1)	[証明] $\triangle ABP$ と $\triangle QCB$ において, $\triangle ABP \sim \triangle QCB$									
		お	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
	(2)	か	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
	き	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	

解答

問1 エ

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle ABP$ と $\triangle QCB$ において

四角形 $ABCD$ は長方形だから

$$\angle PAB = 90^\circ$$

半円の弧に対する円周角は直角だから

$$\angle BQC = 90^\circ$$

よって

$$\angle PAB = \angle BQC \cdots \textcircled{1}$$

長方形の対辺は平行だから $AD \parallel BC$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle APB = \angle QBC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABP \sim \triangle QCB$$

(2)

お 3

か 5

き 5

解説

問1

円周角の定理より $\angle QOC = 2\angle QBC = 2a^\circ$ だから

$$\widehat{CQ} \text{の長さは } 2\pi \times 6 \times \frac{2a}{360} = \frac{1}{15} \pi a \text{ cm}$$

問2

(1)

$\triangle ABP$ と $\triangle QCB$ において

四角形 $ABCD$ は長方形だから $\angle PAB = 90^\circ$

半円の弧に対する円周角は直角だから $\angle BQC = 90^\circ$

よって $\angle PAB = \angle BQC \cdots \textcircled{1}$

$AD \parallel BC$ より平行線の錯角は等しいから $\angle APB = \angle QBC \cdots \textcircled{2}$

①, ②より 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABP \sim \triangle QCB$

$$\angle ABP = \angle ABC - \angle QBC = 90^\circ - \angle QBC$$

$$\angle QCB = 180^\circ - \angle BQC - \angle QBC = 180^\circ - 90^\circ - \angle QBC = 90^\circ - \angle QBC \text{ となることから}$$

$\angle ABP = \angle QCB$ を示し①, ②のどちらかの代わりとして用いてもよい。

(2)

$$AD = BC = 12 \text{ cm}, AP : PD = 1 : 3 \text{ だから } AP = 12 \times \frac{1}{1+3} = 3 \text{ cm}$$

$\triangle ABP$ において $BP = x \text{ cm}$ とすると

三平方の定理より

$$6^2 + 3^2 = x^2$$

$$x^2 = 45$$

$$x > 0 \text{ だから } x = 3\sqrt{5}$$

$\triangle ABP \sim \triangle QCB$ より

$AP : QB = BP : CB$ だから $QB = y \text{ cm}$ とすると

$$3 : y = 3\sqrt{5} : 12$$

$$3\sqrt{5}y = 36$$

$$y = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{よって } PQ = BP - QB = 3\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{15\sqrt{5}}{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

【問 7】

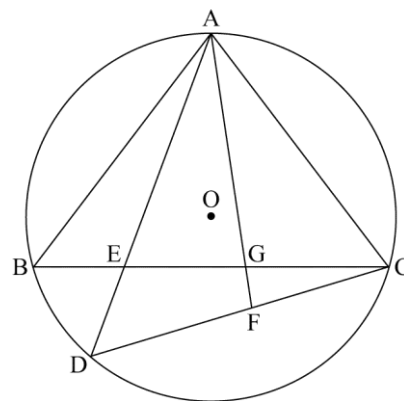
右の図のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C を $AB=AC$ となるようにとる。

また、点 A をふくまない $\widehat{BC}$ 上に、2 点 B, C とは異なる点 D をとり、線分 AD と線分 BC との交点を E とする。

さらに、 $\angle CAD$ の二等分線と線分 CD との交点を F とし、線分 AF と線分 BC との交点を G とする。

このとき、三角形 ACF と三角形 AEG が相似であることを証明したい。

(神奈川県 2017 年度)



〔証明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle AEG$ において、

解答用紙の の中に続きを書き、証明を完成させなさい。

解答欄

〔証明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle AEG$ において、

解答

〔証明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle AEG$ において

まず線分 AF は $\angle CAD$ の二等分線であるから

$$\angle CAF = \angle DAF$$

よって $\angle CAF = \angle EAG \cdots ①$

次に $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であるから

$$\angle ABC = \angle ACB$$

よって $\angle ABE = \angle ACG \cdots ②$

また $\widehat{BD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAD = \angle BCD$$

よって $\angle BAE = \angle GCF \cdots ③$

さらに $\triangle ABE$ の外角は、それととなりあわない

2 つの内角の和に等しいから

$$\angle AEG = \angle ABE + \angle BAE \cdots ④$$

②, ③, ④より

$$\angle AEG = \angle ACG + \angle GCF = \angle ACF$$

よって $\angle ACF = \angle AEG \cdots ⑤$

①, ⑤より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACF \simeq \triangle AEG$$

解説

$\triangle ACF$ と $\triangle AEG$ において

線分 AF は $\angle CAD$ の二等分線であるから

$$\angle CAF = \angle EAG \cdots ①$$

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形であるから

$$\angle ABE = \angle ACG \cdots ②$$

$\widehat{BD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAE = \angle GCF \cdots ③$$

$\triangle ABE$ において

三角形の外角はそれととなりあわない 2 つの内角の和に等しいから

$$\angle AEG = \angle ABE + \angle BAE \cdots ④$$

②, ③, ④より

$$\angle AEG = \angle ABE + \angle BAE = \angle ACG + \angle GCF = \angle ACF$$

よって $\angle ACF = \angle AEG \cdots ⑤$

①, ⑤より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACF \simeq \triangle AEG$$

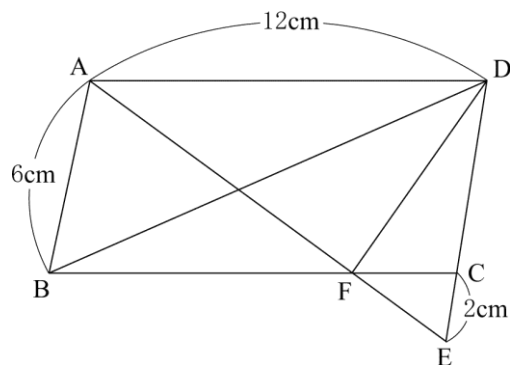
【問 8】

右の図のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AD=12\text{ cm}$ の平行四辺形 $ABCD$ があり、辺 DC の延長線上に、 $CE=2\text{ cm}$ となる点 E をとり、線分 AE と辺 BC の交点を F とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(新潟県 2017 年度)

問1 線分 CF の長さを答えなさい。



問2 $\triangle ADB \sim \triangle CDF$ であることを証明しなさい。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕

解答

問1 3 cm

問2

〔証明〕

$\triangle ADB$ と $\triangle CDF$ において

$$AB:CF=6:3=2:1$$

$$AD:CD=12:6=2:1$$

$$\text{よって } AB:CF=AD:CD \cdots \textcircled{1}$$

また平行四辺形の対角は等しいから

$$\angle BAD = \angle FCD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADB \sim \triangle CDF$$

解説

問1

$AD \parallel BC$ より

$\triangle EFC \sim \triangle EAD$ となるから

$$CF:DA=EC:ED$$

$$\text{よって } CF:12=2:(6+2)$$

$$8CF=24$$

$$CF=3 \text{ cm}$$

問2

平行四辺形は向かい合う角の大きさが等しくなるので

$$\angle BAD = \angle FCD$$

また $AB:CF=AD:CD$

となることを与えられている辺の長さと問1で求めた値から導く。

【問 9】

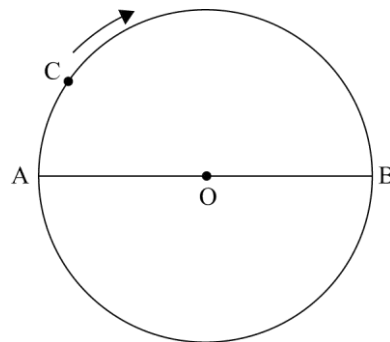
図1～図3のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C があり、 $AB = 6 \text{ cm}$ である。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2017 年度)

問1 図1のように、点 C は円周上を点 A から点 B まで動く。点 C と線分 AB との距離が最大となるときの、その距離を求めなさい。

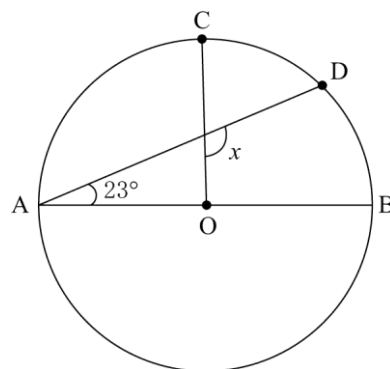
図1



問2 図2のように、 $\widehat{BC}$ を 2 等分する点を D とする。

$\angle BAD = 23^\circ$ であるとき、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

図2

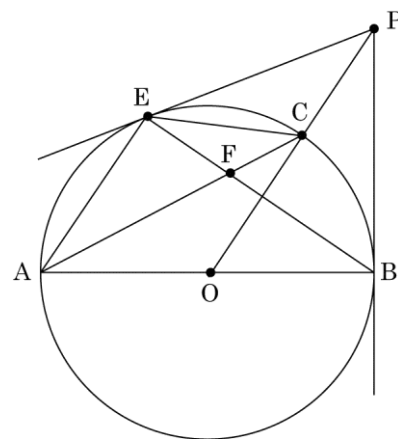


問3 図3のように、点 B を通る円 O の接線と OC の延長との交点を P とする。点 P から円 O にもう 1 本の接線をひき、接点を E とし、 AC と BE の交点を F とする。

このとき、 $\triangle ABF \sim \triangle ACE$ であることを証明しなさい。

ただし、 $0^\circ < \angle BOC < 90^\circ$ とする。

図3



解答欄

問1	cm
問2	度
問3	〔証明〕

解答

問1 3 cm

問2 111 度

問3

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle ACE$ において

$\widehat{AE}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ABF = \angle ACE \cdots \textcircled{1}$$

また $\triangle OBP$ と $\triangle OEP$ について

$$\angle OBP = \angle OEP = 90^\circ$$

OP は共通

$$OB = OE$$

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle OBP \equiv \triangle OEP$$

$$\text{よって } \angle BOP = \angle EOP$$

円周角の定理より

$$\angle FAB = \angle EAC \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle ACE$$

解説

問1

$\angle AOC = 90^\circ$ のとき, 距離が最大となる。

その距離は円 O の半径に等しいから $6 \div 2 = 3$ cm

問2

線分 AD と線分 OC との交点を G とする。

$$\widehat{BD} = \widehat{DC} \text{ より } \angle DOC = \angle BOD = 2\angle BAD = 2 \times 23^\circ = 46^\circ$$

$\triangle ODA$ は $OD = OA$ の二等辺三角形だから

$$\angle ODA = \angle OAD = 23^\circ$$

$\triangle ODG$ において三角形の内角の和は 180° だから

$$\angle x = 180^\circ - (46^\circ + 23^\circ) = 111^\circ$$

問3

$\widehat{AE}$ に対する円周角は等しいから $\angle ABF = \angle ACE$ がわかる。

$\angle FAB = \angle EAC$ か $\angle AFB = \angle AEC$ が成り立てば

2 組の角が等しくなり

$\triangle ABF \sim \triangle ACE$ が証明できるので

どちらがいえるのかを考える。

そこで点 O と点 E を結ぶ。

このとき $\angle BOC = \angle EOC$ となれば

円周角の定理より

$$\angle FAB = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

$$\angle EAC = \frac{1}{2} \angle EOC \text{ となるから}$$

$\angle FAB = \angle EAC$ がいえる。

よって $\angle BOC = \angle EOC$ を証明するために

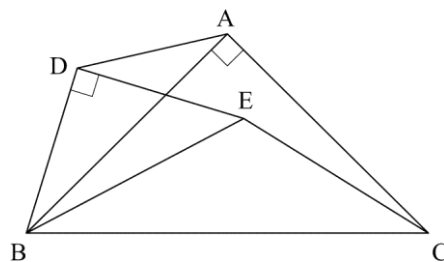
$\triangle OBP \equiv \triangle OEP$ の証明をする。

【問 10】

右の図のように、 $AB=AC$ 、 $\angle BAC=90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC と $DB=DE$ 、 $\angle BDE=90^\circ$ の直角二等辺三角形 DBE がある。

このとき、次の問いに答えよ。

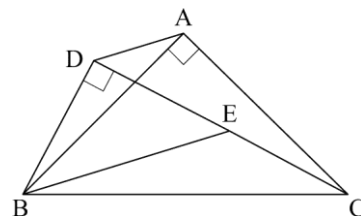
(福井県 2017 年度)



問1 $\triangle ADB \cong \triangle CEB$ であることを証明せよ。

〔証明〕

問2 $AB=3\text{ cm}$ 、 $DB=2\text{ cm}$ とし、3 点 D 、 E 、 C がこの順に一直線上に並ぶとき、 $\triangle ADB$ の面積を求めよ。



解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm^2

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ADB$ と $\triangle CEB$ において

$\triangle ABC$ は $AB=AC$, $\angle BAC=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$AB:CB=1:\sqrt{2}$$

$\triangle DBE$ は $DB=DE$, $\angle BDE=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$DB:EB=1:\sqrt{2}$$

よって $AB:CB=DB:EB\cdots\textcircled{1}$

$$\text{また } \angle DBA = \angle DBE - \angle ABE = 45^\circ - \angle ABE$$

$$\angle EBC = \angle ABC - \angle ABE = 45^\circ - \angle ABE$$

よって $\angle DBA = \angle EBC\cdots\textcircled{2}$

①, ②から

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADB \sim \triangle CEB$

$$\text{問2 } \frac{\sqrt{14}-2}{2} \text{ cm}^2$$

解説

問1

直角二等辺三角形の辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ であることを利用して証明する。

問2

$$DE=DB=2 \text{ cm} \quad BC=\sqrt{2} \quad AB=\sqrt{2} \times 3=3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle BCD$ において

三平方の定理より

$$CD^2=BC^2-DB^2=(3\sqrt{2})^2-2^2=14$$

$CD>0$ より

$$CD=\sqrt{14} \text{ cm}$$

$$CE=CD-DE=\sqrt{14}-2 \text{ cm} \text{ だから}$$

$$\triangle CEB = \frac{1}{2} \times CE \times DB = \frac{1}{2} \times (\sqrt{14}-2) \times 2 = \sqrt{14}-2 \text{ cm}^2$$

問1より

$\triangle ADB \sim \triangle CEB$ であり

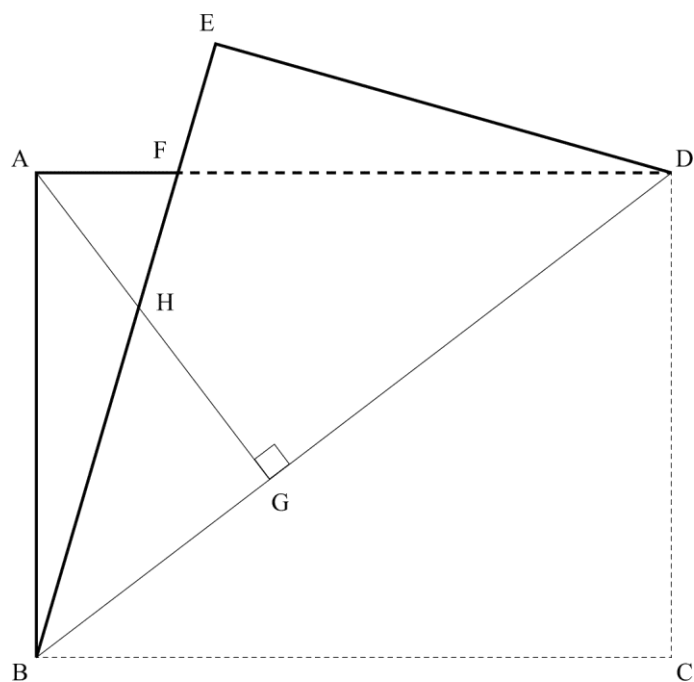
相似比は $AB:CB=1:\sqrt{2}$ だから

$$\text{面積の比は } 1^2:(\sqrt{2})^2=1:2$$

$$\text{よって } \triangle ADB = \frac{1}{2} \triangle CEB = \frac{1}{2} \times (\sqrt{14}-2) = \frac{\sqrt{14}-2}{2} \text{ cm}^2$$

【問 11】

下の図のように、長方形 $ABCD$ で、対角線 BD を折り目として $\triangle BCD$ を折り返したところ、頂点 C が点 E に移った。辺 AD と線分 BE との交点を F とする。また、 AG は頂点 A から BD にひいた垂線であり、 BE と AG との交点を H とする。



次の問1, 問2に答えなさい。

(岐阜県 2017 年度)

問1 $\triangle ABG \sim \triangle BDE$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=3\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$ のとき,

(1) BG の長さを求めなさい。

(2) AH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕		
問2	(1)	cm	
	(2)	cm	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABG$ と $\triangle BDE$ で

仮定から

$$\angle AGB = \angle BED \cdots \textcircled{1}$$

$AB \parallel DC$ より, 平行線の錯角だから

$$\angle ABG = \angle BDC \cdots \textcircled{2}$$

線分 BD は折り目だから

$$\angle BDE = \angle BDC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$\angle ABG = \angle BDE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABG \sim \triangle BDE$$

問2

$$(1) \frac{9}{5} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{21}{20} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle BDE$ と $\triangle BDC$ は対角線 BD で折り返しているので合同になるから

$$\angle CDB = \angle EDB \cdots \textcircled{1}$$

四角形 $ABCD$ は長方形なので $AB \parallel DC$ だから錯角は等しいので

$$\angle ABD = \angle CDB \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle GBA = \angle EDB \cdots \textcircled{3}$$

また $\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ$ で仮定より $\angle AGB = 90^\circ$ だから

$$\angle AGB = \angle BED \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABG \sim \triangle BDE$$

問2

(1)

$\angle BED = 90^\circ$, $BE = 4 \text{ cm}$, $ED = 3 \text{ cm}$ だから

$$\text{三平方の定理より } BD^2 = BE^2 + ED^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$BD > 0$ より $BD = 5 \text{ cm}$

$\triangle ABG \sim \triangle BDE$ より

$AB : BG = BD : DE$ だから

$$3 : BG = 5 : 3$$

$$BG = \frac{9}{5} \text{ cm}$$

(2)

$AH = AG - HG$ だから AG , HG の長さをそれぞれ求める。

$$\text{三平方の定理より } AG^2 = AB^2 - BG^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \quad AG > 0 \text{ より } AG = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

また共通な角から $\angle GBH = \angle EBD$, $\angle BGH = \angle BED = 90^\circ$ より

$\triangle BGH \sim \triangle BED$ がいえるから $BG : GH = BE : ED$ が成り立つ。

$$\text{このとき } BG = \frac{9}{5} \text{ cm}, BE = 4 \text{ cm}, ED = 3 \text{ cm} \text{ なので } \frac{9}{5} : GH = 4 : 3 \quad GH = \frac{27}{20} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AH = \frac{12}{5} - \frac{27}{20} = \frac{21}{20} \text{ cm}$$

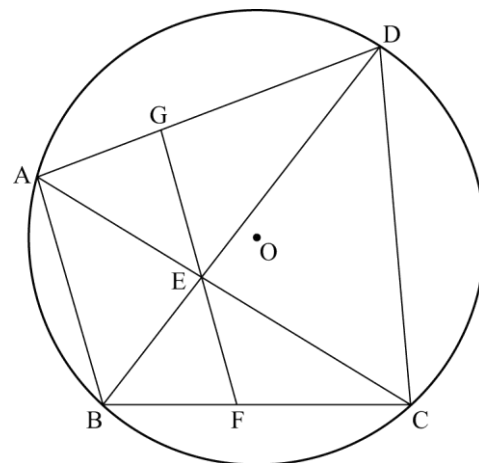
【問 12】

図において、3 点 A, B, C は円 O の円周上の点である。 $\angle ABC$ の二等分線と円 O との交点を D とし、 BD と AC との交点を E とする。 BC 上に $BF=EF$ となる点 F をとり、 FE の延長と AD との交点を G とする。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(静岡県 2017 年度)

問1 $\triangle AEG \sim \triangle CDE$ であることを証明しなさい。



問2 $AD=4\text{ cm}$, $AE=2\text{ cm}$, $EC=3\text{ cm}$ のとき、 $\triangle CDE$ の面積は、 $\triangle DGE$ の面積の何倍か、答えなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	倍

解答

問1

〔証明〕

解説参照

問2 $\frac{12}{5}$ 倍

解説

問1

二等辺三角形の 2 つの底角が等しくなることや
平行線の錯角が等しくなることなどから

$\angle GEA = \angle EDC$ を導く。

また円周角の定理を利用して

$\angle GAE = \angle ECD$ を導く。

これらから 2 組の角が等しいことがわかるので

$\triangle AEG \sim \triangle CDE$ が証明できる。

問2

$\angle GAE = \angle ECD$ より

$\triangle DAC$ は $AD = CD$ の二等辺三角形である。

$\triangle AEG \sim \triangle CDE$ で

その相似比は $AE : CD = AE : AD = 2 : 4 = 1 : 2$ だから

面積の比は $1^2 : 2^2 = 1 : 4$

$\triangle AEG = S$ とすると

$\triangle CDE = 4S$ となり

$AE : EC = 2 : 3$ だから

$$\triangle DAE = \frac{2}{3} \triangle CDE = \frac{2}{3} \times 4S = \frac{8}{3} S$$

よって $\triangle DGE = \triangle DAE - \triangle AEG$

$$= \frac{8}{3} S - S = \frac{5}{3} S$$

だから $4S \div \frac{5}{3} S = \frac{12}{5}$ 倍

【問 13】

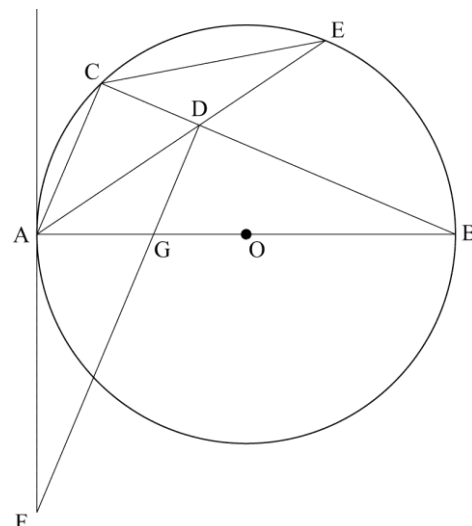
次の図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。 $\angle CAB$ の二等分線と線分 BC 、円 O との交点をそれぞれ D 、 E とし、線分 CE をひく。点 D から線分 AC に平行な直線をひき、点 A を接点とする円 O の接線との交点を F とし、線分 AB と線分 DF の交点を G とする。

このとき、あとの各問いに答えなさい。

ただし、点 E は点 A と異なる点とする。

(三重県 2017 年度)

問1 次の は、 $\triangle ACE \sim \triangle CDE$ であることを証明したものである。(ア) ～ (ウ) に、それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。



〔証 明〕

$\triangle ACE$ と $\triangle CDE$ において、

共通な角だから、 (ア) …①

線分 AE は $\angle CAB$ の二等分線だから、 $\angle CAE =$ (イ) …②

弧 BE に対する円周角は等しいから、 (イ) $= \angle DCE$ …③

②、③より、 $\angle CAE = \angle DCE$ …④

①、④より、 (ウ) がそれぞれ等しいので、

$\triangle ACE \sim \triangle CDE$

問2 $\triangle AGF \equiv \triangle DGB$ であることを証明しなさい。

問3 $AB = 10 \text{ cm}$ 、 $AC = 4 \text{ cm}$ のとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 線分 AG の長さを求めなさい。

(2) $\triangle CDE$ と $\triangle AGF$ の面積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	$\triangle CDE:\triangle AGF=$:

解答

問1

(ア) $\angle AEC = \angle CED$

(イ) $\angle BAE$

(ウ) 2組の角

問2

〔証明〕

$\triangle AGF$ と $\triangle DGB$ において

対頂角は等しいから

$\angle AGF = \angle DGB \cdots \textcircled{1}$

円の接線は、接点を通る半径に垂直だから

$\angle GAF = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$DF \parallel AC$ より同位角は等しいから

$\angle GDB = \angle ACB \cdots \textcircled{3}$

$\angle ACB$ は半円の弧に対する円周角だから

$\angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より

$\angle GDB = 90^\circ \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ より

$\angle GAF = \angle GDB \cdots \textcircled{6}$

$DF \parallel AC$ より、錯角は等しいから

$\angle GDA = \angle CAD \cdots \textcircled{7}$

線分 AD は $\angle CAB$ の二等分線だから

$\angle CAD = \angle GAD \cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

$\angle GDA = \angle GAD \cdots \textcircled{9}$

$\textcircled{9}$ より、 $\triangle GAD$ は二等辺三角形だから

$GA = GD \cdots \textcircled{10}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{6}$, $\textcircled{10}$ より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AGF \equiv \triangle DGB$

問3

(1) $\frac{20}{7}$ cm

(2) $\triangle CDE : \triangle AGF = 21 : 50$

解説

問1

ア 共通な角なのは $\angle AEC$ と $\angle CED$ だから $\angle AEC = \angle CED$

イ $\angle CAE$ と $\angle DCE$ と大きさの等しい角は条件から $\angle BAE$

ウ 2組の角が等しいことが条件になっているから「2組の角」が入る。

問2

まず $\angle GDA = \angle GAD$ より $\triangle GAD$ は二等辺三角形となるから $GA = GD$ を導く。

次に半円に弧に対する円周角は 90° になることや

円の接線はその接点を通る半径に垂直になることなどを利用して証明する。

問3

(1)

$AG = x$ cm とすると $GB = 10 - x$ cm

ここで $\triangle BAC$ と $\triangle BGD$ において $AC \parallel DF$ より $\angle BAC = \angle BGD$, $\angle BCA = \angle BDG$ だから

$\triangle BAC \sim \triangle BGD$

よって $AB:GB = AC:GD$ なので

$$10:(10-x) = 4:x$$

$$10x = 40 - 4x$$

$$x = \frac{20}{7} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle AGF \sim \triangle DGB$ より $\triangle CDE$ と $\triangle DGB$ の面積の比を求めても解答は同じになる。

ここで円周角の定理より $\angle BAD = \angle ECD$, $\angle DBA = \angle DEC$ から $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ がいえる。

$$\text{また } AG \text{ の長さは(1)で求めているので } AG:GB = \frac{20}{7} : \left(10 - \frac{20}{7}\right) = 2:5$$

これより $\triangle DAG:\triangle DGB = 2:5$

よって $\triangle CDE$ と $\triangle ADB$ の面積の比がわかれば

$\triangle DAG:\triangle DGB = 2:5$ より $\triangle CDE$ と $\triangle DGB$ の面積の比を求めることができる。

まず $\triangle BAC$ で $\angle BCA = 90^\circ$ だから

$$\text{三平方の定理より } BC^2 = AB^2 - AC^2 = 100 - 16 = 84$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = 2\sqrt{21} \text{ cm}$$

$$BC:DC = BA:AG \text{ より } 2\sqrt{21}:DC = 10:\frac{20}{7} \text{ で } DC = \frac{4\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

$$\text{同様に } \triangle DCA \text{ において } AD^2 = DC^2 + AC^2 = \frac{336}{49} + 16 = \frac{1120}{49}$$

$AD > 0$ より

$$AD = \frac{4\sqrt{70}}{7} \text{ cm}$$

$$\text{よって } DC:AD = \frac{4\sqrt{21}}{7} : \frac{4\sqrt{70}}{7} = \sqrt{3} : \sqrt{10} \text{ となるから}$$

$$\triangle CDE \text{ と } \triangle ADB \text{ 面積の比は } (\sqrt{3})^2 : (\sqrt{10})^2 = 3:10$$

ここで $\triangle CDE = 3S$ とおくと $\triangle ADB = 10S$ となるから

$$\triangle AGF = \triangle DGB = \frac{5}{7} \times 10S = \frac{50}{7} S$$

$$\text{したがって } \triangle CDE:\triangle AGF = 3S:\frac{50}{7} S = 21:50$$

【問 14】

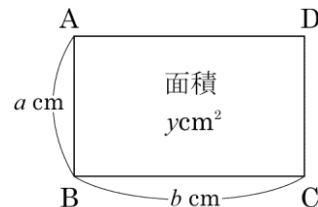
太一さんは、周の長さが 24 cm の長方形をひもでつくり、縦と横の長さがそれぞれ何 cm のときに面積が最大になるのかについて調べています。後の問1から問4に答えなさい。

(滋賀県 2017 年度)

太一さんが調べたこと1

図1のように、周の長さが 24 cm である長方形 ABCD について、縦の長さを a cm、横の長さを b cm、面積を y cm^2 とする。縦の長さ a を 1 cm ずつ変えて面積を調べ、その結果をまとめると下の表のようになった。

図1



表

縦の長さ a (cm)	1	2	3	4	5	6	7	...
面 積 y (cm^2)	11	20	27	32	35	36	35	...

問1 太一さんが調べたこと1から、縦の長さが 9 cm のとき、長方形 ABCD の面積を求めなさい。



この長方形の面積は、1辺が6cmの正方形になるとき最も大きくなりそうだね。

太一さんは、予想を確かめるために先生に質問したところ、次の 2 つのアドバイスをもらいました。

先生からのアドバイス

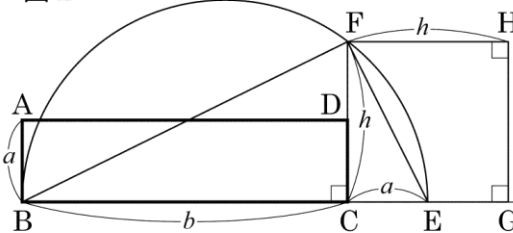
まず、＜作図の仕方＞を見て考えてごらん。



＜作図の仕方＞

○周の長さが 24cm である長方形 ABCD について、縦の長さを a cm、横の長さを b cm とする。

図 2



○右の図 2 のように、辺 BC を延長して $CE = CD$ となる点 E をとり、線分 BE を直径とする半円をかく。

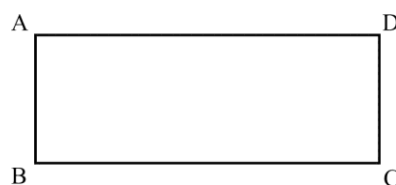
○直線 CD と半円との交点を F とする。このとき $FC = h$ として、1 辺の長さが h cm の正方形 FCGH をつくる。

図 2 で長方形 ABCD の縦と横の長さを変えると、それにつれて図形がどのように変化するかな。コンピュータを使って調べてみてはどうか。何かに気がつくかもしれないよ。



問2 太一さんは、先生からのアドバイスの＜作図の仕方＞の手順にしたがって、まずは下の図3の長方形 ABCD の場合について、正方形 FCGH を作図することにしました。正方形 FCGH をコンパスと定規を使って作図しなさい。ただし、作図に使った線は消さないこと。

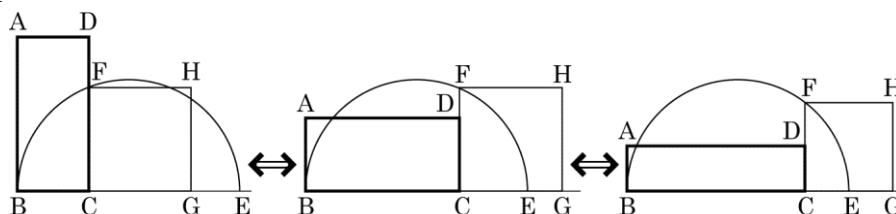
図3



太一さんが調べたこと2

太一さんは、図2をもとにコンピュータを使って、長方形 ABCD の形が変わるとき、それにつれて変化することがらについて調べてみると、図4のようになることがわかりました。

図4



長方形 ABCD の形が変わっても、線分 BE はつねに 12cm になるのだね。正方形 FCGH の大きさは、どのように変化するのかな。

問3 太一さんは、太一さんが調べたこと2から、点 C が線分 BE の中点にあるときに、正方形 FCGH の面積が最大になると考えました。その考えが正しい理由を説明しなさい。

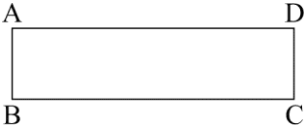
長方形 ABCD と正方形 FCGH の面積はどのような関係になっているのか、わかるかな。



問4 太一さんは、正方形 FCGH の面積が、長方形 ABCD の面積と等しくなると考えました。図2において、相似な三角形に着目し、太一さんの考えが正しい理由を説明しなさい。

これで、長方形 ABCD が正方形になるときに、面積が一番大きくなることが確かめられたね。

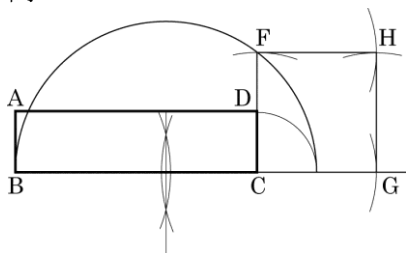


問1	cm ²
問2	
問3	
問4	

解答

問1 27 cm^2

問2



問3

正方形 $F CGH$ の面積が最大になるのは線分 FC の長さが最大するときである。

また線分 FC の長さは

点 F と線分 BE との距離を表していて

線分 BE の長さが一定だから

点 C が線分 BE の中点のとき最大となる。

ゆえに正方形 $F CGH$ の面積が最大になるのは

点 C が線分 BE の中点のときである。

問4

$\triangle BCF$ と $\triangle FCE$ について

$\angle BCF = \angle FCE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

直径に対する円周角だから $\angle BFE = 90^\circ$

ここで $\angle BFC + \angle CFE = \angle BFC + \angle FBC = 90^\circ$ なので

$\angle FBC = \angle EFC \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BCF \sim \triangle FCE$

相似な三角形の対応する辺なので $BC : FC = FC : EC$

ゆえに $b : h = h : a$

$$h^2 = ab$$

$h > 0$ より

$$h = \sqrt{ab}$$

したがって h を1辺の長さとする正方形 $F CGH$ の面積は ab であり

長方形 $ABCD$ の面積と等しくなる。

解説

問1

周の長さが 24 cm だから

縦の長さ+横の長さの和は $24 \div 2 = 12\text{ cm}$ 横の長さは $12 - 9 = 3\text{ cm}$ だから

長方形 ABCD の面積は $9 \times 3 = 27\text{ cm}^2$

問2

次のような手順で作図する。

- ① 辺 BC を延長する。
- ② 点 C を中心として点 D を通る円をかく。①の辺 BC の延長との交点を E とする。
- ③ 線分 BE の垂直二等分線をかく。
- ④ ③でかいた線分 BE の垂直二等分線と線分 BE との交点を中心として直径 BE の円をかく。
この円と直線 CD との交点を F とする。
- ⑤ 点 C を中心として点 F を通る円をかく。①の辺 BC の延長との交点を G とする。
- ⑥ 点 F, 点 G をそれぞれ中心とし⑤でかいた円と同じ半径の円をそれぞれかく。
この 2 つの円との交点を H とする。
- ⑦ 線分 FH, GH をそれぞれかく。

問3

$BE = 12\text{ cm}$ で一定だから半円を固定して考えるとよい。

円において長さが最も長い弦は直径であるから

線分 FC が半円の半径となるときの正方形 FCGH の面積は最大になる。

線分 FC が半円の半径となるのは点 C が線分 BE の中点のときである。

問4

$$\angle FBC = 180^\circ - \angle BCF - \angle BFC = 90^\circ - \angle BFC$$

$$\text{と } \angle EFC = \angle BFE - \angle BFC = 90^\circ - \angle BFC \text{ より}$$

$$\angle FBC = \angle EFC$$

また $\angle BCF = \angle FCE = 90^\circ$ がいえるので

$\triangle BCF \sim \triangle FCE$ が成り立つ。

$$\text{よって } BC:FC = FC:EC \text{ より } b:h = h:a \quad ab = h^2$$

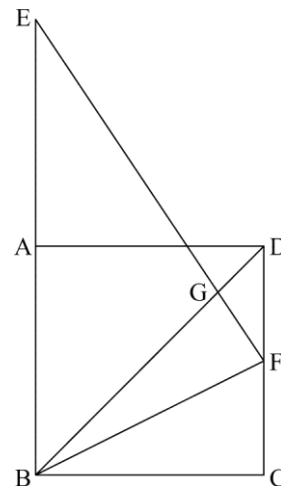
$$\text{このとき正方形 FCGH の面積は } h \times h = h^2\text{ cm}^2$$

$$\text{長方形 ABCD の面積は } a \times b = ab\text{ cm}^2 \text{ だから}$$

正方形 FCGH の面積と長方形 ABCD の面積が等しいことがわかる。

【問 15】

右図において、四角形 ABCD は 1 辺の長さが 6 cm の正方形である。B と D とを結ぶ。E は、直線 AB 上にあって A について B と反対側にある点であり、 $EA = 6 \text{ cm}$ である。F は辺 DC の中点である。F と B、F と E とをそれぞれ結ぶ。G は、線分 EF と線分 BD との交点である。



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2017 年度 A)

問1 線分 BD の長さを求めなさい。

問2 $\triangle FBC$ の内角 $\angle FBC$ の大きさを α° とするとき、 $\triangle FBC$ の内角 $\angle BFC$ の大きさを α を用いて表しなさい。

問3 次は、 $\triangle EBG \sim \triangle FDG$ であることの証明である。㉑ , ㉒ に入れるのに適している「角を表す文字」をそれぞれ書きなさい。また、㉑ から適しているものを一つ選び、記号を○で囲みなさい。

〔証 明〕

$\triangle EBG$ と $\triangle FDG$ において

対頂角は等しいから $\angle EGB = \angle$ ㉑ $\dots$ ㉓

四角形 ABCD は正方形だから $EB \parallel DC$ であり、

平行線の錯角は等しいから $\angle EBG = \angle$ ㉒ $\dots$ ㉔

㉓, ㉔より、

㉑ ア 1 組の辺とその両端の角 イ 2 組の辺の比とその間の角 ウ 2 組の角]

がそれぞれ等しいから

$\triangle EBG \sim \triangle FDG$

問4 $\triangle GBF$ の面積を求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

問1	cm	
問2	度	
問3	㉠	
	㉡	
	㉢	ア イ ウ
問4	〔求め方〕 cm²	

解答

問1 $6\sqrt{2}$ cm

問2 $90-a$ 度

問3

① FGD

② FDG

③ ウ

問4

[求め方]

F は辺 DC の中点だから $DF=3$ cm

$\triangle DBF$ の面積は $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$ cm²

$\triangle EBG \sim \triangle FDG$ だから

$BG:DG=BE:DF=4:1$

よって $\triangle GBF$ の面積は

$$\frac{4}{5} \times \triangle DBF = \frac{36}{5} \text{ cm}^2$$

答 $\frac{36}{5}$ cm²

解説

問1

$\triangle ABD$ は $\angle BAD=90^\circ$, $AB=6$ cm, $AD=6$ cm の直角二等辺三角形だから

$AB:BD=1:\sqrt{2}$ より $BD=6\sqrt{2}$ cm

問2

$\triangle FBC$ において

$\angle FCB=90^\circ$, $\angle FBC=a^\circ$ で

3 つの内角の和は 180° だから

$\angle BFC=180^\circ-(90^\circ+a^\circ)=90^\circ-a^\circ$

問3

① $\angle EGB$ の対頂角を探すと $\angle FGD$

② $EB \parallel DC$ だから $\angle EBG$ の錯角を探すと $\angle FDG$

③ 相似になる条件であることと上記の 2 点を合わせて考えウの「2 組の角」。

問4

$\triangle BFD$ の面積がわかれば

$\triangle EBG \sim \triangle FDG$ より

$BG:GD$ を求め

その比から $\triangle GBF$ の面積を求めることができる。

まず点 F は辺 DC の中点だから $DF=FC=3$ cm

よって $\triangle BFD = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$ cm²

次に $BG:GD=BE:DF=(6+6):3=12:3=4:1$

したがって $\triangle GBF = 9 \times \frac{4}{5} = \frac{36}{5}$ cm²

【問 16】

図1～図3において、四角形 $ABCD$ は 1 辺の長さが 3 cm の正方形である。E は、辺 AD 上にあつて A, D と異なる点である。F は直線 BE 上にあつて E について B と反対側にある点であり、3 点 A, D, F を結んでできる $\triangle ADF$ は $AD=AF$ の二等辺三角形である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2017 年度 B)

問1 図1において、A と C, E と C とをそれぞれ結ぶ。次のア～エの三角形のうち、その面積が $\triangle ABC$ の面積と等しいものはどれですか。一つ選び、記号を○で囲みなさい。

ア $\triangle ACE$ イ $\triangle ECD$ ウ $\triangle ABF$ エ $\triangle EBC$

問2 図2において、B と D とを結ぶ。 $\triangle DEB \sim \triangle FDB$ であることを証明しなさい。

問3 図3は、図2において $AE=1$ cm であるときの状態を示している。

図3において、F と C とを結ぶ。

(1) 線分 FE の長さを求めなさい。

(2) $\triangle FBC$ の面積を求めなさい。

図1

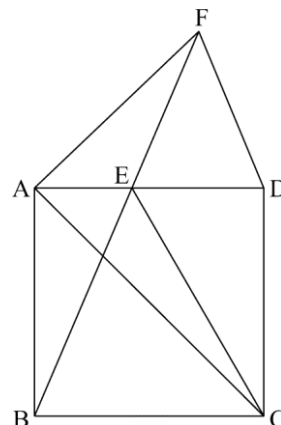


図2

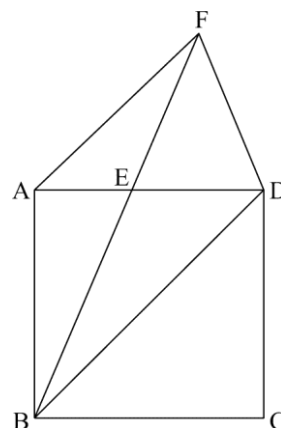
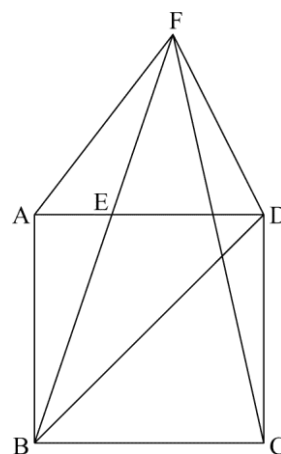


図3



解答欄

問1	ア イ ウ エ	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1 エ

問2

〔証明〕

$\triangle DEB$ と $\triangle FDB$ において

$\angle DBE = \angle FBD$ (共通) … ㉑

$\angle EDB = 45^\circ$ … ㉒

A を中心として半径 3 cm の円 A を考えると 3 点 B, D, F は円 A の周上の点である。
一つの弧に対する円周角の大きさはその弧に対する中心角の大きさの半分であるから

$$\angle DFB = \frac{1}{2} \angle DAB = 45^\circ \dots \text{㉓}$$

㉒, ㉓より $\angle EDB = \angle DFB$ … ㉔

㉑, ㉔より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle DEB \sim \triangle FDB$

問3

(1) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ cm

(2) $\frac{81}{10}$ cm²

解説

問1

平行な 2 直線間の距離は等しくなることを利用して面積の等しい三角形を探す。

四角形 ABCD は正方形なので

AD // BC より底辺 BC が共通となるから $\triangle ABC = \triangle EBC$ でエ

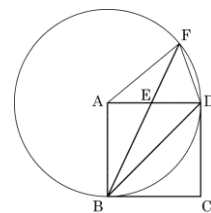
問2

AB = AD = AF = 3 cm なので

点 A を中心とし半径 3 cm の円をかくと右の図のようになる。

円周角の定理や辺 BD が正方形の対角線になることから $\angle BFD = \angle ADB$ を導く。

また $\angle DBF = \angle EBD$ (共通) を使って証明する。



問3

(1)

FE = FB - EB だから FB と EB の長さを求める。

$\triangle ABE$ について $\angle BAE = 90^\circ$ だから三平方の定理より

$$EB^2 = AB^2 + AE^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$EB > 0 \text{ より } EB = \sqrt{10} \text{ cm}$$

辺 BD は 1 辺 3 cm の正方形の対角線で

$\triangle ABD$ は直角二等辺三角形になるから $AB:BD = 1:\sqrt{2}$ より, $BD = 3\sqrt{2}$ cm

$\triangle DEB \sim \triangle FDB$ より

$$FB:BD = DB:BE \text{ より } FB:3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}:\sqrt{10} \text{ で, } FB = \frac{9\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } FE = FB - EB = \frac{9\sqrt{10}}{5} - \sqrt{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

(2)

辺 FC と辺 AD との交点を Q とすると AD // BC より $\triangle FEQ \sim \triangle FBC$ となるから

高さの比は FE:FB と等しくなる。

$$FE:FB = \frac{4\sqrt{10}}{5} : \frac{9\sqrt{10}}{5} = 4:9$$

$$\triangle FEQ \text{ の高さを } h \text{ とおくと } h:(h+3) = 4:9 \text{ 整理すると } h = \frac{12}{5}$$

$$\text{よって } \triangle FBC = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{12}{5} + 3 \right) = \frac{81}{10} \text{ cm}^2$$

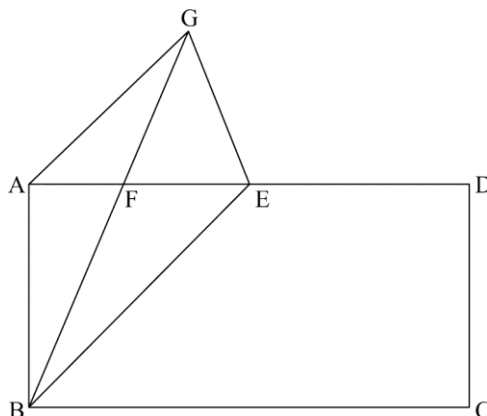
【問 17】

図1, 図2において, 四角形 $ABCD$ は $AB=3\text{ cm}$, $AD=6\text{ cm}$ の長方形である。 E は辺 AD の中点である。 E と B とを結ぶ。 F は, 線分 AE 上にあって A , E と異なる点である。 G は直線 BF 上にあって F について B と反対側にある点であり, 3 点 A , E , G を結んでできる $\triangle AEG$ は $AE=AG$ の二等辺三角形である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2017 年度 C)

図1

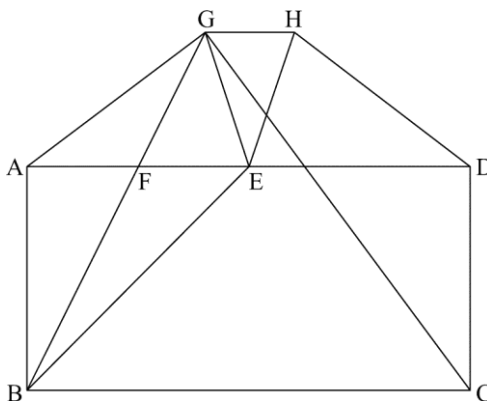


問1 図1において, $\triangle EFB \sim \triangle GEB$ であることを証明しなさい。

問2 図2は, 図1において F が線分 AE の中点であるときの状態

を示している。図2において, H は直線 AD について G と同じ側にある点であり, 3 点 D , E , H を結んでできる $\triangle DEH$ は $\triangle AEG$ と合同な三角形である。 G と H , G と C とをそれぞれ結ぶ。このとき, $GH \parallel AD$ である。

図2



(1) 線分 GE の長さを求めなさい。

(2) 線分 GH の長さを求めなさい。

(3) 四角形 $GCDH$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕		
問2	(1)	cm	
	(2)	cm	
	(3)	cm ²	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle EFB$ と $\triangle GEB$ において

$\angle EBF = \angle GBE$ (共通) … ㉞

$\angle FEB = 45^\circ$ … ㉟

A を中心として半径 3 cm の円 A を考えると

3 点 B, E, G は円 A の周上の点である。

一つの弧に対する円周角の大きさは

その弧に対する中心角の大きさの半分であるから

$$\angle EGB = \frac{1}{2} \angle EAB = 45^\circ \dots \text{㊱}$$

㉟, ㊱より

$\angle FEB = \angle EGB$ … ㊲

㉞, ㊲より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EFB \sim \triangle GEB$

問2

(1) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ cm

(2) $\frac{6}{5}$ cm

(3) $\frac{162}{25}$ cm²

解説

問1

$AB = AE = AG = 3$ cm なので

点 A を中心とし半径 3 cm の円をかくと右のようになる。

このとき円周角の定理より

$$\angle BGE = \frac{1}{2} \angle BAE = 45^\circ \dots \text{①}$$

また $\triangle ABE$ は $AB = AE$, $\angle EAB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$\angle AEB = 45^\circ \dots \text{②}$$

①, ②より

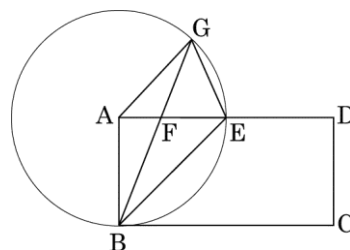
$\angle BEF = \angle BGE$ … ③ 共通な角だから

$\angle EBF = \angle GBE$ … ④

③, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle EFB \sim \triangle GEB$



問2

(1)

$\triangle EFB \sim \triangle GEB$ より

$GE:EB=EF:FB$ だから EB, EF, FB のそれぞれの辺の長さを求めて GE を求める。

$$AE = \frac{1}{2} AD = 3 \text{ cm} \text{ で点 } F \text{ は線分 } AE \text{ の中点だから } AF = EF = \frac{1}{2} AE = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$\triangle ABF$ において

$$\angle FAB = 90^\circ \text{ だから三平方の定理より } BF^2 = AB^2 + AF^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

$$BF > 0 \text{ より } BF = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

また $\triangle ABE$ は直角二等辺三角形だから $AB:BE=1:\sqrt{2}$ より, $BE=3\sqrt{2}$

$$\text{よって } GE:3\sqrt{2} = \frac{3}{2} : \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ となるから } GE = \frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle AEG \equiv \triangle DEH$ だから対応する辺の長さは等しいので $EG=EH$

よって $\triangle EGH$ は二等辺三角形になる。

また $GH \parallel AD$ より平行線の錯角は等しいから

$\angle AEG = \angle EGH$ となるので $\angle AGE = \angle AEG = \angle EGH = \angle EHG$ となり

$\triangle AEG \sim \triangle EHG$

$$\text{よって } AG:GE=EG:GH \text{ より } 3:\frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{5}:GH$$

$$\text{整理すると } GH = \frac{6}{5}$$

(3)

辺 AD と線分 GC の交点を P とする。

四角形 $GCDH$ を台形 $GPDH$ と $\triangle PCD$ に分けて考える。

まず $PD=AD-AF-FP$ を使って PD の長さを求める。

$AD \parallel BC$ より平行線と線分の比の関係から $GF:FP=GB:BC$

ここで $\triangle EFB \sim \triangle GEB$ より

$BG:BE=BE:BF$ だから

$$BG:3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} : \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$BG = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$GF = GB - FB \text{ より } GF = \frac{12\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{9\sqrt{5}}{10} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \frac{9\sqrt{5}}{10} : FP = \frac{12\sqrt{5}}{5} : 6 \text{ より } FP = \frac{9}{4} \text{ cm となるから}$$

$$PD = 6 - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \text{ cm}$$

次に線分 GH と辺 AD の距離を求める。

この距離は $\triangle GEH$ の高さと同しくなる。

$\triangle GEH$ は辺の長さが $\frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$, $\frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$, $\frac{6}{5} \text{ cm}$ の二等辺三角形だから

$$\text{高さ } h \text{ は } h^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2 - \left(\frac{6}{5} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{25}$$

$$h > 0 \text{ より } h = \frac{9}{5} \text{ cm}$$

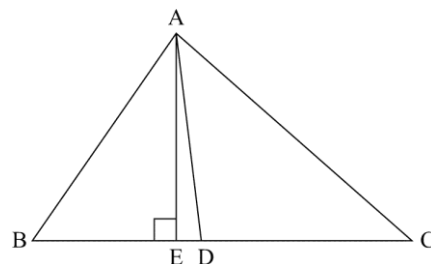
したがって四角形 $GCDH = \text{台形 } GPDH + \triangle PCD$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{5} + \frac{9}{4}\right) \times \frac{9}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times 3 = \frac{621}{200} + \frac{27}{8} = \frac{162}{25} \text{ cm}^2$$

【問 18】

AB=8 cm, BC=12 cm, CA=10 cm の△ABC がある。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし、点 A から辺 BC に垂線 AE をひくとき、次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2017 年度)



問1 線分 BD, AE の長さを次のようにして求めた。□(i) と □(ii) にあてはまるものを、あとのア～カからそれぞれ 1 つ選んで、その符号を書きなさい。

また、□(iii) と □(iv) にあてはまる数をそれぞれ求めなさい。

点 B, C から直線 AD に垂線 BF, CG をひく。

△ABF と △ACG において、

$$\angle AFB = \angle AGC = 90^\circ \cdots \text{①}$$

$$\angle BAF = \angle CAG \cdots \text{②}$$

①, ②より、2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABF ∽ △ACG

したがって、□(i) = AB:AC

$$= 8:10 = 4:5 \cdots \text{③}$$

次に、△BDF と △CDG において、

$$\angle BFD = \angle CGD = 90^\circ \cdots \text{④}$$

□(ii) は等しいから、∠BDF = ∠CDG ⋯⑤

④, ⑤より、2 組の角がそれぞれ等しいから

△BDF ∽ △CDG

したがって、BD:CD = □(i) ⋯⑥

③, ⑥より、BD:CD = 4:5 なので、BD = □(iii) cm

次に、BE = x cm とすると、

△ABE で三平方の定理より、

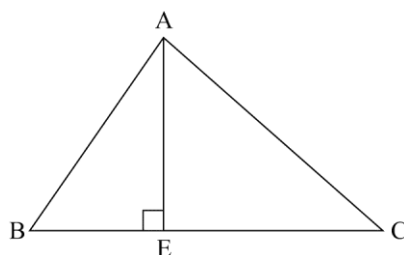
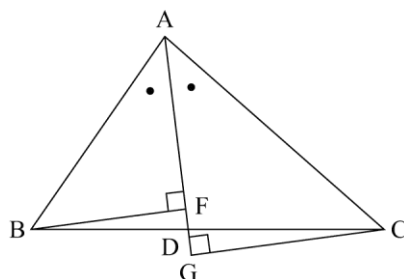
$$AE^2 = \square \cdots \text{⑦} \text{ と表される。}$$

同様に、△ACE で、

$$AE^2 = \square \cdots \text{⑧} \text{ と表される。}$$

$$\text{⑦, ⑧より、} x = \square$$

したがって、AE = □(iv) cm



ア AF:AG イ BF:CG ウ FD:GD エ 対頂角 オ 錯角 カ 同位角

問2 線分 AD の長さは何 cm か、求めなさい。

問3 ∠ADC の二等分線と辺 AC との交点を H とするとき、△ADH の面積は何 cm² か、求めなさい。

解答欄

問1	(i)	
	(ii)	
	(iii)	cm
	(iv)	cm
問2	cm	
問3	cm ²	

解答

問1

(i) イ

(ii) エ

(iii) $\frac{16}{3}$ cm

(iv) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$ cm

問2 $\frac{20}{3}$ cm

問3 $\frac{25\sqrt{7}}{6}$ cm²

解説

問1

(i)

$\triangle ABF \sim \triangle ACG$ より

AF:AG か BF:CG のどちらかであるが

AF:AG は次に出てくる $\triangle BDF \sim \triangle CDG$ につながらない。

(ii)

$\angle BDF$ と $\angle CDG$ は対頂角である。

(iii)

BD:CD=4:5 より BD:BC=4:(4+5)=4:9 だから

$$BD = \frac{4}{9} BC = \frac{4}{9} \times 12 = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

(iv)

BE=x cm とすると $\triangle ABE$ において三平方の定理より

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 8^2 - x^2 = 64 - x^2$$

$\triangle ACE$ において三平方の定理より

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 10^2 - (12 - x)^2 = -44 + 24x - x^2$$

$$\text{よって } 64 - x^2 = -44 + 24x - x^2$$

$$24x = -108$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$\text{したがって } AE^2 = 64 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{256}{4} - \frac{81}{4} = \frac{175}{4}$$

$$AE > 0 \text{ より } AE = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ cm}$$

問2

$\triangle ADE$ において三平方の定理より

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = AE^2 + (BD - BE)^2 = \left(\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{400}{9}$$

$$\text{よって } AD > 0 \text{ より } AD = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

問3

$$BD = \frac{4}{9} BC \text{ だから } CD = \frac{5}{9} BC = \frac{5}{9} \times 12 = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$\text{また問2より } AD = \frac{20}{3} \text{ cm だから}$$

$\triangle DCA$ は $DC = DA$ の二等辺三角形になる。

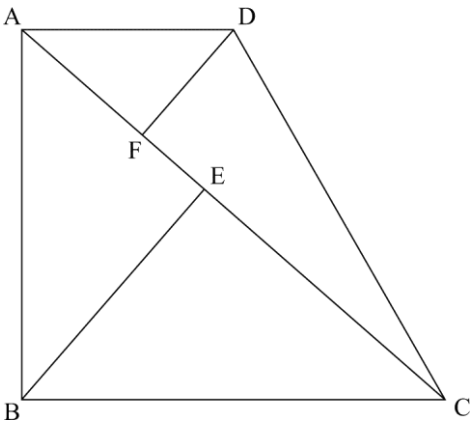
二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に2等分するから $CH = AH$

$$\text{よって } \triangle ADH = \frac{1}{2} \triangle ADC = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times \frac{5\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{25\sqrt{7}}{6} \text{ cm}^2$$

【問 19】

右の図の四角形 $ABCD$ は、 $AB = 3\sqrt{3}$ cm、 $BC = 6$ cm、 $AD \parallel BC$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$ 、 $\angle BCD = 60^\circ$ の台形である。頂点 B から線分 AC にひいた垂線と線分 AC との交点を E 、頂点 D から線分 AC にひいた垂線と線分 AC との交点を F とする。各問いに答えよ。

(奈良県 2017 年度)



- 問1 $\triangle AFD \sim \triangle CEB$ を証明せよ。
- 問2 $\angle DAF = \alpha^\circ$ とするとき、 $\angle CDF$ の大きさを α を用いて表せ。
- 問3 線分 BE の長さを求めよ。
- 問4 $\triangle ABE$ の面積は $\triangle CDF$ の面積の何倍か。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2		
問3		cm
問4		倍

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AFD$ と $\triangle CEB$ において

$AD \parallel BC$ より

錯角は等しいから

$$\angle DAF = \angle BCE \cdots \textcircled{1}$$

仮定から

$$\angle DFA = \angle BEC = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFD \sim \triangle CEB$$

問2 $30^\circ + \alpha^\circ$

$$\text{問3 } \frac{6\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

$$\text{問4 } \frac{6}{5} \text{ 倍}$$

解説

問1

$DF \perp AC$, $BE \perp AC$ より $\angle AFD = \angle CEB = 90^\circ$

また $AD \parallel BC$ より平行線の錯角は等しいから $\angle DAF = \angle BCE$

よって 2 組の角がそれぞれ等しくなるので相似が証明できる。

問2

四角形 ABCD の 4 つの内角の和は 360° だから

$$\angle ADC = 360^\circ - (\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$$

また $\triangle AFD$ において $\angle DAF = \alpha^\circ$, $\angle AFD = 90^\circ$ より $\angle ADF = 180^\circ - (\alpha^\circ + 90^\circ) = 90^\circ - \alpha^\circ$

よって $\angle CDF = 120^\circ - (90^\circ - \alpha^\circ) = 30^\circ + \alpha^\circ$

問3

$\angle ABC = 90^\circ$ だから三平方の定理より $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63$

$AC > 0$ より $AC = 3\sqrt{7}$ cm

ここで $AE = x$ cm とおくと $EC = 3\sqrt{7} - x$ cm

このとき、線分 BE について三平方の定理より

$$BE^2 = BC^2 - EC^2 \dots \textcircled{1}$$

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 \dots \textcircled{2}$$

と 2 通りの方法で表せるから

それぞれの方法で BE^2 を x を使って表す。

$$\textcircled{1} \text{より } BE^2 = 6^2 - (3\sqrt{7} - x)^2 = -x^2 + 6\sqrt{7}x - 27$$

$$\textcircled{2} \text{より } BE^2 = (3\sqrt{3})^2 - x^2 = -x^2 + 27$$

$$\text{よって } -x^2 + 6\sqrt{7}x - 27 = -x^2 + 27$$

整理すると $x = \frac{9\sqrt{7}}{7}$ cm だから

$$BE^2 = -\left(\frac{9\sqrt{7}}{7}\right)^2 + 27 = \frac{756}{49}$$

$BE > 0$ より $BE = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ cm

問4

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \times AE \times BE = \frac{1}{2} \times \frac{9\sqrt{7}}{7} \times \frac{6\sqrt{21}}{7} = \frac{27\sqrt{3}}{7} \text{ cm}^2$$

$\triangle CDF = \frac{1}{2} \times CF \times DF$ だから CF, DF の長さをそれぞれ求める。

まず DF は $\triangle ACD$ において辺 AC を底辺と見たときの高さだから

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{7} \times DF = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3}$$

$$\text{よって } DF = \frac{3\sqrt{21}}{7} \text{ cm}$$

$\triangle ADF$ において三平方の定理より

$$AF^2 = AD^2 - DF^2 = 3^2 - \left(\frac{3\sqrt{21}}{7}\right)^2 = \frac{252}{49}$$

$AF > 0$ より $AF = \frac{6\sqrt{7}}{7}$ cm

$$\text{よって } CF = 3\sqrt{7} - \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{15\sqrt{7}}{7} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } \triangle CDF = \frac{1}{2} \times \frac{15\sqrt{7}}{7} \times \frac{3\sqrt{21}}{7} = \frac{45\sqrt{3}}{14} \text{ cm}^2$$

だから $\triangle ABE$ の面積は $\triangle CDF$ の面積の $\frac{27\sqrt{3}}{7} \div \frac{45\sqrt{3}}{14} = \frac{6}{5}$ 倍

【問 20】

直美さんは、次の写真に写った観覧車の一部を見て、実物の観覧車の外輪の直径を求めることができないかと考えた。次の〈直美さんの考察〉を読み、問1～問3に答えなさい。ただし、観覧車の外輪は円とし、写真において直美さんは、外輪の真下にいるものとする。

写真

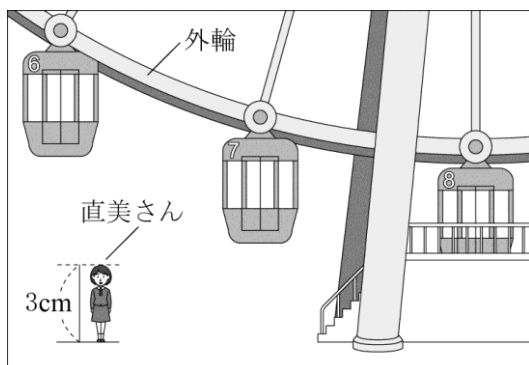
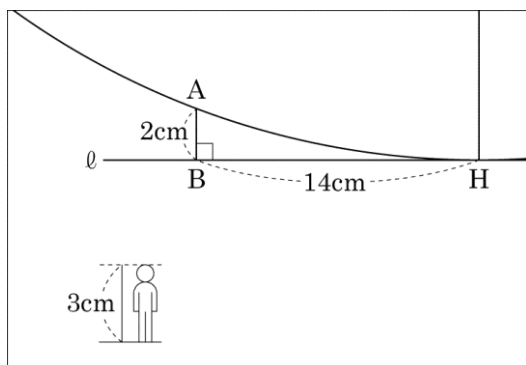


図1



(岡山県 2017 年度 特別)

〈直美さんの考察〉

写真に写った私の身長 (長さ) は 3 cm であった。実物の私の身長が 150 cm なので、写真に写った私と実物の私の比は、1: である。この比を利用して、実物の観覧車の外輪の直径を求める。写真を図1のように、さらに観覧車の外輪全体を図2のように模式化して考えた。

図1において、 $AB=2\text{ cm}$ 、 $BH=14\text{ cm}$ であったので、
 $AH=$ cm である。

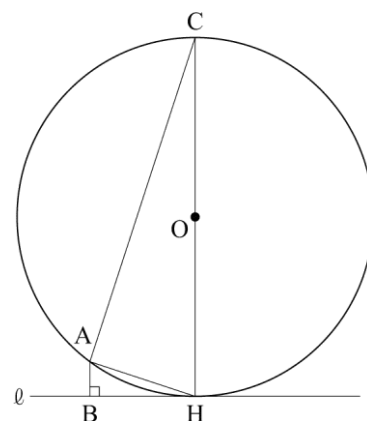
次に、図2において、 $(\text{あ}) \triangle ABH$ と $\triangle HAC$ は相似だから、相似比から線分 CH の長さがわかる。

上で求めた比 1: から、 (い) 実物の観覧車の外輪の直径を求めることができる。

【図1の説明】

- ・点 A, H は、外輪を表す円周上の点
- ・直線 l は、点 H における円の接線
- ・点 B は、点 A から直線 l にひいた垂線と直線 l の交点

図2



【図2の説明】

- ・円 O は観覧車の外輪
- ・線分 CH は円 O の直径

問1 , に適当な数を書き入れなさい。

問2 下線部(あ)について、直美さんは次のように証明した。(3) ～ (5) に適当な記号を書き入れ、＜証明＞を完成させなさい。

＜証明＞

△ABH と△HAC において、

仮定より、 $\angle ABH = 90^\circ \cdots (i)$

線分 CH は円 O の直径より、 $\angle$ (3) $= 90^\circ \cdots (ii)$

(i), (ii) より、

$\angle ABH = \angle$ (3) $\cdots (iii)$

また、線分 BH は点 H における円 O の接線より、

$\angle CHB = 90^\circ \cdots (iv)$

(i), (iv) より、(4) // CH である。よって、平行線の錯角は等しいので、

$\angle BAH = \angle$ (5) $\cdots (v)$

(iii), (v) より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

△ABH ≍ △HAC である。

問3 下線部(い)について、実物の観覧車の外輪の直径は何 m であることを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	cm
問2	(3)	
	(4)	
	(5)	
問3	m	

解答

問1

(1) 50

(2) $10\sqrt{2}$ cm

問2

(3) HAC

(4) AB

(5) AHC

問3 50 m

解説

問1

$3:150=1:50$ となるので(1)に入る数は 50

また三平方の定理より

$$AH^2=AB^2+BH^2=2^2+14^2=200$$

$AH>0$ より

$$AH=10\sqrt{2} \text{ cm で}$$

(2)に入る数は $10\sqrt{2}$

問2

(3)

線分 CH は円 O の直径になるので円周角の大きさは 90° になるから $\angle HAC$

(4)

$\angle CHB=90^\circ$ より同位角が等しいから CH と平行な直線は AB

(5)

平行線の錯角は等しいので $\angle BAH=\angle AHC$

問3

$\triangle ABH \sim \triangle HAC$ より

$$AH:AB=CH:AH$$

$$\text{よって } 10\sqrt{2}:2=CH:10\sqrt{2}$$

$$CH=100 \text{ cm}$$

写真と実物の比が $1:50$ なので

実物の観覧車の外輪の直径は

$$100 \times 50 = 5000 \text{ cm だから } 50 \text{ m}$$

【問 21】

絵理さんと桃子さんは、宝探しイベントに参加した。次は、地図とメッセージカードを見ながら宝の場所について考えている 2 人の会話である。問1～問3に答えなさい。

(岡山県 2017 年度 一般)



＜メッセージカード＞

- ・宝は、3 点 A (市役所), B (病院), C (公民館) からの直線距離が等しい場所にあります。
- ・宝が入っている箱を開けるには、暗証番号が必要です。
- ・暗証番号は、点 A (市役所) から宝の場所までの実際の直線距離 (m) で、4 けたの整数です。
- ・地図上の直線距離は、 $AB=14\text{ cm}$, $BC=13\text{ cm}$, $CA=15\text{ cm}$ です。
- ・地図は 2 万分の 1 の縮尺で、高低差は考えないものとします。

絵理: 地図上の 3 点 A, B, C をそれぞれ結んで模式化した図で考えてみましょう。

桃子: 宝の場所は、図1のように、(あ) 3 点 A, B, C を通る円の中心 O の位置ね。

絵理: 暗証番号は、円の半径 OA の長さがわかれば、計算して求めることができるわ。

桃子: 図1において、円 O をかき、点 O と点 A, 点 O と点 C をそれぞれ結ぶ。点 O, C から線分 AC, AB にそれぞれ垂線 OD, CE をひくと、図2のようになるね。

絵理: (い) $\triangle OAD \sim \triangle BCE$ だから、相似比を使うと、線分 OA の長さを求めることができそうよ。

桃子: そのためには、線分 CE の長さも必要ね。線分 BE の長さを $x\text{ cm}$ とすると、線分 AE の長さは、 x を使って (う) cm と表されるよ。 $\triangle ACE$ と $\triangle BCE$ は直角三角形だから、三平方の定理より、 $x =$ (え) となり、線分 OA の長さがわかるわ。

絵理: 地図は 2 万分の 1 の縮尺だから、実際の直線距離を計算すると、暗証番号は (お) ね。

桃子: それでは、宝を探しに行きましょう。

図1

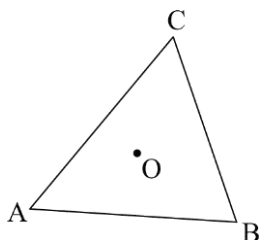
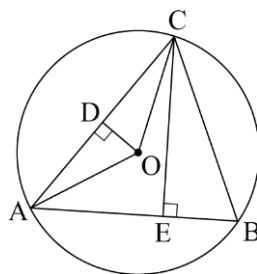


図2



問1 下線部(あ)の中心 O を、定規とコンパスを使って作図しなさい。作図に使った線は残しておきなさい。

問2 下線部(い)を絵理さんは次のように証明した。 (1) には適当な式を書き入れなさい。また、
(2) には証明の続きを書き、＜証明＞を完成させなさい。

＜証明＞

$\triangle OAD$ と $\triangle BCE$ において、

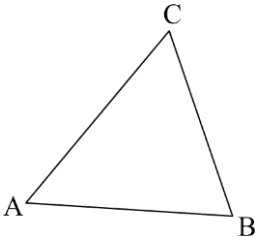
$\triangle OAC$ は、 $OA=OC$ の二等辺三角形だから、 $\angle OAC = \angle OCA$

また、 $OD \perp AC$ だから、 $\angle ODA = \angle ODC = 90^\circ$ よって、 $\angle AOD = \angle COD$

$\angle AOD = \angle \alpha$ とすると、 $\angle AOC$ の大きさは $\angle \alpha$ を使って、 $\angle AOC =$ (1) と表される。

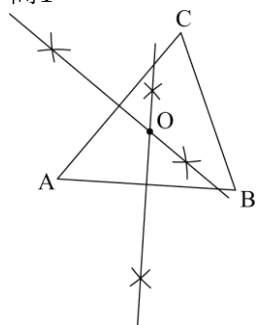
(2)

問3 (う) ～ (お) に適当な数または式を書き入れなさい。

問1		
	(1)	
問2	(2)	
問3	(う)	cm
	(え)	
	(お)	

解答

問1



問2

(1) $2\angle a$

(2)

円周角の定理より

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle a$$

よって

$$\angle AOD = \angle CBE \cdots (i)$$

また, $CE \perp AB$ だから

$$\angle BEC = 90^\circ$$

よって

$$\angle ODA = \angle BEC = 90^\circ \cdots (ii)$$

(i), (ii) から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle OAD \sim \triangle BCE$$

問3

(う) $14 - x$ cm

(え) 5

(お) 1625

解説

問1

円 O が 3 点 A, B, C を通るとき $OA=OB=OC$ となる。

線分 AB の垂直二等分線, 線分 AC の垂直二等分線, 線分 BC の垂直二等分線のうち 2 つを作図しその交点を O とすればよい。

問2

(1)

$\angle COD = \angle AOD = \angle a$ だから $\angle AOC = \angle AOD + \angle COD = \angle a + \angle a = 2\angle a$

(2)

円周角の定理より $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 2\angle a = \angle a$

よって $\angle CBE = \angle a$ だから

$\angle AOD = \angle CBE \cdots \textcircled{1}$

$OD \perp AC, CE \perp AB$ より $\angle ODA = 90^\circ, \angle BEC = 90^\circ$ だから

$\angle ODA = \angle BEC \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OAD \sim \triangle BCE$

問3

(う)

$AE = AB - BE = 14 - x \text{ cm}$

(え)

$\triangle ACE$ において

三平方の定理より

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = 15^2 - (14 - x)^2 = 225 - (196 - 28x + x^2) = 29 + 28x - x^2$$

$\triangle BCE$ において

三平方の定理より

$$CE^2 = BC^2 - BE^2 = 13^2 - x^2 = 169 - x^2$$

$$\text{よって } 29 + 28x - x^2 = 169 - x^2$$

$$28x = 140$$

$$x = 5$$

(お)

$\triangle BCE$ において

三平方の定理より

$$CE^2 = BC^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$CE > 0$ より

$$CE = 12 \text{ cm}$$

$\triangle OAC$ は二等辺三角形で OD は頂角 $\angle AOC$ の二等分線だから

$$AD = CD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

問2より $\triangle OAD \sim \triangle BCE$ だから

$$OA : BC = AD : CE$$

$OA = y \text{ cm}$ とすると

$$y : 13 = \frac{15}{2} : 12$$

$$12y = \frac{195}{2}$$

$$y = \frac{65}{8}$$

地図は $\frac{1}{20000}$ の縮尺だから

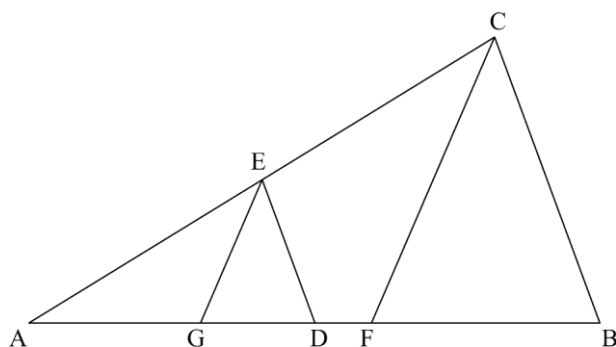
$$\text{実際の直線距離は } \frac{65}{8} \div \frac{1}{20000} = \frac{65}{8} \times 20000 = 162500 \text{ cm}$$

$162500 \text{ cm} = 1625 \text{ m}$ より暗証番号は 1625 である。

【問 22】

図1のように、 $\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 D をとり、辺 AC 上に $BC \parallel DE$ となる点 E をとる。また、線分 BD 上に点 F をとり、線分 AD 上に $AC:AE=BF:DG$ となる点 G をとる。

図1



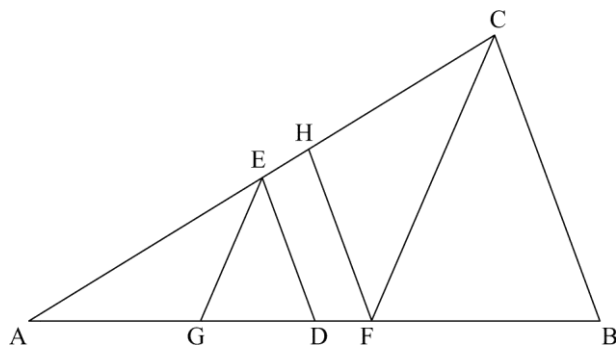
次の問1, 問2に答えなさい。

(山口県 2017 年度)

問1 $\triangle BCF \sim \triangle DEG$ であることを証明しなさい。

問2 図2は、図1の辺 AC 上に、 $DE \parallel FH$ となるように点 H をとったものである。 $AG:GD=3:2$ のとき、 $\triangle AFH$ の面積は $\triangle FBC$ の面積の何倍か。求めなさい。

図2



解答欄

問1	〔証明〕	
問2		倍

解答

問1

〔証明〕

$\triangle BCF$ と $\triangle DEG$ で

$BC \parallel DE$ より

同位角は等しいので

$$\angle FBC = \angle GDE \cdots \textcircled{1}$$

また, $BC \parallel DE$ なので

$$AC:AE = BC:DE \cdots \textcircled{2}$$

仮定から

$$AC:AE = BF:DG \cdots \textcircled{3}$$

②, ③から

$$BC:DE = BF:DG \cdots \textcircled{4}$$

①, ④から

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BCF \sim \triangle DEG$$

問2 $\frac{9}{10}$ 倍

解説

問1

平行線と線分の比の関係から比の等しくなる辺をさがす。

また平行線の同位角が等しくなることを使い相似を証明する。

問2

仮定より

$$AC:AE = BF:DG \cdots \textcircled{ア}$$

問1より

$$\triangle BCF \sim \triangle DEG \text{ だから}$$

$$\angle CFB = \angle EGD \cdots \textcircled{イ}$$

①より

同位角が等しいから

$$CF \parallel EG \cdots \textcircled{ウ}$$

⑤より

$$AC:AE = AF:AG \cdots \textcircled{エ}$$

⑦, ⑤より

$$BF:DG = AF:AG$$

$AF = x$, $BF = y$ とする。

また $AG:GD = 3:2$ より $AG = 3a$, $GD = 2a$ とする。

$$y:2a = x:3a$$

$$3ay = 2ax$$

$$3y = 2x$$

$$x:y = 3:2$$

$BC \parallel DE$, $DE \parallel FH$ より, $BC \parallel FH$ だから

$$AH:HC = AF:FB = 3:2$$

$\triangle AFH = 3S$ とすると $\triangle HFC = 2S$ より $\triangle AFC = 5S$ となる。

$$\triangle FBC = \frac{2}{3} \triangle AFC = \frac{2}{3} \times 5S = \frac{10}{3} S$$

$$\text{よって } 3S \div \frac{10}{3} S = \frac{9}{10} \text{ 倍}$$

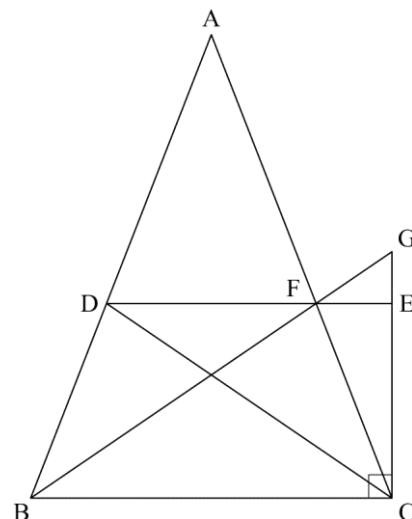
【問 23】

右の図のような、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC がある。 $\angle ACB$ の二等分線と辺 AB との交点を D とする。点 C を通り辺 BC に垂直な直線と、点 D を通り辺 BC に平行な直線との交点を E とする。また、線分 DE と辺 AC との交点を F とし、直線 BF と直線 CE との交点を G とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(香川県 2017 年度)

問1 $\triangle BCG \sim \triangle FEG$ であることを証明せよ。



問2 点 D を通り、直線 BG に平行な直線をひき、直線 CG との交点を H とする。このとき、 $BF=DH$ であることを証明せよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

解答

問1

〔証明〕

$\triangle BCG$ と $\triangle FEG$ において

$\angle G$ は共通

$BC \parallel FE$ より

同位角は等しいから

$\angle BCG = \angle FEG$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BCG \sim \triangle FEG$

問2

〔証明〕

$\triangle BCD$ と $\triangle CBF$ において

BC は共通

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから $\angle DBC = \angle FCB$

$BC \parallel DF$ より $AD:AB = AF:AC$

仮定より $AB = AC$ だから $AD = AF$

$DB = AB - AD = AC - AF = FC$

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BCD \equiv \triangle CBF$

よって $CD = BF \cdots ①$

$\angle BCD = \angle CBF \cdots ②$

また $\triangle DCE$ と $\triangle DHE$ において

DE は共通 $\cdots ③$

$BC \parallel DE$ より

同位角は等しいから

$\angle DEH = \angle BCE = 90^\circ$, $\angle DEC = 180^\circ - \angle DEH = 90^\circ$

よって $\angle DEC = \angle DEH \cdots ④$

$BC \parallel DE$ より

錯角が等しいから

$\angle BCD = \angle CDE$, $\angle CBF = \angle BFD$

②より

$\angle CDE = \angle BFD$

$BG \parallel DH$ より

錯角が等しいから $\angle BFD = \angle HDE$

よって $\angle CDE = \angle HDE \cdots ⑤$

③, ④, ⑤より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle DCE \equiv \triangle DHE$

ゆえに $CD = HD \cdots ⑥$

したがって①, ⑥より

$BF = DH$

解説

問1

$DE \parallel BC$ より平行線の同位角は等しいことと共通な角から

2組の角がそれぞれ等しいことを示し $\triangle BCG \simeq \triangle FEG$ を導く。

問2

線分 BF , 線分 DH を含む三角形はどれも合同にならなそうなので

線分 BF と線分 DH と長さの等しい線分を探す。

このとき $\triangle DBC \equiv \triangle CBF$ ならば $BF = CD$

$\triangle HDE \equiv \triangle CDE$ ならば $DH = DC$ がいえ

$BF = DH$ を証明できる。

まず $\triangle DBC$ と $\triangle CBF$ において

$BC = CB$ (共通)・・・①

$\angle DBC = \angle FCB$ ($\triangle ABC$ が二等辺三角形である)・・・②

$BC \parallel DF$ より $AD : AB = AF : AC$

$AB = AC$ より $AD = AF$ となるから $DB = AB - AD = AC - AF = FC$ ・・・③

①, ②, ③より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle DBC \equiv \triangle FCB$

よって対応する辺の長さは等しいので

$BF = CD$

次に $\triangle HDE$ と $\triangle CDE$ において $DE = DE$ (共通)・・・④

$\angle DEH = \angle DEC = 90^\circ$...⑤

$DH \parallel BG$, $DE \parallel BC$ より平行線の同位角, 錯角が等しいことと $\triangle DBC \equiv \triangle CBF$ から

$\angle HDE = \angle GBC = \angle DCB = \angle CDE$ ・・・⑥

④, ⑤, ⑥より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle HDE \equiv \triangle CDE$

よって対応する辺の長さは等しいので

$DH = DC$

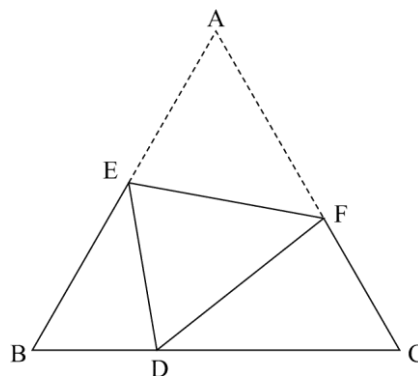
したがって $BF = DH$

【問 24】

図のように、正三角形 ABC の辺 BC 上に $BD:DC=1:2$ となる点 D をとり、頂点 A が点 D と重なるように折り返すと、折り目は辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F を結ぶ線分 EF となった。このとき、次の問1・問2に答えなさい。

(高知県 2017 年度)

問1 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ を証明せよ。



問2 BC=12 cm, CF=5 cm のとき, 三角形 DEF の面積を求めよ。

解答欄

問1	[証明] $\triangle BDE$ と $\triangle CFD$ において したがって $\triangle BDE \cong \triangle CFD$
問2	cm^2

解答

問1

〔証明〕

△BDE と△CFD において

△ABC は正三角形であるから

$$\angle EBD = \angle DCF = 60^\circ \cdots \textcircled{1}$$

仮定から

$$\angle EDF = \angle EAF = 60^\circ \cdots \textcircled{2}$$

△BDE の外角は、それととなり合わない 2 つの内角の和に等しいから

$$\angle EDC = \angle EBD + \angle BED$$

$$= \angle EDF + \angle CDF$$

①, ②より

$$\angle EBD = \angle EDF = 60^\circ \text{ であるから}$$

$$\angle BED = \angle CDF \cdots \textcircled{3}$$

①, ③より

2 組の角がそれぞれ等しい。

したがって△BDE ∽ △CFD

$$\text{問2 } \frac{49\sqrt{3}}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

線分 EF で折り返しているので△AEF と△DEF は重なるから△AEF ≡ △DEF

よって対応する角の大きさが等しくなる。

このことと三角形の内角・外角の性質を利用して証明する。

問2

2 点 A, F から辺 BC に垂線をひきその交点をそれぞれ G, H とする。

このとき△ACG と△FCH は 3 つの角が 90°, 30°, 60° の直角三角形となるので

$$AG = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$FH = \frac{\sqrt{3}}{2} FC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{また } BD:DC = 1:2 \text{ より } DC = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \text{ cm だから}$$

$$\triangle CFD = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{ここで問1より } \triangle BDE \sim \triangle CFD \text{ で } BD = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} \times 12 = 4 \text{ cm だから}$$

△BDE と△CFD の相似比は

$$BD:CF = 4:5$$

よって面積の比は $4^2:5^2 = 16:25$ になるので

$$\triangle BDE = 10\sqrt{3} \times \frac{16}{25} = \frac{32\sqrt{3}}{5} \text{ cm}^2$$

$$\text{四角形 AEDF の面積は } \triangle ABC - \triangle CFD - \triangle BDE = 36\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - \frac{32\sqrt{3}}{5} = \frac{98\sqrt{3}}{5} \text{ cm}^2$$

したがって△AEF ≡ △DEF より

四角形 AEDF の面積は△DEF の面積の 2 倍となるから

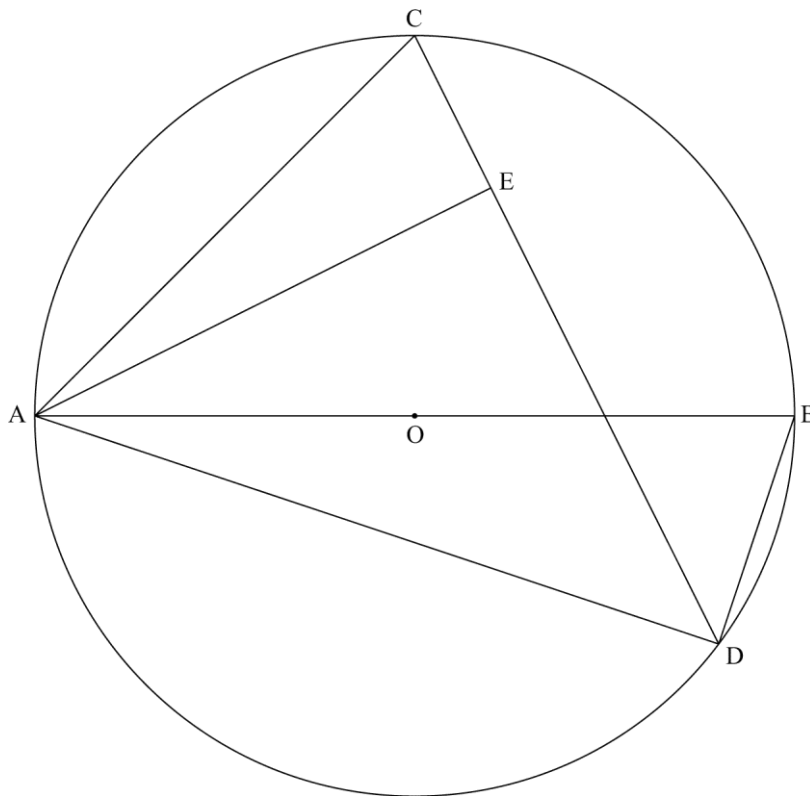
$$\triangle DEF = \frac{98\sqrt{3}}{5} \div 2 = \frac{49\sqrt{3}}{5} \text{ cm}^2$$

【問 25】

線分 AB を直径とする半径 5 cm の円 O がある。下の図のように、 $\widehat{AB}$ 上に点 C を $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ となるようにとり、点 A と点 C を結ぶ。点 C を含まない $\widehat{AB}$ 上に点 D を $AD = 3BD$ となるようにとり、点 A と点 D 、点 B と点 D 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。点 A から線分 CD に垂線をひき、線分 CD との交点を E とする。

次の問1は指示にしたがって、問2は最も簡単な数で答えよ。

(福岡県 2017 年度)



問1 図において、「 $\triangle AEC \sim \triangle ADB$ である」ことを証明せよ。

問2 図において、点 B を通り線分 AE と平行な直線と線分 AD 、 CD との交点をそれぞれ F 、 G とするとき、四角形 $AFGE$ の面積を求めよ。

問1	〔証明〕	
問2	cm ²	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AEC$ と $\triangle ADB$ において

$AE \perp CD$ だから

$$\angle AEC = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

半円の弧に対する円周角は直角だから

$$\angle ADB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \angle AEC = \angle ADB \cdots \textcircled{3}$$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ACE = \angle ABD \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AEC \sim \triangle ADB$

問2 20 cm^2

解説

問1

円周角の定理と半円の弧に対する円周角が直角になることなどを利用して証明する。

問2

$BD = x \text{ cm}$ とすると $AD = 3BD = 3 \times x = 3x \text{ cm}$

$\triangle ADB$ において

三平方の定理より

$AD^2 + BD^2 = AB^2$ が成り立つから

$$(3x)^2 + x^2 = (5+5)^2 \text{ となり}$$

$$x^2 = 10$$

$x > 0$ だから

$$x = \sqrt{10}$$

よって $AD = 3\sqrt{10} \text{ cm}$

$$\widehat{AC} = \widehat{CB} \text{ で線分 } AB \text{ は円 } O \text{ の直径だから } \angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

円周角の定理より $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$ で $\angle AED = 90^\circ$ だから

$\triangle ADE$ は直角二等辺三角形になる。

$$\text{よって } AE = DE = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{10} = 3\sqrt{5} \text{ cm だから}$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = \frac{45}{2} \text{ cm}^2$$

ここで $EA \parallel BF$ より平行線の同位角は等しいから

$\angle GFD = \angle EAD = 45^\circ$, $\angle FGD = \angle AED = 90^\circ$ となるから $\triangle FDG$ も直角二等辺三角形になる。

また $DG = DG$, $\angle BGD = \angle FGD = 90^\circ$, $\angle FDG = \angle BDG = 45^\circ$ より

$\triangle BDG \equiv \triangle FDG$ だから $\triangle BDG$ も直角二等辺三角形である。

よって $\triangle BDG \sim \triangle ADE$ となり

相似比は $BD:AD = 1:3$ で

面積比は $1^2:3^2 = 1:9$ となり

$$\triangle BDG = \frac{1}{9} \triangle ADE = \frac{1}{9} \times \frac{45}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm}^2$$

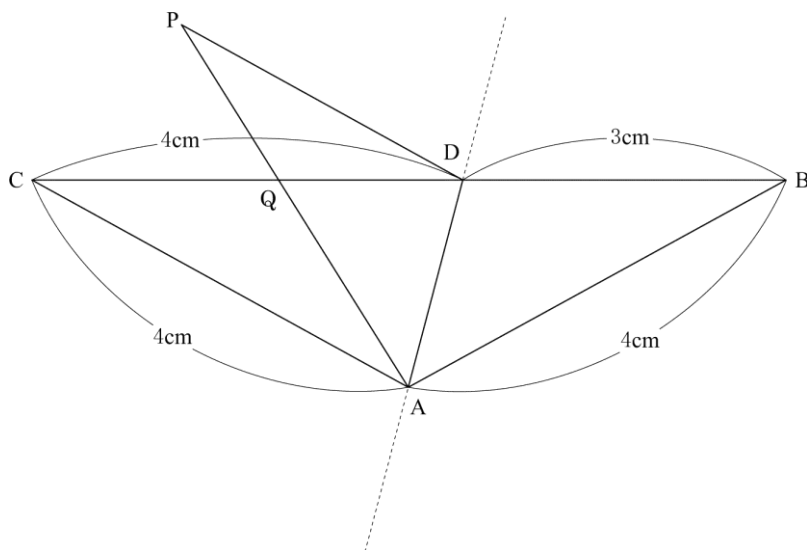
$$\text{したがって } \triangle FDG = \triangle BDG = \frac{5}{2} \text{ cm}^2 \text{ より}$$

$$\text{四角形 } AFGE \text{ の面積は } \triangle ADE - \triangle FDG = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} = 20 \text{ cm}^2$$

【問 26】

下の図のように、 $AB=AC=4\text{ cm}$ 、 $BC=7\text{ cm}$ の二等辺三角形 ABC があり、辺 BC 上に $CD=4\text{ cm}$ となる点 D をとる。 $\triangle ABD$ を、直線 AD を対称の軸として対称移動させた $\triangle APD$ をつくる。線分 CD と線分 PA の交点を Q とするとき、次の問1～問5に答えなさい。

(佐賀県 2017 年度 特色)



問1 線分 PD の長さを求めなさい。

問2 $\angle PDQ = \angle BCA$ であることを、次のように証明した。[証明1]の(ア)～(ウ)にあてはまるものを、下の①～⑤の中からそれぞれ1つずつ選び、番号を書きなさい。

〔証明1〕
 $\angle DCA = x^\circ$ 、 $\angle CDA = y^\circ$ とおくと、
 $\triangle CDA$ は二等辺三角形だから、 $\angle CAD =$ (ア) となり、
 $\angle BDA =$ (イ) となる。
 よって、
 $\angle PDA = \angle BDA$ より、 $\angle PDC = \angle PDA - \angle CDA =$ (ウ) となる。
 したがって、 $\angle PDQ = \angle BCA$ である。

- ① x° ② y° ③ $x^\circ + y^\circ$ ④ $2x^\circ$ ⑤ $y^\circ - x^\circ$

問3 問2で示したことを用いて、 $\triangle QPD \sim \triangle ABC$ であることを、次のように証明した。 に証明の続きを書き、[証明2]を完成させなさい。

〔証明2〕
 $\triangle QPD$ と $\triangle ABC$ において
 問2より、 $\angle PDQ = \angle BCA$ ……①

問4 線分 PQ の長さを求めなさい。

問5 $\triangle PDB$ の面積を S_1 、 $\triangle ADB$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1:S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問3	△QPD と△ABC において 問2より, $\angle PDQ = \angle BCA$ ……①	
問4	cm	
問5	$S_1:S_2=$:	

解答

問1 3 cm

問2

(ア) ②

(イ) ③

(ウ) ①

問3

$\triangle QPD$ と $\triangle ABC$ において

問2より

$\angle PDQ = \angle BCA \cdots ①$

$\triangle ADP$ と $\triangle ADB$ は直線 AD について対称であるから

$\angle DPQ = \angle CBA \cdots ②$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle QPD \sim \triangle ABC$

問4 $\frac{12}{7}$ cm

問5 $S_1:S_2=3:4$

解説

問1

$\triangle APD$ は $\triangle ABD$ を対称移動させたものだから $\triangle APD \equiv \triangle ABD$

よって $PD = BD = 3$ cm

問2

(ア) $\triangle CDA$ は $CA = CD$ の二等辺三角形だから $\angle CAD = \angle CDA = y^\circ$

(イ) $\triangle CDA$ で、三角形の内角・外角の性質より $\angle BDA = \angle DCA + \angle CAD = x^\circ + y^\circ$

(ウ) $\angle PDC = \angle PDA - \angle CDA = \angle BDA - \angle CDA = x^\circ + y^\circ - y^\circ = x^\circ$

問3

もう1つ大きさの等しい角を見つける。

$\triangle APD \equiv \triangle ABD$ より対応する角の大きさは等しいことを利用して求める。

問4

問3より $\triangle QPD \sim \triangle ABC$ だから

$PQ:BA = PD:BC$ より

$PQ:4 = 3:7$

$7PQ = 12$

$PQ = \frac{12}{7}$ cm

問5

問3より $\triangle QPD \sim \triangle ABC$ であり

相似比が $PD:BC = 3:7$ だから

面積の比は $3^2:7^2 = 9:49$ より

$\triangle QPD = 9S$, $\triangle ABC = 49S$ とおく。

ここで $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形で

$\triangle QPD \sim \triangle ABC$ だから $\triangle QPD$ は $QP = QD$ の二等辺三角形。

よって $QD = QP = \frac{12}{7}$ cm より

$\triangle PQD:\triangle PDB = QD:DB = \frac{12}{7}:3 = 4:7$ となるので

, $\triangle PDB = \frac{7}{4} \triangle PQD = \frac{7}{4} \times 9S = \frac{63}{4} S$

また $\triangle ACB:\triangle ADB = CB:DB = 7:3$ より

$\triangle ADB = \frac{3}{7} \triangle ACB = \frac{3}{7} \times 49S = 21S$

したがって $S_1:S_2 = \triangle PDB:\triangle ADB = \frac{63}{4} S:21S = \frac{3}{4}:1 = 3:4$

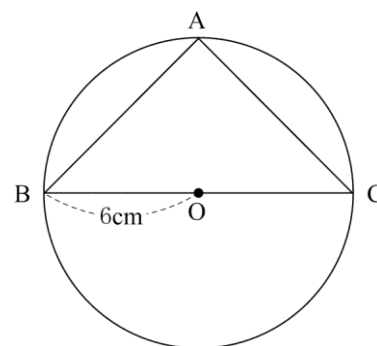
【問 27】

図1, 図2のように, 半径 6 cm の円 O の周上に 3 点 A, B, C がある。線分 BC は円 O の直径で, $AB=AC$ である。このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2017 年度)

問1 $\angle BAC$ の大きさは何度か。

図1

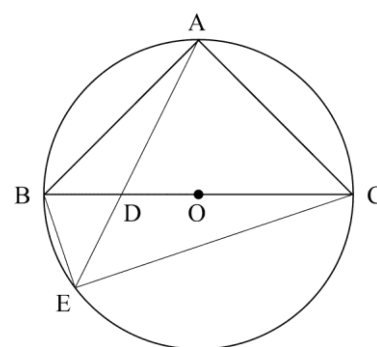


問2 図2のように, 線分 OB の中点を D とし, 直線 AD と円 O との交点のうち, A でないほうの点を E とする。

このとき, 次の(1)~(4)に答えよ。

(1) $\triangle ADC$ の面積は何 cm^2 か。

図2



(2) $\triangle ADC \sim \triangle BDE$ であることを証明せよ。

(3) $\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ の相似比を求めよ。

(4) 四角形 ABEC の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	$\angle BAC = \quad \circ$	
問2	(1)	cm^2
	(2)	
	(3)	$\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ の相似比は $\quad :$
	(4)	cm^2

解答

問1 $\angle BAC = 90^\circ$

問2

(1) 27 cm^2

(2)

$\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ において

$\angle ADC = \angle BDE$ (対頂角) …①

$\angle DAC = \angle DBE$ (同一弧に対する円周角) …②

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADC \sim \triangle BDE$

(3) $\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ の相似比は $\sqrt{5} : 1$

(4) $\frac{288}{5} \text{ cm}^2$

解説

問1

半円の弧に対する円周角は直角である。

問2

(1)

$\triangle ABC$ は $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$ だから直角二等辺三角形になり $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$

また $\triangle OAC$ は $OA = OC$, $\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$ だから直角二等辺三角形で $\angle AOC = 90^\circ$

よって $OD = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$

だから $\triangle ADC$ の面積は $\frac{1}{2} \times (3+6) \times 6 = 27 \text{ cm}^2$

(2)

対頂角が等しくなることや円周角の定理を利用して証明する。

(3)

$AD : BD$ を求める。

$\triangle ADO$ において三平方の定理より

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

$AD >$ より

$$AD = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\text{また } BD = OB - OD = 6 - 3 = 3 \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ADC \text{ と } \triangle BDE \text{ の相似比は } 3\sqrt{5} : 3 = \sqrt{5} : 1$$

(4)

$\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ の

相似比は $\sqrt{5} : 1$ だから

$$\text{面積の比は } (\sqrt{5})^2 : 1^2 = 5 : 1$$

$$\text{よって } \triangle BDE = \frac{1}{5} \triangle ADC = \frac{1}{5} \times 27 = \frac{27}{5} \text{ cm}^2$$

また $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ は底辺をそれぞれ BD , DC としたときの高さが等しいから

$$\triangle ABD : \triangle ADC = BD : DC = 3 : (3+6) = 3 : 9 = 1 : 3$$

$$\text{このことから } \triangle ABD = \frac{1}{3} \triangle ADC = \frac{1}{3} \times 27 = 9 \text{ cm}^2$$

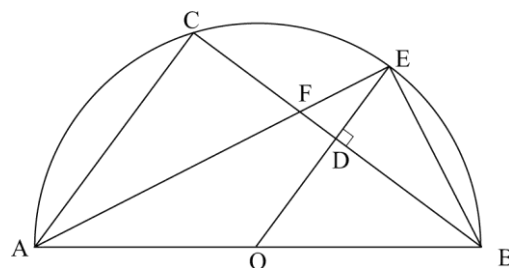
$$\triangle BDE \text{ と } \triangle DCE \text{ についても同様に } \triangle DCE = 3 \triangle BDE = 3 \times \frac{27}{5} = \frac{81}{5} \text{ cm}^2$$

$$\text{したがって四角形 ABEC の面積は } \triangle ABD + \triangle ADC + \triangle BDE + \triangle DCE = 9 + 27 + \frac{27}{5} + \frac{81}{5} = \frac{288}{5} \text{ cm}^2$$

【問 28】

右の図は、線分 AB を直径とする半円で、点 O は AB の中点である。点 C は $\widehat{AB}$ 上にあり、点 D は線分 BC 上にあって、 $OD \perp BC$ である。点 E は OD の延長と $\widehat{BC}$ との交点、点 F は線分 AE と線分 BC との交点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。



(熊本県 2017 年度)

問1 $\triangle AFC \sim \triangle BED$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=10\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 DE の長さを求めなさい。

(2) 線分 AF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle AFC$ と $\triangle BED$ において

$\angle FAC$ と $\angle EBD$ は $\widehat{CE}$ に対する円周角だから

$$\angle FAC = \angle EBD \cdots \textcircled{1}$$

AB は半円の直径だから

$$\angle ACF = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方, $OD \perp BC$ だから

$$\angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ACF = \angle BDE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFC \sim \triangle BED$$

問2

(1) 2 cm

(2) $3\sqrt{5} \text{ cm}$

解説

問1

半円の弧に対する円周角は 90° になるので $\angle ACF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$$OD \perp BC \text{ より } \angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ACF = \angle BDE = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$\widehat{CE}$ に対する円周角なので

$$\angle CAF = \angle DBE \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AFC \sim \triangle BED$$

問2

(1)

$\angle BDO = 90^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$ より同位角が等しいので $AC \parallel OD$

点 O は線分 AB の中点だから中点連結定理より $AC = 2OD$ がいえる。

よって, AC の長さを求めると三平方の定理より

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$AC > 0$ より

$$AC = 6 \text{ cm} \text{ だから } OD = 3 \text{ cm}$$

$$\text{したがって } DE = OE - OD = 5 - 3 = 2 \text{ cm}$$

(2)

問1より $\triangle AFC \sim \triangle BED$ だから

$$CA : AF = DB : BE$$

ここで $\triangle ODB$ において $\angle BDO = 90^\circ$, $OB = 5 \text{ cm}$, $OD = 3 \text{ cm}$ だから

$$\text{三平方の定理より } DB^2 = OB^2 - OD^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$DB > 0$ より

$$DB = 4 \text{ cm}$$

同様に $\triangle EDB$ において三平方の定理より

$$EB^2 = ED^2 + DB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$EB > 0$ より

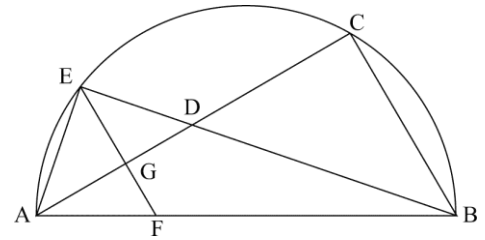
$$EB = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

よって $6 : AF = 4 : 2\sqrt{5}$ だから

$$AF = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 29】

右の図は、線分 AB を直径とする半円で、点 C は $\widehat{AB}$ 上にある。点 D は線分 AC 上の点であって、点 E は BD の延長と $\widehat{AC}$ との交点である。点 F は線分 AB 上にあつて、 $EF \parallel CB$ であり、点 G は線分 AC と線分 EF との交点である。



(熊本県 2017 年度)

問1 次の(a), (b)の に当てはまる三角形を答えなさい。

図において、 $\triangle ADE$ と相似な三角形は 3 つあり、その関係をそれぞれ記号 $\sim$ を使って表すと、

$\triangle ADE \sim \triangle BDC$

(a) $\triangle ADE \sim$

(b) $\triangle ADE \sim$ となる。

問2 問1の(a)と(b)のうち、どちらか一方を選択して証明しなさい。なお、解答欄の () の中に、選択した方の記号を書くこと。

問3 $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $AD = DC$ のとき、線分 FG の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(a)		(b)	
問2	選択した方 ()			
	〔証明〕			
問3	cm			

解答

問1

(a) $\triangle EDG$

(b) $\triangle AEG$

問2

選択した三角形が $\triangle EDG$ のとき

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle EDG$ において

2 つの三角形に共通な角だから

$$\angle ADE = \angle EDG \cdots \textcircled{1}$$

AB は半円の直径だから

$$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方, $EF \parallel CB$ だから

$$\angle EGD = \angle ACB \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle AED = \angle EGD \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle EDG$$

選択した三角形が $\triangle AEG$ のとき

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle AEG$ において

2 つの三角形に共通な角だから

$$\angle DAE = \angle EAG \cdots \textcircled{1}$$

AB は半円の直径だから

$$\angle AED = \angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方 $EF \parallel CB$ だから $\angle AGF = \angle ACB = 90^\circ$

$$\text{よって } \angle AGE = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle AED = \angle AGE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle AEG$$

問3 $\frac{12}{7} \text{ cm}$

解説

問1, 問2

まず等しくなる角を見つける。

対頂角は等しくなるので $\angle EDA = \angle CDB \cdots ①$

$\widehat{EC}$ に対する円周角は等しいので $\angle EAC = \angle EBC \cdots ②$

半円の弧に対する円周角は直角になるので $\angle AEB = \angle ACB = 90^\circ \cdots ③$

$EF \parallel CB$ より平行線の錯角は等しいから $\angle EGD = \angle BCD = 90^\circ \cdots ④$

④から $EF \perp AD$ がいえるので $\angle AGE = 90^\circ \cdots ⑤$

よって①と②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle BDC$

$\angle EDG$ は共通で

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle EDG$

$\angle EAD$ は共通で

③, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle AEG$

問3

線分 AB の中点は、図の半円の中心になるので O とおく。

このとき $AD = DC$, $AO = OB$ だから

中点連結定理より $OD \parallel BC$, $OD = \frac{1}{2} BC = 3 \text{ cm}$ となる。

よって平行線と線分の比から $AD : AG = OD : FG$ より線分 FG の長さを求めることができる。

$AD = \frac{1}{2} AC$ なので AC の長さを求めると

$\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 6 \text{ cm}$, $AB = 12 \text{ cm}$ より

三平方の定理から $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 12^2 - 6^2 = 108$

$AC > 0$ より

$AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ となるから $AD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

問1より $\triangle ADE \sim \triangle AEG$ だから

$AE : AD = AG : AE \cdots ①$

また $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ より $AE : AD = BC : BD \cdots ②$ がいえる。

ここで $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = 6 \text{ cm}$, $DC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ より

三平方の定理から $BD^2 = BC^2 + DC^2 = 6^2 + (3\sqrt{3})^2 = 63$

$BD > 0$ より

$BD = 3\sqrt{7} \text{ cm}$ となるから

②に代入して整理すると $AE = \frac{6}{7}\sqrt{21} \text{ cm}$

これを①に代入すると $\frac{6}{7}\sqrt{21} : 3\sqrt{3} = AG : \frac{6}{7}\sqrt{21}$

よって $AG = \frac{12}{7}\sqrt{3} \text{ cm}$

したがって $AD : AG = OD : FG$ だから

$3\sqrt{3} : \frac{12}{7}\sqrt{3} = 3 : FG$

$FG = \frac{12}{7} \text{ cm}$

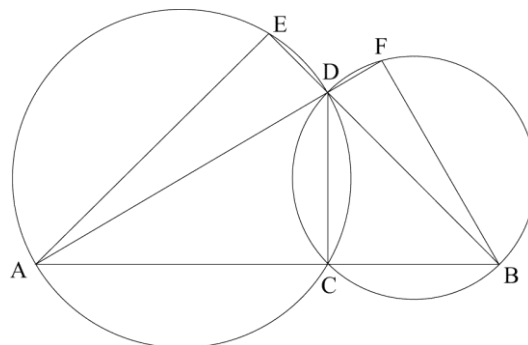
【問 30】

右の図で、線分 AB 上に点 C があり、点 C を通り線分 AB に垂直な直線上に、 $CB=CD$ となる点 D がある。

線分 BD の延長と 3 点 A, C, D を通る円との交点を E とし、線分 AD の延長と 3 点 B, C, D を通る円との交点を F とする。

次の問1, 問2に答えなさい。

(大分県 2017 年度)



問1 次の〔証明〕は、 $\triangle ADE \sim \triangle BDF$ であることを証明したものである。

ア に続きを書き、〔証明〕を完成させなさい。

〔証明〕

$AB \perp CD$ より、

3 点 A, C, D を通る円において、 $\angle ACD = 90^\circ$ だから、線分 AD は直径となり、

3 点 B, C, D を通る円において、 $\angle BCD = 90^\circ$ だから、線分 BD は直径となる。

$\triangle ADE$ と $\triangle BDF$ において、

ア

問2 $BC = 3 \text{ cm}$, $\triangle ADE$ と $\triangle BDF$ の面積比を $2:1$ とする。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 AC の長さを求めなさい。

(2) $\triangle BDF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	ア		
問2	(1)	cm	
	(2)	cm ²	

解答

問1

ア

線分 AD を直径とする円の周上に点 E があるから

$$\angle AED = 90^\circ$$

線分 BD を直径とする円の周上に点 F があるから

$$\angle BFD = 90^\circ$$

$$\text{よって } \angle AED = \angle BFD = 90^\circ \cdots \boxed{1}$$

また, 対頂角は等しいから

$$\angle ADE = \angle BDF \cdots \boxed{2}$$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADE \sim \triangle BDF$$

問2

$$(1) \ 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$(2) \ \frac{9}{4} \text{ cm}^2$$

解説

問1

半円の弧に対する円周角は直角であることと対頂角が等しくなることを利用して証明する。

問2

(1)

$$\triangle CBD \text{ は } CB=CD, \angle BCD=90^\circ \text{ の直角二等辺三角形だから } BD=\sqrt{2} \ BC=\sqrt{2} \times 3=3\sqrt{2} \text{ cm}$$

問1より $\triangle ADE \sim \triangle BDF$ だから

$\triangle ADE$ と $\triangle BDF$ の面積比が 2:1 のとき

$$\text{相似比は } AD:BD=\sqrt{2}:\sqrt{1}=\sqrt{2}:1 \text{ より } AD=\sqrt{2} \ BD=\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}=6 \text{ cm}$$

よって $CD=CB=3 \text{ cm}$ だから

$\triangle ACD$ において

$$\text{三平方の定理より } AC^2=AD^2-CD^2=6^2-3^2=27$$

$AC>0$ より

$$AC=3\sqrt{3} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle EAB$ は $\angle AEB=90^\circ$, $\angle EBA=45^\circ$, $\angle EAB=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=45^\circ$ だから直角二等辺三角形である。

$AB=AC+CB=3\sqrt{3}+3 \text{ cm}$ だから

$$AE=BE=\frac{1}{\sqrt{2}} AB=\frac{1}{\sqrt{2}} (3\sqrt{3}+3)=\frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{3}+3)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$DE=BE-BD=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}-\frac{6\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

$$\triangle ADE \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}=\frac{(3\sqrt{6}+3\sqrt{2})(3\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{8}=\frac{54-18}{8}=\frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

よって $\triangle ADE:\triangle BDF=2:1$ より

$$\triangle BDF=\frac{1}{2} \triangle ADE=\frac{1}{2} \times \frac{9}{2}=\frac{9}{4} \text{ cm}^2$$

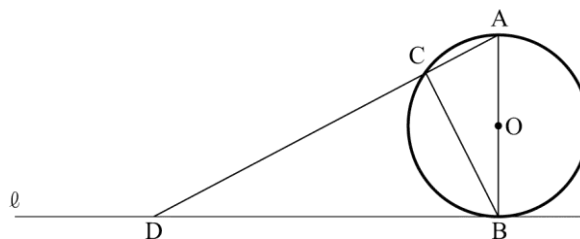
【問 31】

図1のように、線分 AB を直径とする円 O と直線 ℓ があり、 ℓ は点 B で円 O に接している。円 O の円周上に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。

直線 AC と ℓ との交点を D とするとき、次の問1～問3に答えなさい。

(宮崎県 2017 年度)

図1

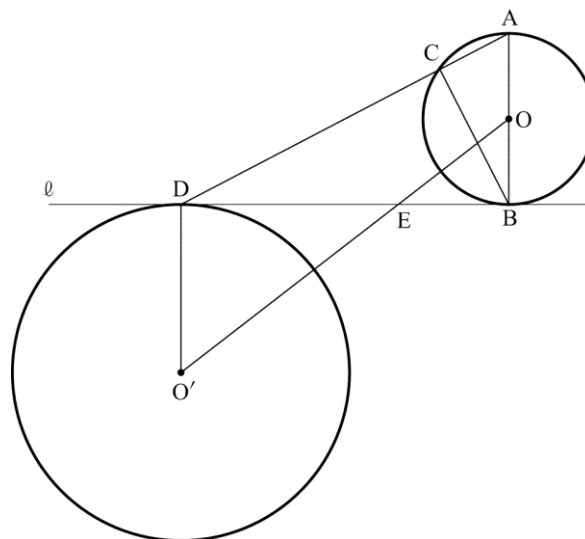


問1 $\angle ACB$ の大きさを求めなさい。

問2 $\triangle ABC$ の $\triangle ADB$ であることを証明しなさい。

問3 図2は、図1において、点 D で ℓ に接する円 O' をかいたものである。線分 OO' をひき、 ℓ と OO' との交点を E とする。 $OO' = 5 \text{ cm}$ 、円 O 、 O' の半径をそれぞれ、 1 cm 、 2 cm とするとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

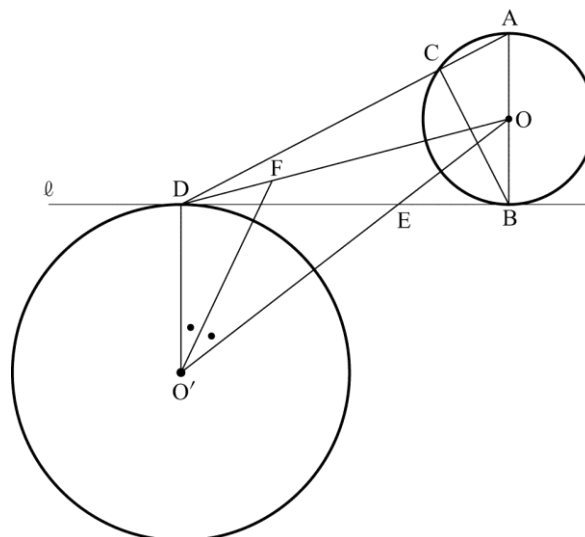
図2



(1) 線分 DE の長さを求めなさい。

(2) 図3は、図2において、線分 DO をひいたものである。 $\angle DO'O$ の二等分線と DO との交点を F とするとき、 $\triangle DO'F$ の面積を求めなさい。

図3



解答欄

問1	$\angle ACB =$ 度	
問2	〔証明〕 $\triangle ABC$ と $\triangle ADB$ で,	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答

問1 $\angle ACB = 90^\circ$ 度

問2

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle ADB$ で

直径に対する円周角だから

$$\angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

円の接線はその接点を通る半径に垂直だから

$$\angle ABD = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$\angle ACB = \angle ABD \cdots \textcircled{3}$$

共通な角だから

$$\angle CAB = \angle BAD \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle ADB$$

問3

$$(1) \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{8}{7} \text{ cm}^2$$

解説

問1

半円の弧に対する円周角は 90° になるので $\angle ACB = 90^\circ$

問2

$\triangle ABC$ と $\triangle ADB$ で共通な角があることと

$\widehat{AB} = \widehat{AD}$ より半円の弧に対する円周角が 90° になること

円の接線はその接点を通る半径に垂直であることを使って

2組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問3

(1)

$$\angle O'DE = \angle OBE = 90^\circ, \angle O'ED = \angle OEB = 90^\circ \text{ より}$$

$$\angle O'DE \sim \triangle OBE \text{ だから}$$

$$O'D : OB = 2 : 1$$

$$O'E : OE = 2 : 1$$

$$O'O = 5 \text{ cm} \text{ だから}$$

$$O'E = \frac{10}{3}$$

$$\text{よって三平方の定理より } DE^2 = O'E^2 - O'D^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2^2 = \frac{64}{9}$$

$$DE > 0 \text{ より } DE = \frac{8}{3}$$

(2)

$\triangle DO'O$ の面積がわかれば三角形の角の二等分線と線分の比の関係から $\triangle DO'F$ の面積が求められる。

$$\text{ここで } EB = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \text{ となるから}$$

$$DB = DE + EB = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4 \text{ より}$$

$$\triangle DO'O = \triangle ADB + \triangle O'DE - \triangle OEB - \triangle ADO$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 4 + \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - 2 = 4 \text{ cm}^2$$

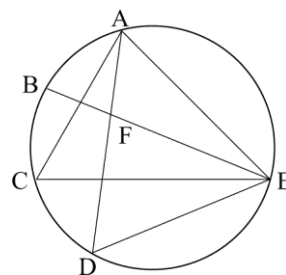
三角形の角の二等分線と線分の比の関係から $DF : FO = O'D : O'O = 2 : 5$ だから

$$\triangle DO'F = \frac{2}{7} \times 4 = \frac{8}{7} \text{ cm}^2$$

【問 32】

右の図の円において、 $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}$ で、線分 BE と線分 AD の交点を F とするとき、 $\triangle ACE \sim \triangle FDE$ であることを証明せよ。

(鹿児島県 2017 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ACE$ と $\triangle FDE$ において

$\widehat{AE}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ACE = \angle FDE \cdots \text{①}$$

$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}$ より $\widehat{AC}=\widehat{BD}$ であるから

$$\angle AEC = \angle FED \cdots \text{②}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACE \sim \triangle FDE$$

解説

$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}$ より $\widehat{AC}=\widehat{BD}$ であることを利用する。

また円周角の定理を利用して証明する。

【問 33】

右の図のように、半径 **6 cm** の円 **O** の周上に **6** つの点 **A, B, C, D, E, F** があり、これらの点は円周を **6** 等分している。ここで、線分 **AE** と線分 **BF** の交点を **G** とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

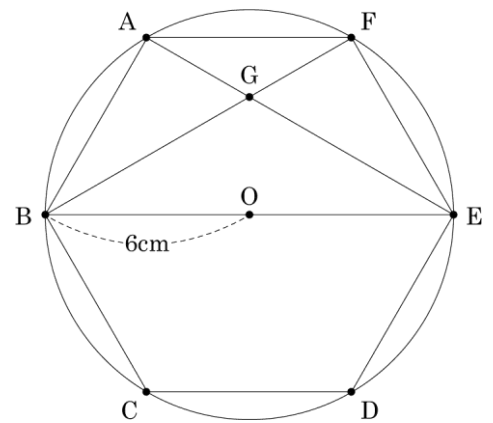
(沖縄県 2017 年度)

問1 $\angle BAE$ の大きさを求めなさい。

問2 $\triangle AGF \sim \triangle BGE$ であることを証明しなさい。

問3 線分 AG の長さを求めなさい。

問4 $\triangle AGF$ と四角形 $BCDE$ の面積の比を求めなさい。



解答欄

問1	$\angle BAE = \quad \circ$
問2	$\triangle AGF$ と $\triangle BGE$ において $\triangle AGF \sim \triangle BGE$
問3	cm
問4	:

解答

問1 $\angle BAE = 90^\circ$

問2

$\triangle AGF$ と $\triangle BGE$ において

同じ弧に対する円周角は等しいので

$$\angle FAG = \angle EBG \cdots \textcircled{1}$$

また対頂角は等しいので

$$\angle AGF = \angle BGE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AGF \sim \triangle BGE$$

問3 $2\sqrt{3}$ cm

問4 1:9

解説

問1

半円の弧に対する円周角は直角であるから $\angle BAE = 90^\circ$

問2

円周角の定理と対頂角は等しくなることを利用して証明する。

問3

$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA} \text{ だから}$$

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = 360^\circ \div 6 = 60^\circ$$

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF \text{ だから}$$

$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODE$, $\triangle OEF$, $\triangle OFA$ はすべて1辺の長さが6 cmの正三角形になる。

問2より

$$\triangle AGF \sim \triangle BGE \text{ であるが}$$

$$\triangle AGF \sim \triangle EGB \text{ と考えることもできるから}$$

$$AG:EG = AF:EB = 6:(6+6) = 6:12 = 1:2$$

$\triangle ABE$ は3つの角が 90° , 30° , 60° の直角三角形となるから

$$AE = \sqrt{3} AB = \sqrt{3} \times 6 = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって } AG = \frac{1}{3} AE = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

問4

$$\triangle AGF = S \text{ とすると}$$

$$\text{問3より } AG:EG = 1:2 \text{ だから}$$

$$\triangle EGF = 2\triangle AGF = 2S$$

$$\text{また } FG:BG = AG:EG = 1:2 \text{ だから}$$

$$\triangle EGB = 2\triangle EGF = 2 \times 2S = 4S$$

$$\triangle AGB = 2\triangle AGF = 2S$$

四角形 BCDE の面積は四角形 ABEF の面積と等しいから

$$\triangle AGF + \triangle EGF + \triangle EGB + \triangle AGB = S + 2S + 4S + 2S = 9S$$

よって求める面積の比は $S:9S = 1:9$