3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2009 年度出題】

【問 1】

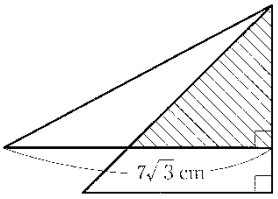
太郎君，花子さん，次郎君は数学の授業で三角定規を組み合わせて問題づくりをした。

次の問1～問3に答えなさい。

（青森県 2009 年度）

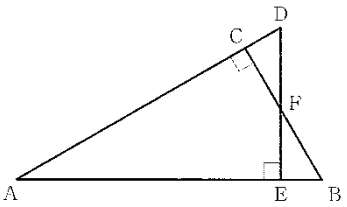
問1. 太郎君は，図 1 のように 1 組の三角定規を重ねた。斜線部の面積を求めなさい。

図 1



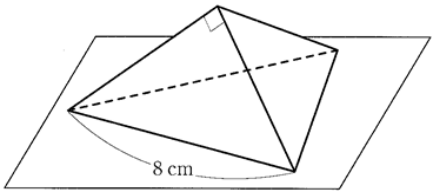
問2. 花子さんは，図2のように 60° の角をもつ同じ大きさの三角定規 2 枚を重ねた。△CDF と△EBF が合同になることを証明しなさい。

図2



問3. 次郎君は，図3のように 45° の角をもつ同じ大きさの三角定規 3 枚で，三角すいを机の上に組み立てた。この三角すいの体積を求めなさい。ただし，三角定規の厚さは考えないものとする。

図3



解答欄

問1	cm^2
問2	証明
問3	cm^3

解答

問1. $\frac{49}{2}\,\mathrm{cm}^2$

問2.

証明

△CDF と△EBF で

∠DCF＝∠BEF＝90°…①

∠CDF＝∠EBF＝60°…②

仮定より AD＝AB, AC＝AE

また CD＝AD－AC, EB＝AB－AE

よって

CD＝EB…③

①②③より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△CDF≡△EBF

問3. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$

解説

問3.

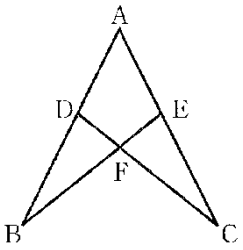
直角二等辺三角形の等しい 2 辺の長さは, $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ cm

三角すいの体積は, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$

【問 2】

図において，線分 AB 上に点 D，線分 AC 上に点 E があり，線分 CD と線分 BE の交点を F とする。AD＝AE，∠ADC＝∠AEB であるとき，△ACD と合同な三角形を答えなさい。また，それらが合同であることを証明するときに使う三角形の合同条件を書きなさい。

（秋田県 2009 年度）



解答欄

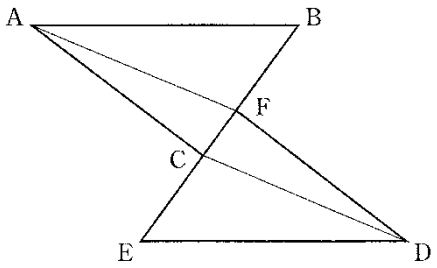
合同な三角形 ： △
合同条件 ：

解答
合同な三角形 ： △ABE
合同条件 ： 一辺とその両端の角がそれぞれ等しい

【問 3】

図で，△ABC≡△DEF で，4 点 B，F，C，E は，1 つの直線上にある。点 A と点 F，点 D と点 C をそれぞれ結ぶとき，△ABF≡△DEC であることを証明しなさい。

（栃木県 2009 年度）



解答欄

証明

解答
△ABF と△DEC において
△ABC≡△DEF より
AB＝DE…①
∠ABF＝∠DEC…②
BC＝EF…③
また
BF＝BC－CF…④
EC＝EF－CF…⑤
③，④，⑤より
BF＝EC…⑥
①，②，⑥より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABF≡△DEC

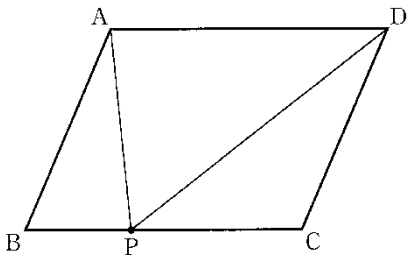
【問 4】

図 1 で, 四角形 ABCD は, ∠ABC が鋭角の平行四辺形である。点 P は辺 BC 上にある点で, 頂点 B, 頂点 C のいずれにも一致しない。頂点 A と点 P, 頂点 D と点 P をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都 2009 年度）

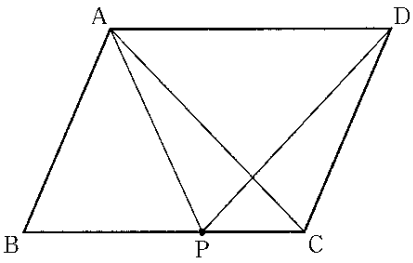
図 1



問1. 図 1 において, ∠ABC＝75°, △ABP の内角である∠BAP の大きさを $a°$ とするとき, △APD の内角である∠PAD の大きさを a を用いた式で表せ。

問2. 図 2 は, 図 1 において, 頂点 A と頂点 C を結んだとき, AC＞AB となる場合を表している。図 2 において, AB＝AP のとき, 次の(1), (2)に答えよ。

図 2



(1) △APD≡△DCA であることを証明せよ。

(2) 対角線 AC と線分 DP との交点を Q とした場合を考える。AB＝3 cm, BC＝6 cm, BP＝4 cm のとき, △AQD の面積は何 cm^2 か。ただし, 答えに根号が含まれるときは, 根号を付けたままで表せ。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">(　　) 度</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>証明
△APD と△DCA において,

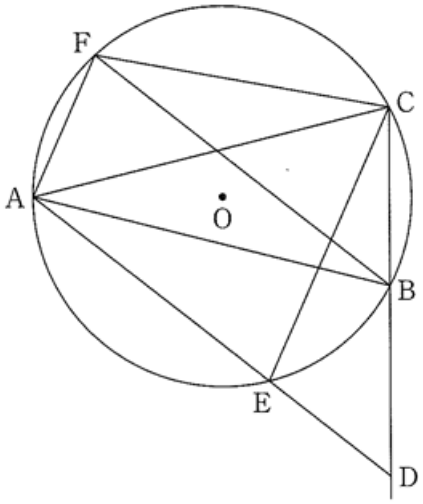
△APD≡△DCA</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1. $(105-a)$度
問2.
(1)
証明
△APD と△DCA において
共通な辺だから
AD＝DA…①
仮定から
AP＝AB
四角形 ABCD は平行四辺形だから
AB＝DC
よって
AP＝DC…②
平行線の錯角は等しいから
∠PAD＝∠APB
△ABP は二等辺三角形だから
∠APB＝∠ABP
四角形 ABCD は平行四辺形だから
∠ABP＝∠CDA
よって
∠PAD＝∠CDA…③
①, ②, ③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△APD≡△DCA
(2)
$\frac{9\sqrt{5}}{4}$ cm^2
解説
問2.
(2)
△ABP は AB＝AP の二等辺三角形より,
A から BP に垂線 AM をひくと, BM＝$\frac{1}{2}$BP＝$\frac{1}{2}$×4＝2cm
△ABM において, 三平方の定理より, AM＝$\sqrt{3^2-2^2}$ ＝$\sqrt{5}$ cm
よって, △ACD＝△ABC＝$\frac{1}{2}$×6×$\sqrt{5}$ ＝$3\sqrt{5}$ cm^2
ここで, AD ∥ QC より,
AQ : PC＝AD : PC＝6 : (6－4)＝3 : 1
よって, △AQD＝$\frac{3}{4}$△ACD
＝$\frac{3}{4}$×$3\sqrt{5}$
＝$\frac{9\sqrt{5}}{4}$ cm^2

【問 5】

図のように，円 O の周上に 3 点 A, B, C を AB＝AC, AB＞BC となるようにとる。また，線分 CB を B の方向に延ばした直線上に点 D を AC＝CD となるようにとり，線分 AD と円 O との交点で点 A とは異なる点を E とする。さらに，点 B をふくまない $\overset{\frown}{AC}$ 上に点 F を DA//BF となるようにとる。

このとき，次の問いに答えなさい。



（神奈川県 2009 年度）

問1. 三角形 ACF と三角形 DCE が合同であることを次のように証明した。空欄にあてはまるものとして，[(a)] には最も適する弧を記号 $\overset{\frown}{\ }$ を用いて書き，[(b)] には最も適する角を記号∠を用いて書き，[(c)] には［証明］で用いられている②～⑦の中から最も適するものを 1 つ選んで書きなさい。

また，[(あ)] ，[(い)] には【選択群】から最も適するものをそれぞれ 1 つずつ選び，その番号を書きなさい。

証明

△ACF と△DCE において，

まず，仮定から，AC＝CD

よって，AC＝DC…①

次に，[(a)] に対する円周角は等しいから，

∠ACF＝∠ABF…②

また，平行線の錯角は等しいから，

∠ABF＝∠BAE…③

さらに，$\overset{\frown}{BE}$ に対する円周角は等しいから，

∠BAE＝∠BCE…④

②，③，④より，∠ACF＝∠BCE

よって，∠ACF＝∠DCE…⑤

さらに，$\overset{\frown}{CF}$ に対する円周角は等しいから，

∠CAF＝∠CBF…⑥

また，[(あ)] から，

[(b)] ＝∠CDA…⑦

⑥，⑦より，∠CAF＝∠CDA

よって，∠CAF＝∠CDE…⑧

①，[(c)] ，⑧より，[(い)] から，

△ACF ≡ △DCE

【選択群】

1. 平行線の同位角は等しい
2. 平行線の錯角は等しい
3. 対頂角は等しい
4. 3 辺がそれぞれ等しい
5. 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい
6. 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい

問2. ∠BAC＝28° のとき，∠ACE の大きさを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(あ)	
	(b)	
	(c)	◯
	(い)	
問2	∠ACE＝　　°	

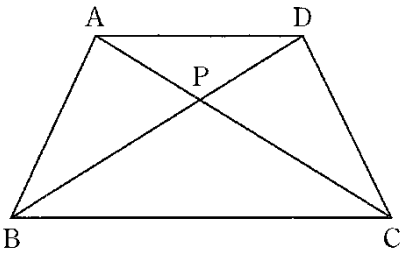
解答
問1 (a) $\overset{\frown}{\mathrm{AF}}$　(あ) 1　(b) ∠CBF　(c) ⑤　(い) 6　問2 ∠ACE＝52°
解説
問2
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから,
∠ACB＝(180° －28°)÷2＝76°
△CAD は CA＝CD の二等辺三角形だから,
∠CAD＝(180° －76°)÷2＝52°
よって, ∠BAE＝52° －28° ＝24° ,
弧 BE の円周角より, ∠BCE＝∠BAE＝24°
したがって, ∠ACE＝76° －24° ＝52°

【問 6】

図 1 のような四角形 ABCD があり, AB＝AD＝DC, ∠BAD＝∠CDA である。対角線 AC と BD の交点を P とする。次の各問いに答えなさい。

（長野県 2009 年度）

図 1



問1. 図 1 で, 美希さんは,「△ABP≡△DCP を証明しなさい」という問題を考えている。美希さんは, この証明をするために, まず△ABD≡△DCA を証明しようと考えた。

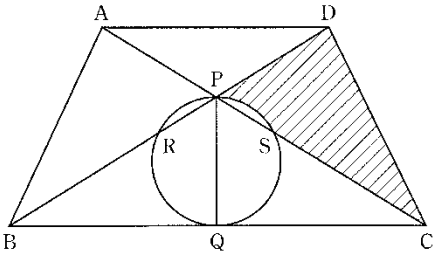
(1) △ABD≡△DCA を証明しなさい。

(2) 美希さんは, (1)の結論を利用して, △ABP≡△DCP を次のように証明した。

△ABP と△DCP において,
仮定から, AB＝DC …①
あ対頂角だから, ∠APB＝∠DPC …②
△ABD と△DCA は合同な三角形だから,
∠ABP＝∠DCP …③
い②, ③と, 三角形の内角の和が 180° であることから,
∠PAB＝∠PDC …④
う③, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいので,
△ABP≡△DCP

証明を見直した美希さんは, この証明の中にまちがいがあることに気づいた。まちがえているものを下線部あ, い, うから 1 つ選んで記号を書き, 正しく書き直しなさい。

図 2



問2. 図 2 は, 図 1 の図形で, AB＝AD＝DC＝$2\sqrt{3}$ cm, ∠BAD＝∠CDA＝120° としたものである。また, P から辺 BC に垂線 PQ をひき, PQ を直径とする円をかく。その円周と PB, PC との交点をそれぞれ R, S とする。ただし, 円周率はπとする。

(1) ∠APB の大きさを求めなさい。

(2) 線分 PS の長さを求めなさい。

(3) 図 2 の図形で, 成り立つことを次のア～オから 2 つ選び, 記号を書きなさい。

ア AD:RD＝4:3

イ AP＋PB＝DP＋PC

ウ ∠ADB＝∠CDB

エ ∠ADP＋∠DCP＝90°

オ BC＝2AD

(4) 斜線部分の面積を求めなさい。

解答欄

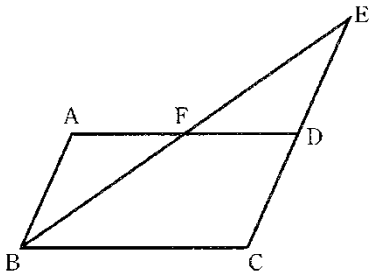
<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(1)</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>記号</td><td>書き直したもの</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">問2</td><td>(1)</td><td colspan="2">°</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">m</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="2">m^2</td></tr>
</table>

解答
問1.
(1)
証明
△ABD と△DCA において
仮定から
AB＝DC…①
∠BAD＝∠CDA…②
共通だから
AD＝DA…③
①, ②, ③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABD≡△DCA
(2)
(記号) う
(書き直したもの) ①, ③, ④より, 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
問2.
(1)60　　(2)1　　(3) イ, オ　　(4) $\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$
解説
問2.
(1)
△ABD は AB＝AD の二等辺三角形だから, ∠ABD＝∠ADB＝(180°－120°)÷2＝30°
同様に, ∠DAC＝∠DCA＝30°　△PAD の内角と外角の関係より, ∠APB＝30°＋30°＝60°
(2)
△DCP において, ∠CDP＝120°－30°＝90°,
∠DCP＝30°より, DP:PC:DC＝1:2:$\sqrt{3}$
DC＝$2\sqrt{3}$ より, DP:$2\sqrt{3}$ ＝1:$\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$ DP＝$2\sqrt{3}$　DP＝2 cm
2:PC＝1:2
PC＝2×2＝4 cm
また, △ABP≡△DCP より,
PB＝PC だから, ∠PBC＝∠PCB＝∠APB÷2＝60°÷2＝30°
PQ⊥BC だから, △QCP において, PQ:PC:QC＝1:2:$\sqrt{3}$
PC＝4 cm より, PQ＝2 cm
PQ は直径より, ∠PSQ＝90°　∠QPS＝60°だから,
△SPQ で, PS:PQ:QS＝1:2:$\sqrt{3}$　PQ＝2 cm より, PS＝1 cm
(3)
ア　AD:RD＝$2\sqrt{3}$:(2＋1)＝$2\sqrt{3}$:3≠4:3
イ　AP＝DP, PB＝PC より, AP＋PB＝DP＋PC
ウ　∠ADB＝30°, ∠CDB＝90°　よって, ∠ADB≠∠CDB
エ　∠ADP＋∠DCP＝30°＋30°＝60°≠90°
オ　BC＝$2\sqrt{3}$ ＋$2\sqrt{3}$ ＝2×$2\sqrt{3}$ ＝2AD
よって, 成り立つのはイとオ
(4)
PQ の中点を O とする。
OP＝OS＝$\frac{PQ}{2}=\frac{2}{2}$ ＝1 cm　∠OPS＝60°より, △OPS は 1 辺が 1cm の正三角形である。
O から PS に垂線 OH をひくと, PH:OP:OH＝1:2:$\sqrt{3}$　OP＝1 cm より, OH＝$\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
よって, 斜線部分の面積は, △DPC＋△OPS－おうぎ形 OPS
＝$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi\times1^2\times\frac{60}{360}=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$ cm^2

【問 7】

図のような平行四辺形 ABCD がある。辺 CD の延長上に，CD＝DE となる点 E をとり，線分 BE と辺 AD との交点を F とする。このとき，△ABF≡△DEF であることを証明しなさい。

（新潟県 2009 年度）



解答欄

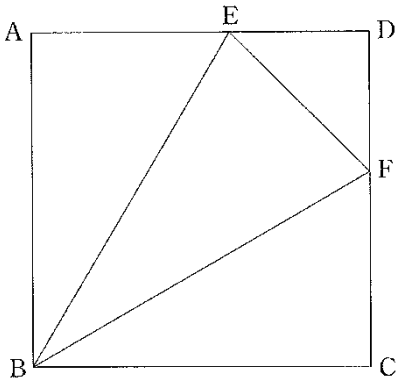
証明

解答
証明
△ABF と△DEF において
仮定から
CD＝DE…①
平行四辺形の向かい合う辺は等しいから
CD＝AB…②
①, ②から,
AB＝DE…③
AB//EC だから
∠ABF＝∠DEF…④
∠BAF＝∠EDF…⑤
③, ④, ⑤より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABF≡△DEF
解説
△ABF と△DEF において,
仮定より CD＝DE…①
平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいので, CD＝AB…②
①, ②より, AB＝DE…③
AB ∥EC より, 錯角は等しいので, ∠ABF＝∠DEF…④
同様に, ∠FAB＝∠FDE…⑤
③, ④, ⑤より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,
△ABF≡△DEF

【問 8】

図のように，正方形 ABCD があり，AE＝CF となるように，点 E，F をそれぞれ辺 AD，CD 上にとる。

このとき，次の問いに答えなさい。



（富山県 2009 年度）

(1) △ABE≡△CBF となることを証明しなさい。ただし，証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

(2) AB＝3 cm，∠BFE＝75° とするとき，線分 EF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明 △ABE と△CBF において
(2)	(　　) cm

解答
(1)
△ABE と△CBF において
仮定より
AE=CF…①
正方形の 4 つの辺はすべて等しいので
AB＝CB…②
正方形の 4 つの角はすべて等しいので
∠BAE＝∠BCF…③
①, ②, ③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ABE≡△CBF
(2)
$(3\sqrt{2}-6)$ cm
解説
問1.
(2)
△ABE≡△CBF だから, BE＝BF
よって, ∠BEF＝∠BFE＝75°
∠EBF＝180°－75°×2＝30°
∠ABE＝∠CBF＝(90°－30°)÷2＝30°
△ABE は AE:AB＝1: $\sqrt{3}$ の直角三角形だから,
$AE=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ cm
DF＝DE＝3－$\sqrt{3}$ cm
△DEF は DE:EF＝1: $\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形だから,
EF＝$\sqrt{2}$ (3－$\sqrt{3}$)
＝$3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ cm

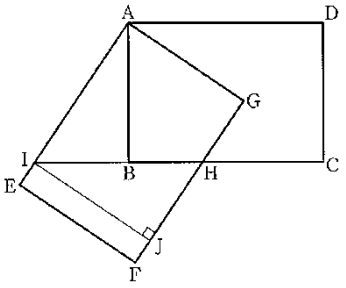
【問 9】

図Ⅰ, 図Ⅱにおいて, 四角形 ABCD と四角形 EFGA は合同な長方形であり, AB＝EF＝5 cm, AD＝EA＝7 cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

（大阪府　2009 年度　前期）

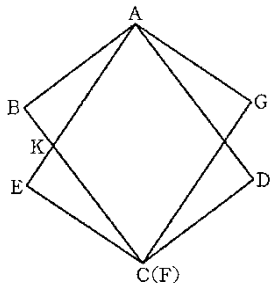
図Ⅰ



問1. 図Ⅰにおいて, E は, 直線 AB について C と反対側にあり, 直線 BC について A と反対側にある。辺 BC と辺 FG は交わっている。H は, 辺 BC と辺 FG との交点である。このとき, 直線 BC は辺 EA と交わる。I は, 直線 BC と辺 EA との交点である。J は, I から辺 FG にひいた垂線と辺 FG との交点である。

(1) 鋭角∠DAG の大きさを a° とするとき, 四角形 ABHG の内角∠BHG の大きさを a を用いて表しなさい。

図Ⅱ



(2) △AIB≡△IHJ であることを証明しなさい。

(3) EI＝1 cm であるときの線分 BH の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

問2. 図Ⅱは, 図Ⅰ中の長方形 ABCD, EFGA を A を中心としてそれぞれ回転させたものであり, C と F とは重なっている。図Ⅱにおいて K は辺 BC と辺 EA との交点である。△ABK の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	度
	(2)	証明
	(3)	求め方 答　　cm
問2		cm^2

解答
問1.
(1) a＋90 度
(2)
証明
△AIB と△IHJ において
AB＝EF (仮定)
また, 四角形 EFJI は長方形だから
EF＝IJ
よって
AB＝IJ…①
∠ABI＝∠IJH＝90° …②
∠IAB＝180° －(∠IBA＋∠AIB)＝90° －∠AIB
∠HIJ＝∠AIJ－∠AIB＝90° －∠AIB
よって
∠IAB＝∠HIJ…③
①, ②, ③より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△AIB≡△IHJ
(3)
求め方
EI＝1 cm だから AI＝6 cm
∠ABI＝90° だから
$AI^2=AB^2+IB^2$
IB＝x cm とすると $6^2=5^2+x^2$
これを解くと, $x>0$ より
$x=\sqrt{11}$
△AIB≡△IHJ だから
IH＝AI＝6 cm
よって
BH＝IH－IB＝6－$\sqrt{11}$ cm
答 6－$\sqrt{11}$
問2.
$\frac{30}{7}$ cm^2
解説
問1.
(1)
∠BAG＝90° －a° , ∠ABH＝∠AGH＝90°
四角形 ABHG の内角の和は 360° だから, ∠BHG＝360° －(90° －a°)－90° ×2＝a° ＋90°
(2)
△AIB と△IHJ において,
AB＝IJ＝EF…(ⅰ)
∠ABI＝∠IJH＝90° …(ⅱ)
∠BAI＝90° －∠AIB＝∠JIH…(ⅲ)
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) より,
1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, △AIB≡△IHJ
問2.
△ABC≡△CEA だから, ∠BCA＝∠EAC よって, △KCA は KA＝KC の二等辺三角形である。
BK＝x cm とすると, KA＝KC＝7－x cm
△ABK において, 三平方の定理より,
$AK^2=BK^2+AB^2$,
$(7-x)^2=x^2+5^2$ $49-14x+x^2=x^2+25$ $14x=24$ $x=\frac{12}{7}$cm よって, $\triangle ABK=\frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times5=\frac{30}{7}cm^2$

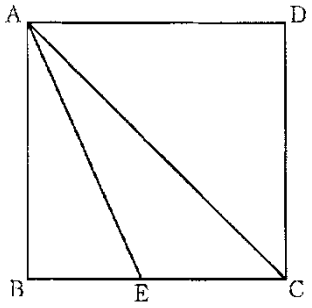
【問 10】

図Ⅰ, 図Ⅱにおいて, 四角形 ABCD は 1 辺の長さが 6 cm の正方形である。E は辺 BC 上にあって B, C と異なる点である。A と E とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

（大阪府　2009 年度　後期）

図Ⅰ

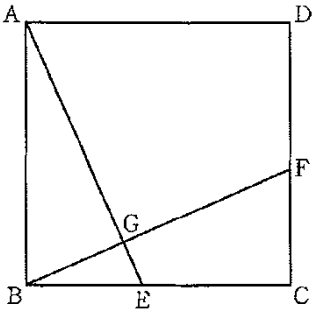


問1. 図Ⅰにおいて,

(1) A と C とを結んでできる線分 AC の長さを求めなさい。

(2) BE＝x cm とし, 0＜x＜6 とするとき, △AEC の面積を x を用いて表しなさい。

図Ⅱ



問2. 図Ⅱにおいて, F は辺 CD 上にあって CF＝BE となる点である。B と F とを結ぶ。G は, 線分 AE と線分 BF との交点である。

(1) △ABE≡△BCF であることを証明しなさい。

(2) AE⊥BF であることを証明しなさい。

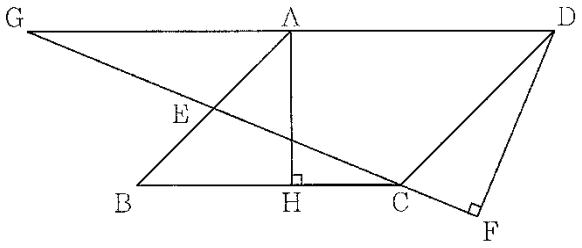
解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	cm^2
問2	(1)	証明
	(2)	証明

解答
問1.
(1) $6\sqrt{2}$ cm,　　(2)$18-3x$ cm^2
問2.
(1)
証明
△ABE と△BCF において
BE＝CF (仮定) …①
四角形 ABCD は正方形だから
AB＝BC…②
∠ABE＝∠BCF＝90°…③
①, ②, ③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△BCF
(2)
証明
∠EAB＋∠AEB＝180°－∠ABE＝90°
△ABE≡△BCF だから
∠EAB=∠FBC
よって
∠FBC+∠AEB＝90°
∠AGB は△GBE の頂点 G における外角だから
∠AGB＝∠FBC＋∠AEB＝90°
したがって
AE⊥BF
解説
問1.
(1)
四角形 ABCD は 1 辺が 6 cm の正方形だから, 対角線 AC の長さは, $6\sqrt{2}$ cm
(2)
$0<x<6$ のとき, BE＝x cm ならば, EC＝$6-x$ cm と表せる。
よって, $\triangle AEC=\frac{1}{2}\times(6-x)\times 6=18-3x$ cm^2

【問 11】

図のような平行四辺形 ABCD がある。点 E は辺 AB の中点で，EC の延長上に∠DFE＝90°となるように点 F をとる。また，CE の延長と DA の延長との交点を G とし，点 A から辺 BC に垂線 AH をひく。次の問いに答えなさい。



（兵庫県 2009 年度）

問1. △EAG と△EBC が合同であることの証明を完成させなさい。

証明

△EAG と△EBC において

△EAG≡△EBC

問2. BC＝17 cm，∠ABC＝45°，平行四辺形 ABCD の面積を 170 cm^2 とする。

(1) 線分 AH の長さを求めなさい。

(2) 線分 EG の長さを求めなさい。

(3) 線分 CF の長さを求めなさい。

解答欄

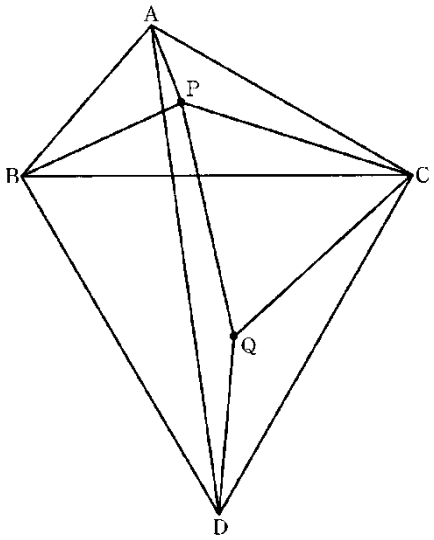
<table>
<tr><td rowspan="1">問1</td><td colspan="2">証明
△EAG と△EBC において

△EAG≡△EBC</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1.
証明
△EAG と△EBC において
仮定より
AE＝BE…①
対頂角は等しいので
∠AEG＝∠BEC…②
平行線の錯角は等しいので
∠EAG＝∠EBC…③
①, ②, ③より,
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△EAG≡△EBC
問2.
(1)10cm
(2)13cm
(3) $\frac{70}{13}$ cm
解説
問2.
(2)
E から BC に垂線 EK をひく。
EK ∥ AH より EK:AH＝BE:BA　EK:10＝1:2,　EK＝5 cm
△BEK において, ∠EBK＝45°, ∠EKB＝90° より, BK＝EK＝5 cm
よって, CK＝17－5＝12 cm
△EKC で三平方の定理より,
EC＝$\sqrt{5^2+12^2}$ ＝13 cm　EG＝EC＝13 cm
(3)
CF＝x cm とおく。
△EKC∽△DFG だから, KC:FG＝EC:DG
12:(13×2＋x)＝13:17×2,
13 (26＋x)＝12×17×2
13x＝70
x＝ $\frac{70}{13}$ cm

【問 12】

図で，△ABCは∠ABC＝40°，∠ACB＝30°の三角形であり，△BDCは正三角形である。点 P を△ABC の内部にとり，点 Q を，△CPQ が正三角形となるように，△BDC の内部にとる。各問いに答えよ。



（奈良県 2009 年度）

問1. △PBC≡△QDC となることを証明せよ。

問2. 点 P を∠ABP＝∠PBC，∠ACP＝∠PCB となるようにとる。このとき，∠BPQ の大きさを求めよ。

問3. 点 P を線分 AD 上に∠APC＝120°となるようにとる。AC＝a cm，BC＝b cm とするとき，3 つの線分 PA，PB，PC の長さの和を a，b を用いて表せ。

解答欄

問1	証明
問2	度
問3	cm

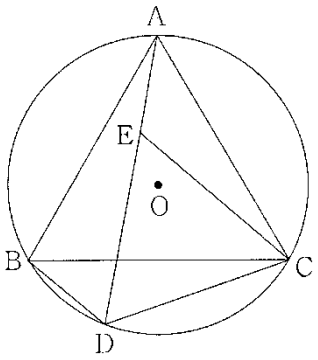
解答
問1.
証明
△PBC と△QDC において
△BDC は正三角形だから
BC＝DC…①
△CPQ は正三角形だから
PC＝QC…②
また
∠PCB＝∠PCQ－∠BCQ＝60°－∠BCQ…③
∠QCD＝∠BCD－∠BCQ＝60°－∠BCQ…④
③, ④より
∠PCB＝∠QCD…⑤
①, ②, ⑤より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△PBC≡△QDC
問2. 85 度
問3. $\sqrt{a^2+b^2}$ cm
解説
問2.
$\angle BPC=180^\circ-\frac{40^\circ}{2}-\frac{30^\circ}{2}=145^\circ$　よって, ∠BPQ＝145°－60°＝85°
問3.
∠APC＝120°より, ∠CPD＝60°　∠CPQ も 60°だから, Q は AD 上の点である。
△PBC≡△QDC,
△CPQ は正三角形より, PA＋PB＋PC＝PA＋QD＋PQ＝AD　∠ACD＝30°＋60°＝90°
また, CD＝CB＝b cm だから,
△ACD で, 三平方の定理を利用して,
AD＝$\sqrt{a^2+b^2}$ cm

【問 13】

図において，△ABC は各頂点が円 O 上にある正三角形である。円 O 上の，頂点 A を含まない方の弧 BC 上に点 D をとり，線分 AD 上に AE＝BD となる点 E をとる。

このとき，△AEC≡△BDC であることを証明しなさい。

（鳥取県 2009 年度）



解答欄

証明

△AEC と△BDC において

△AEC≡△BDC

解答

証明

△AEC と△BDC において

正三角形の 2 辺であることより

CA＝CB…①

また，AE＝BD…②

弧 CD に対する円周角であることより

∠CAD＝∠CBD

∠CAD＝∠CAE であるから

∠CAE＝∠CBD…③

①②③より

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△AEC≡△BDC

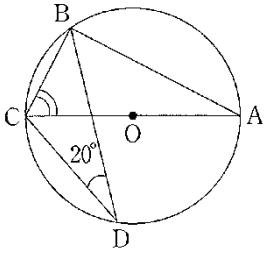
【問 14】

4 点 A, B, C, D は円 O の周上にあり, 線分 AC は円 O の直径である。次の問 1, 問2に答えなさい。

（島根県 2009 年度）

問1. 図 1 のように∠BDC＝20° のとき, ∠ACB の大きさを次のように求めた。のア～ウにあてはまる語句または数を答えなさい。

図 1



∠BAC と∠BDC はともに,

$\overset{\frown}{BC}$に対する［ ア ］なので,

その大きさは等しい。よって,

∠BAC＝∠BDC＝20°

また, 線分 AC は円 O の直径であるから

∠ABC＝［ イ ］°

したがって, ∠ACB＝［ ウ ］°

問2. 図 2 のように直線 AB, CD の交点を P, 線分 CP の中点を Q とする。次の(1)～(3)に答えなさい。

図 2

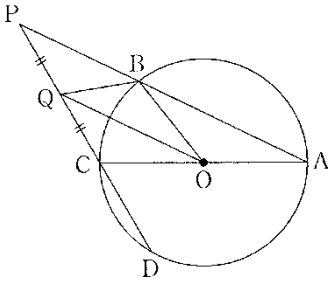
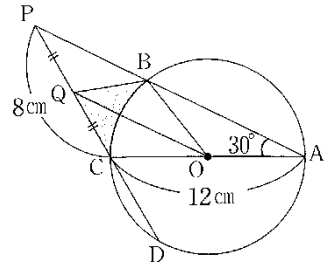


図 3

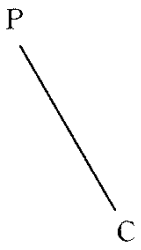


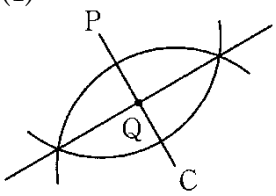
(1) 定規とコンパスを使って線分 CP の中点 Q を作図しなさい。ただし, 作図に用いた線は消さないこと。

(2) △OBQ≡△OCQ であることを証明しなさい。

(3) 図 3 のように, AC＝12 cm, CP＝8 cm, ∠BAC ＝30° のとき, 線分 BQ, 線分 CQ, $\overset{\frown}{BC}$で囲まれた部分の面積を求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	°
	ウ	°
問2	(1)	(作図) 
	(2)	証明
	(3)	cm^2

解答
問1.
ア円周角　　イ 90　　ウ 70
問2.
(1)


(2)
証明
OB, OC は円の半径なので
OB＝OC　…①
共通な辺だから
OQ＝OQ…②
O, Q がそれぞれ CA, CP の中点だから, OQ ∥AP である。
同位角は等しいから
∠COQ＝∠OAB …③
錯角は等しいから
∠BOQ＝∠OBA …④
また, OA, OB は円の半径なので
∠OAB＝∠OBA …⑤
③～⑤から
∠BOQ＝∠COQ …⑥
①, ②, ⑥から
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△OBQ≡△OCQ
(3)
$9\sqrt{3}+3\sqrt{7}-6\pi$
解説
問2.
(3)
△OBC において, OB＝OC＝6cm
弧 BC において, 円周角の定理より, ∠BOC＝2∠BAC＝2×30°＝60°
よって, △OBC は正三角形なので, BC＝6 cm
QO と BC の交点を H とすると, △OBQ≡△OCQ だから, △QBC は QC＝QB
∠BQO＝∠CQO だから, 二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するので,
QH⊥BC, BH＝CH＝3 cm
△QCH において三平方の定理より $QH=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ cm
△OCH において∠COH＝30°, ∠CHO＝90°より $CH:OC:OH=1:2:\sqrt{3}$
OC＝6 cm だから $OH=3\sqrt{3}$ cm
色のついた部分の面積は
△OBC＋△QBC－(おうぎ形 OBC)

$$=\frac{1}{2}\times BC\times OH+\frac{1}{2}\times BC\times QH-\pi\times OC^2\times\frac{60}{360}$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{7}-\pi\times 6^2\times\frac{1}{6}$$

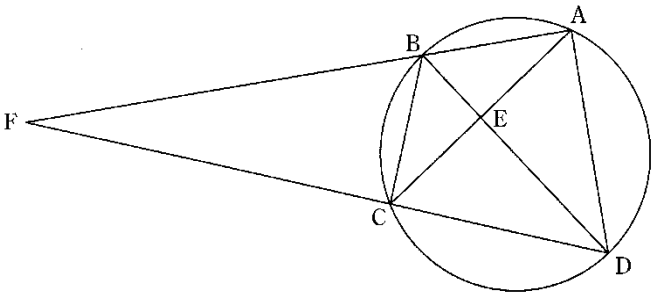
$=9\sqrt{3}+3\sqrt{7}-6\pi\,\mathrm{cm}^2$

【問 15】

図のように，円周上に 4 点 A，B，C，D があり，AB＝CB，AD＝CD である。また，線分 AC と線分 BD の交点を E，線分 AB の延長と線分 DC の延長の交点を F とする。ただし，AB ＜ AD である。

次の問1，問2に答えなさい。

（大分県 2009 年度）



問1．∠BAD＝90° となることを次のように証明した。

［ア］には，△ABD と△CBD が合同であることの証明を，［イ］，［ウ］には，∠x，∠y を用いた式を書いて，証明を完成させなさい。

証明

△ABD と△CBD において，

ア

これより，∠ADB＝∠CDB＝∠x

∠ABD＝∠CBD＝∠y とすると，

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角だから

∠CDB＝∠CAB＝∠x

$\overset{\frown}{CD}$ に対する円周角だから

∠CBD＝∠CAD＝∠y となる。

△ABD の内角の和は

∠ADB＋∠ABD＋∠EAB＋∠EAD

＝［イ　　］

＝180° である。

したがって，∠BAD＝［ウ　　］＝90°

問2．AB＝6 cm，AD＝12 cm のとき，線分 BF と線分 CF の長さをそれぞれ求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	BF　　cm	
	CF　　cm	

解答
問1.
ア
仮定から
AB＝CB…①
AD＝CD…②
また, BD は共通…③
①, ②, ③から
3 辺がそれぞれ等しいので
△ABD≡△CBD
イ　$2\angle x+2\angle y$
ウ　$\angle x+\angle y$
問2.
BF　10cm
CF　8cm
解説
問2.
△FBC と△FDA において,
∠FCB＝180°－∠BCD＝180°－∠BAD＝180°－90°＝90°,∠FCB＝∠FAD…①
円周角の定理を利用して, ∠FBC＝∠BAC＋∠BCA＝∠BDC＋∠BDA＝∠FDA…②
①, ②より, 2 組の角がそれぞれ等しいので, △FBC∽△FDA
BF＝a cm, CF＝b cm とすると, FB:FD＝BC:DA＝6:12＝1:2 より, $a:(b+12)=1:2$　$2a=b+12$…③
FC:FA＝BC:DA　$b:(a+6)=1:2$　$2b=a+6$…④　③, ④を連立方程式として解くと, a＝10 cm, y＝8 cm

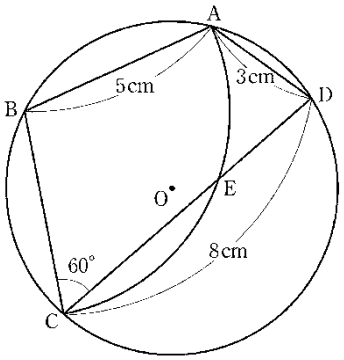
【問 16】

図 I のように，円 O の円周上に異なる 4 点 A，B，C，D がある。弦 AB を半径とする，中心角∠ABC のおうぎ形 BCA をつくり，そのおうぎ形の$\overset{\frown}{CA}$と弦 CD は点 E で交わっている。

AB＝5 cm，AD＝3 cm，CD＝8 cm，∠BCD＝60°であるとき，次の問1～問3に答えなさい。

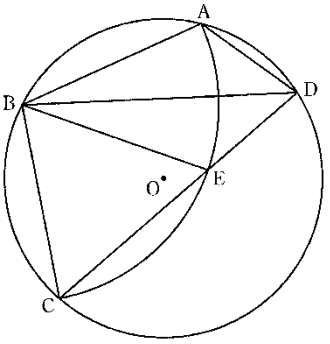
（宮崎県 2009 年度）

図 I



問1. 線分 BE をひき，∠BED の大きさを求めなさい。

図Ⅱ

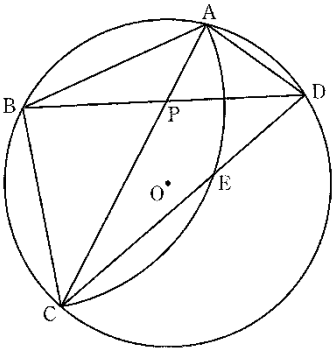


問2. 図Ⅱは，図 I において，線分 BE および弦 BD をひいたものである。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) △ABD≡△EBD であることを証明しなさい。

(2) 弦 BD の長さを求めなさい。

図Ⅲ



問3. 図Ⅲは，図 I において，弦 BD および弦 AC をひき，その交点を P としたものである。このとき，線分 AP と線分 PC の長さの比を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">∠BED＝　　度</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>証明</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>BD＝　　cm</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">AP:PC＝　　:</td></tr>
</table>

解答
問1.
∠BED＝120 度
問2.
(1)
証明
△ABD と△EBD で,
BD＝BD (共通)…①
AB＝EB (半径)…②
ここで, △BCE において,
BE＝BC (半径)
∠BCE＝60° (仮定)より,
△BCE は正三角形である。
よって, CE＝5cm, ED＝CD－CE＝3cm なので,
AD＝ED (3cm) …③
①, ②, ③から,
3 辺が, それぞれ等しいので,
△ABD≡△EBD
(2)
BD＝7cm
問3.
AP:PC＝3:8
解説
問2.
(2)B から CE に垂線 BH をひく。
△BCE は正三角形であるから, EH＝$\frac{5}{2}$ cm, CH＝BH＝$\frac{5}{2}\times\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm DH＝8－$\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$ cm
よって, △BDH で三平方の定理より, BD＝$\sqrt{DH^2+BH^2}=\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ ＝7cm
問3.
点 A, C から BD に垂線 AK, CT をひく。
AK∥CT だから, AP:CP＝AK:CT…①
△ADK と△CDT において, ∠AKD＝∠CTD＝90°…②
△ABD≡△EBD より, ∠ADK＝∠CDB…③
②, ③より, 2 組の角がそれぞれ等しいので, △ADK∽△CDT
よって, AK:CT＝AD:CD…④ ①, ④より, AP:CP＝AD:CD＝3:8