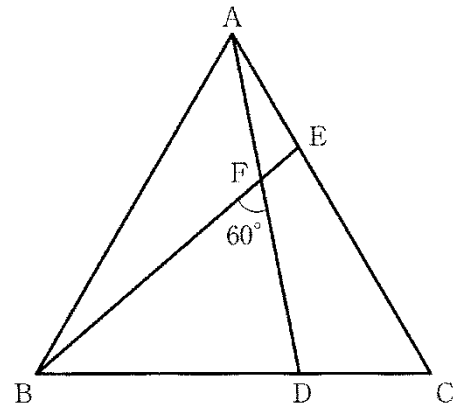


3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2010 年度出題】

【問 1】

下の図の正三角形 ABC で、辺 BC , AC 上にそれぞれ点 D , E をとり、 AD と BE の交点を F とする。 $\angle BFD = 60^\circ$ のとき、 $\triangle ABD$ と $\triangle BCE$ が合同になることを次のように証明した。 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる式やことばを入れなさい。

(青森県 2010 年度 前期)



〔証明〕

$\triangle ABD$ と $\triangle BCE$ で

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$\boxed{\text{ア}}$ …①

$\boxed{\text{イ}}$ $= 60^\circ$ …②

三角形の内角と外角の性質から

$\angle BAD = 60^\circ - \angle ABF$ …③

また、正三角形の 1 つの内角は 60° だから

$\angle CBE = 60^\circ - \angle ABF$ …④

③, ④から

$\boxed{\text{ウ}}$ …⑤

①, ②, ⑤から, $\boxed{\text{エ}}$ が

それぞれ等しいので

$\triangle ABD \equiv \triangle BCE$

解答欄

ア	
イ	
ウ	
エ	

解答

ア $AB = BC$

イ $\angle ABD = \angle BCE$

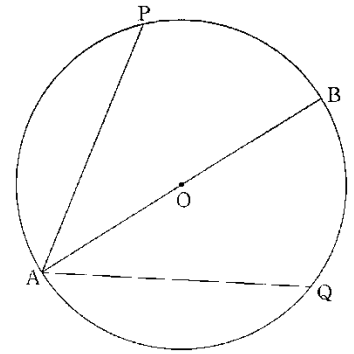
ウ $\angle BAD = \angle CBE$

エ 1 辺とその両端の角

【問 2】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に、 $AP=AQ$ となるような 2 点 P, Q がある。このとき、線分 AB は $\angle PAQ$ を二等分することを、次の のように証明したい。 に続きを書いて、証明を完成させなさい。

(秋田県 2010 年度)



〔証明〕

点 B と点 P , 点 B と点 Q をそれぞれ結ぶ。

$\triangle APB$ と $\triangle AQB$ において

$$\triangle APB \equiv \triangle AQB$$

合同な三角形の対応する角は等しいから、

$$\angle PAB = \angle QAB$$

したがって、線分 AB は $\angle PAQ$ を二等分する。

解答欄

〔証明〕

点 B と点 P , 点 B と点 Q をそれぞれ結ぶ。

$\triangle APB$ と $\triangle AQB$ において

$$\triangle APB \equiv \triangle AQB$$

合同な三角形の対応する角は等しいから、

$$\angle PAB = \angle QAB$$

したがって、線分 AB は $\angle PAQ$ を二等分する。

解答

〔証明〕

$\triangle APB$ と $\triangle AQB$ において

線分 AB は円 O の直径だから,

$$\angle APB = \angle AQB = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

AB は共通 $\cdots \textcircled{2}$

仮定より

$$AP = AQ \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

2つの直角三角形で, 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから,

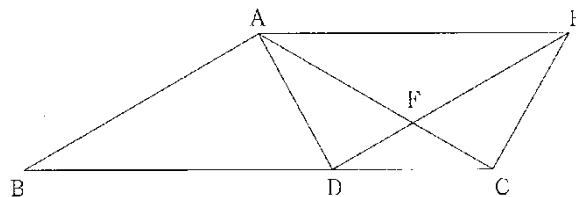
$$\triangle APB \equiv \triangle AQB$$

【問 3】

図1において、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形である。辺 BC 上に、2 点 B, C とは異なる点 D をとり、四角形 $ABDE$ が平行四辺形となるように点 E をとる。また、線分 AC と線分 DE との交点を F とするとき、あとの問いに答えなさい。

(山形県 2010 年度)

図1

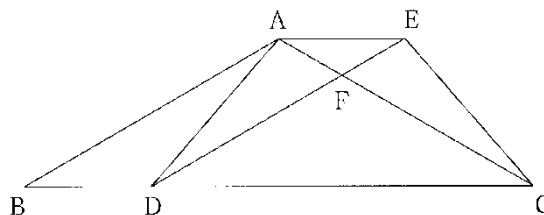


問1 $\triangle ADC$ と $\triangle ECD$ が合同であることを証明しなさい。

問2 図2は、図1で、 $BD:DC=1:3$ となるように点 D をとった

図2

ときのものである。 $AB=8\text{ cm}$ 、 $\angle B=30^\circ$ であるとき、あとの問いに答えなさい。



(1) $\angle AFE$ の大きさを求めなさい。

(2) $\triangle ADC$ と四角形 $ABCE$ の面積の比を求めなさい。

(3) CE の長さを求めなさい。

解答欄

〔証明〕

(1)	
(2)	:
(3)	cm

解答

〔証明〕

$\triangle ADC$ と $\triangle ECD$ において

共通な辺だから, $DC=CD$ …①

仮定より, $AC=AB$

平行四辺形の向かい合う辺は等しいから

$ED=AB$

よって, $AC=ED$ …②

また, 仮定より, $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$\angle ACD=\angle B$

$AB \parallel ED$ で, 同位角が等しいから

$\angle EDC=\angle B$

よって, $\angle ACD=\angle EDC$ …③

①, ②, ③より,

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADC \equiv \triangle ECD$

(1) 120°

(2) 3:5

(3) $2\sqrt{7}$ cm

解説

(1)

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから, $\angle BAC=180^\circ - 30^\circ \times 2=120^\circ$

$AB \parallel ED$ より, 平行線の錯角は等しいから, $\angle AFE=\angle BAC=120^\circ$

(2)

$BD:DC=1:3$ より, $\triangle ADC=3\triangle ABD$

(平行四辺形 $ABDE$) $=2\triangle ABD$

$AE \parallel BC$, $BD:DC=1:3$ より, $\triangle EDC=3\triangle ABD$

(四角形 $ABCE$) $=2\triangle ABD+3\triangle ABD=5\triangle ABD$

よって, $\triangle ADC:(四角形 ABCE)=3:5$

(3)

A, E から BC にそれぞれ垂線 AH, 垂線 EK をひく。

$AB=AC$, $\angle ABH=30^\circ$ より, $BH=CH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$ cm

$EK=AH=\frac{AB}{2}=\frac{8}{2}=4$ cm

$BD:DC=1:3$ より, $BD=\frac{1}{4}BC=\frac{1}{4}\times (4\sqrt{3}\times 2)=2\sqrt{3}$ cm

四角形 $ABDE$ は平行四辺形なので,

$AE=BD=2\sqrt{3}$ cm

四角形 $AHKE$ は長方形だから,

$KH=AE=2\sqrt{3}$ cm

$CK=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm

$\triangle EKC$ において三平方の定理より,

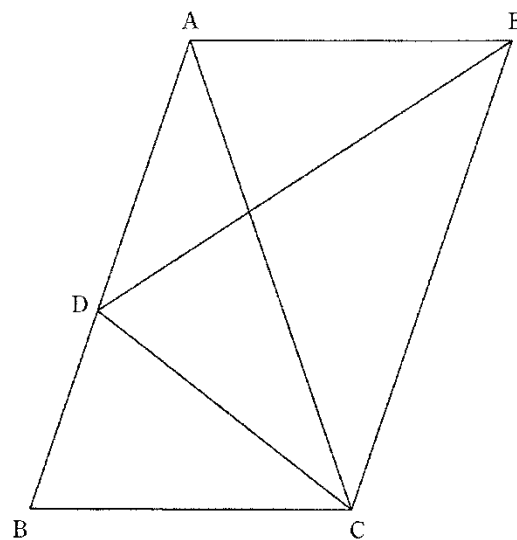
$CE=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ cm

【問 4】

図において、 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形である。また、点 D は、 $DC=BC$ となる辺 AB 上の点であり、点 E は、 $ED=AB$, $EC=AC$ となる点である。

このとき、 $\triangle CEA \equiv \triangle ABC$ となることを証明しなさい。

(福島県 2010 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕 (例 1) $\triangle CEA$ と $\triangle ABC$ において AC は共通 …① $AB=AC, EC=AC$ から $CE=AB$ …② $\triangle EDC$ と $\triangle ABC$ において 3 辺がそれぞれ等しいから $\triangle EDC \equiv \triangle ABC$ したがって $\angle DCE = \angle BCA$ …③ $\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから $\angle ABC = \angle ACB$ …④ $\triangle CDB$ は二等辺三角形であるから $\angle CDB = \angle CBD$ …⑤ ③, ④, ⑤から $\angle DCE = \angle CDB$ 錯角が等しいから $EC \parallel AB$ 平行線の錯角は等しいから $\angle ACE = \angle CAB$ …⑥ ①, ②, ⑥より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle CEA \equiv \triangle ABC$	(例 2) $\triangle CEA$ と $\triangle ABC$ において AC は共通 …① $AB=AC, EC=AC$ から $CE=AB$ …② $\triangle EDC$ と $\triangle ABC$ において 3 辺がそれぞれ等しいから $\triangle EDC \equiv \triangle ABC$ したがって $\angle DCE = \angle BCA$ …③ ③から $\angle ACE = \angle DCE - \angle DCA$ $= \angle BCA - \angle DCA = \angle BCD$ したがって $\angle ACE = \angle BCD$ …④ $\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから $\angle ABC = \angle ACB$ …⑤ $\triangle CDB$ は二等辺三角形であるから $\angle CDB = \angle CBD$ …⑥ $\triangle ABC$ と $\triangle CDB$ において 三角形の内角の和は 180° であるから, ⑤, ⑥より, 残りの角も等しい。 したがって $\angle CAB = \angle BCD$ …⑦ ④, ⑦から $\angle ACE = \angle CAB$ …⑧ ①, ②, ⑧より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle CEA \equiv \triangle ABC$
--	---

解説

$\triangle CEA$ と $\triangle ABC$ において, $AB=AC, AC=EC$ より,

$CE=AB$ …①

共通なので, $CA=AC$ …②

$\triangle ABC$ と $\triangle EDC$ において,

$AB=ED, AC=EC, BC=DC$ より

3 辺がそれぞれ等しいので,

$\triangle ABC \equiv \triangle EDC$

よって, $\angle ECD = \angle ACB$ $AB=AC$ より, $\angle ACB = \angle ABC$ $CD=BC$ より, $\angle ABC = \angle CDB$

よって, $\angle ECD = \angle CDB$ 錯角が等しいので, $AB \parallel EC$

これより, $\angle ECA = \angle BAC$ …③

①, ②, ③より,

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

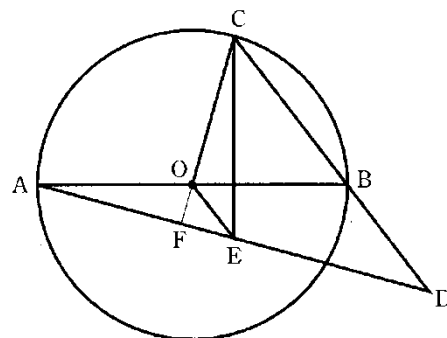
$\triangle CEA \equiv \triangle ABC$

【問 5】

図のように、線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の円周上で 2 点 A, B と異なる点 C をとり、線分 CB を B の方向に延長して、その延長線上に点 D をとる。2 点 A, D を結ぶ線分 AD の中点を E とする。このとき、直線 CO と直線 AD の交点を F として、 $\triangle OAE \equiv \triangle OCE$ であることを次のように証明した。

次の問1, 問2に答えなさい。

(茨城県 2010 年度)



〔証明〕

$\triangle ABD$ において、点 O は AB の中点、点 E は AD の中点だから、

ア より、 $OE \parallel BD$

だから、 $OE \parallel CB$

よって、平行線の錯角だから、 $\angle OBC =$ イ $\cdots \text{①}$

平行線の同位角だから、 $\angle OCB = \angle FOE \cdots \text{②}$

ウ

問1 ア にはあてはまる定理を、イ にはあてはまる角をそれぞれ書きなさい。

問2 ウ には証明の続きを書き、 $\triangle OAE \equiv \triangle OCE$ であることの証明を完成させなさい。

ただし、〔証明〕の中の①, ②で示されている関係を使う場合は、①, ②の番号を用いてもよい。また、新たな関係に番号をつける場合は、③以降の番号を用いなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	∠
問2	ウ	

解答

問1

ア 中点連結定理

イ ∠BOE

問2

ウ

OBとOCは、円Oの半径で等しいので、△OBCは二等辺三角形である。よって、

∠OBC=∠OCB …③

①, ②, ③より, ∠BOE=∠FOE …④

対頂角だから, ∠COB=∠AOF …⑤

ここで, △OAEと△OCEにおいて

④, ⑤より, ∠AOE=∠COE …⑥

OAとOCは円Oの半径だから,

OA=OC …⑦

OEは共通 …⑧

⑥, ⑦, ⑧より

2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいから,

△OAE≡△OCE

解説

問2

△OBCにおいて, OBとOCは半径なので, OB=OC

よって, ∠OBC=∠OCB…③

①, ②, ③より, ∠FOE=∠BOE…④

対頂角は等しいので, ∠AOF=∠COB…⑤

△OAEと△OCEにおいて,

④, ⑤より, ∠FOE+∠AOF=∠BOE+∠COB ∠AOE=∠COE…⑥

半径なので, OA=OC…⑦

共通なので, OE=OE…⑧

⑥, ⑦, ⑧より,

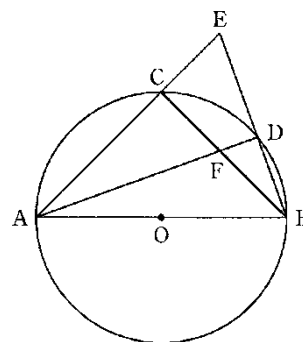
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので, △OAE≡△OCE

【問 6】

図のように、 AB を直径とする円 O の周上に、 $AC=BC$ となる点 C をとる。点 A をふくまない方の弧 BC 上に点 D をとり、 AC の延長と BD の延長との交点を E とし、 AD と BC の交点を F とする。

このとき、 $\triangle AFC \equiv \triangle BEC$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2010 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

$\triangle AFC$ と $\triangle BEC$ において

仮定より

$$AC=BC \quad \cdots \textcircled{1}$$

AB は円の直径だから、円周角の定理より

$$\angle ACF=90^\circ \quad \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\angle BCE=180^\circ - \angle ACF$$

$$=180^\circ - 90^\circ$$

$$=90^\circ \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle ACF=\angle BCE \quad \cdots \textcircled{4}$$

弧 CD に対する円周角は等しいから

$$\angle CAF=\angle CBE \quad \cdots \textcircled{5}$$

①, ④, ⑤より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFC \equiv \triangle BEC$$

【問 7】

図1のような $AB=20\text{ cm}$ で、縦と横の長さの比が $1:\sqrt{2}$ の長方形 $ABCD$ の紙を、次の①、②のように折ります。

- ① 辺 AD , BC の中点をそれぞれ M , N とします。図2のように、線分 BM , CM を折り目として、点 A , D が重なり、線分 AM , DM がぴったり重なるように折って三角錐の形の容器をつくります。点 A , D の重なった点を A' とすると、点 A' を頂点とし、 $\triangle MBC$ を底面とする三角錐となります。
- ② 重なった線分 AM , DM を離し、線分 MN をかきます。図3のように、改めて線分 BM , CM を折り目として立体にならないように折り重ねたときの点 A , D の移った点をそれぞれ E , F とします。線分 BE , CF の交点は線分 MN 上にあり、この点を G とします。

図1

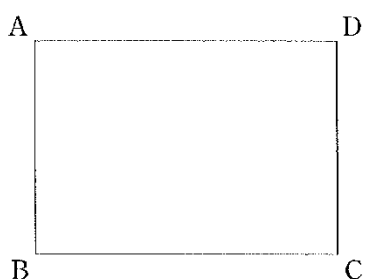


図2

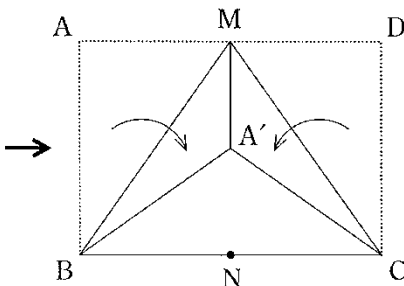
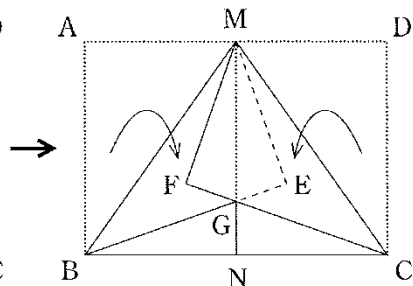


図3

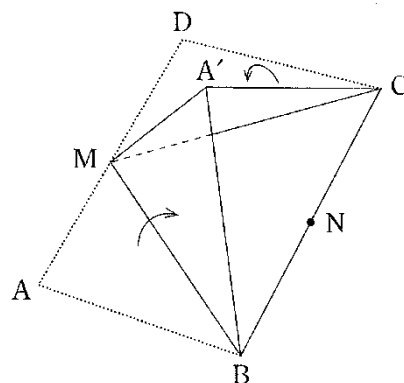


このとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2010 年度 前期)

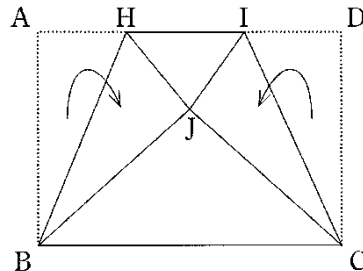
- 問1 図2でつくられた三角錐は右の図4のようになります。この三角錐の容器の容積を求めなさい。ただし、根号はつけたままで答えなさい。

図4



- 問2 図3において、 $\triangle FMG$ と $\triangle NCG$ が合同であることを証明しなさい。

図5



- 問3 図5のように、長方形 $ABCD$ の紙の辺 AD 上に異なる点 H , I をとり、線分 BH , CI を折り目として折ったとき、点 A , D の移った点が平面 $HBCI$ 上の点 J で重なりました。四角形 $HBCI$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^3	
問2	〔証明〕	
問3	cm^2	

解答

問1

$$\frac{2000}{3}\sqrt{2}\text{ cm}^3$$

問2

〔証明〕

$\triangle FMG$ と $\triangle NCG$ において、

$\angle FGM = \angle NGC$ (対頂角)

$\angle MFG = \angle CNG = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$

三角形の内角のうちの2組の角がそれぞれ等しいので、

$\angle FMG = \angle NCG \quad \cdots \textcircled{2}$

また、 $MD = NC$ で紙を折っているので、

$FM = NC \quad \cdots \textcircled{3}$

よって、 $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ より、

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle FMG \equiv \triangle NCG$

問3

$$400\text{cm}^2$$

解説

問1

$A'B : A'C : BC = 20 : 20 : 20\sqrt{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ より、 $\angle BA'C = 90^\circ$

また、 $\angle BA'M = \angle CA'M = 90^\circ$ より、

$$\text{この容器の容積は、} \frac{1}{3} \times \triangle BA'M \times A'C = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{2} \times 20 = \frac{2000\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

問3

$\triangle JBC$ において、 $JB : JC : BC = 20 : 20 : 20\sqrt{2} = 1 : 1 : \sqrt{2}$

これより、 $\triangle JBC$ は $\angle BJC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

BC の中点 N と J を結ぶと、 $BN = CN = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

$\triangle JNC$, $\triangle JNB$ も直角二等辺三角形なので、 $JN = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

また、 $\triangle JHI$ は $\angle HJI = 90^\circ$ で、

$\angle JIH = 180^\circ - \angle JID = 180^\circ - (360^\circ - 90^\circ \times 2 - 45^\circ) = 45^\circ$ より、

$JH : JI : IH = 1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形である。

AD の中点 M と J を結ぶと、 $HM = IM$, $\angle JMI = 90^\circ$ より、 $\triangle JMH$, $\triangle JMI$ も直角二等辺三角形となる。

よって、 $HM = IM = MJ = 20 - 10\sqrt{2} \text{ cm}$

よって、四角形 $HBCI$ の面積は

$$\triangle HBC + \triangle CHI = \frac{1}{2} \times 20\sqrt{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times (20 - 10\sqrt{2}) \times 2 \times 20$$

$$= 200\sqrt{2} + 20(20 - 10\sqrt{2})$$

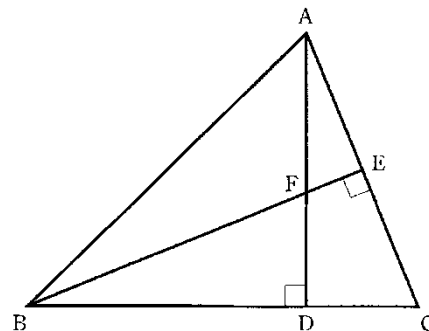
$$= 200\sqrt{2} + 400 - 200\sqrt{2}$$

$$= 400\text{cm}^2$$

【問 8】

図のように、 $\angle ABC = 45^\circ$ である三角形 ABC がある。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を D とし、頂点 B から辺 AC に引いた垂線と辺 AC との交点を E とする。また、線分 AD と線分 BE との交点を F とする。このとき、 $\triangle ADC \equiv \triangle BDF$ であることを証明しなさい。

(新潟県 2010 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ADC$ と $\triangle BDF$ において、

$\angle ADC = \angle BDF = 90^\circ$ …①

$\angle ABC = 45^\circ$ より、 $\triangle ABD$ は二等辺三角形だから、

$AD = BD$ …②

また、 $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACB$ …③

$\angle EBC = 90^\circ - \angle ACB$ …④

③、④より、

$\angle CAD = \angle EBC = \angle FBD$ …⑤

①、②、⑤より、

対応する 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ADC \equiv \triangle BDF$

解説

$\triangle ADC$ と $\triangle BDF$ において、仮定より、 $\angle ADC = \angle BDF = 90^\circ$ …① $\triangle ABD$ は、 $\angle ABD = 45^\circ$ 、 $\angle ADB = 90^\circ$ より、直角二等辺三角形になるので、 $AD = BD$ …② $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - \angle ADC = 90^\circ - \angle ACD$ 、 $\angle FBD = \angle CBE = 180^\circ - \angle BEC - \angle ACD = 180^\circ - \angle ACD$ よって、 $\angle CAD = \angle FBD$ …③ ①、②、③より、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ADC \equiv \triangle BDF$

【問 9】

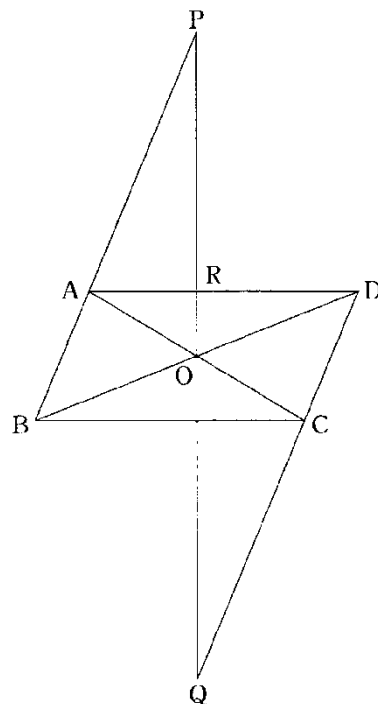
図のように、平行四辺形 $ABCD$ において、辺 BA の延長上の点 P と対角線の交点 O を通る直線をひき、辺 DC の延長との交点を Q 、辺 AD との交点を R とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2010 年度)

(1) $\triangle AOP \equiv \triangle COQ$ となることを証明しなさい。ただし、証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

(2) $AR:RD=2:3$, $AB=4\text{ cm}$ とするとき、線分 CQ の長さを求めなさい。



解答欄

(1)	$\triangle AOP$ と $\triangle COQ$ において
(2)	cm

解答

(1)

$\triangle AOP$ と $\triangle COQ$ において

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、

$$OA = OC \quad \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから、

$$\angle AOP = \angle COQ \quad \cdots \textcircled{2}$$

平行線の錯角は等しいから、

$$\angle OAP = \angle OCQ \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle AOP \equiv \triangle COQ$$

(2)

8cm

解説

$CQ = x$ cm とする。

$\triangle AOP \equiv \triangle COQ$ より, $AP = CQ = x$ cm

四角形 ABCD は平行四辺形だから, $DC = AB = 4$ cm

PB // DQ より, $PA : DQ = AR : RD \quad x : (x + 4) = 2 : 3 \quad 2(x + 4) = 3x \quad 2x + 8 = 3x \quad x = 8$ cm

【問 10】

直樹さんと明子さんは、一辺の長さが 8 cm の合同な正方形の紙 ABCD と EFGH の重なった部分について調べた。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

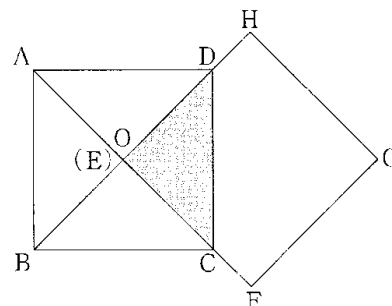
(山梨県 2010 年度)

問1 2 人は、【1 回目の重ね方】にしたがって、図1のように 2 枚の正方形の紙を重ねた。

【1 回目の重ね方】

- ① 正方形 ABCD の対角線の交点 O に、正方形 EFGH の頂点 E を重ねる。
- ② 辺 EF, EH をそれぞれ対角線上の OC, OD に重ねる。

図1



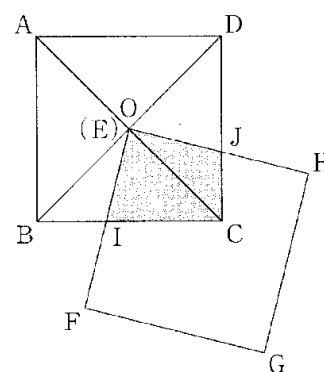
このとき、重なった部分の面積を求めなさい。

問2 次に、【2 回目の重ね方】にしたがって、図2のように 2 枚の正方形の紙を重ねた。

【2 回目の重ね方】

- ① 正方形 ABCD の対角線の交点 O に、正方形 EFGH の頂点 E を重ねる。
- ② 辺 BC と辺 EF, 辺 CD と辺 EH が交わるように重ね、それぞれの交点を I, J とする。

図2



このとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

- (1) 直樹さんは、DJ の長さが分かると、OJ の長さが求められることに気づいた。DJ の長さが 5 cm のとき、OJ の長さを求めなさい。
- (2) 明子さんは、 $\triangle OIC$ と $\triangle OJD$ が合同であることに気づいた。 $\triangle OIC \equiv \triangle OJD$ となることを証明しなさい。
- (3) 明子さんは、DJ の長さを何回か変えながら重ね、次の予想を立てた。

【明子さんの予想】

重なった部分の面積は、DJ の長さにかかわらず、いつでも一定である。

【明子さんの予想】が正しい理由を説明しなさい。

解答欄

問1	cm ²	
問2	(1)	cm
	(2)	〔証明〕
	(3)	

解答

問1

$$16\text{cm}^2$$

問2

$$(1) \sqrt{17} \text{ cm}$$

(2)

〔証明〕

$\triangle OIC$ と $\triangle OJD$ において

$$OC=OD \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle OCI = \angle ODJ \quad \cdots \textcircled{2}$$

ここで

$$\angle COI = 90^\circ - \angle COJ \quad \cdots (\text{ア})$$

$$\angle DOJ = 90^\circ - \angle COJ \quad \cdots (\text{イ})$$

(ア) (イ)より

$$\angle COI = \angle DOJ \quad \cdots \textcircled{3}$$

よって, ①②③から

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle OIC \equiv \triangle OJD$$

(3)

(2)で DJ の長さによらず, $\triangle OIC \equiv \triangle OJD$ だから, これらの面積は等しい。

重なった部分の面積は, $\triangle OIC$ を $\triangle OJD$ の部分に移動することにより $\triangle OCD$ と等しくなるから, DJ の長さによらず, いつでも一定で, 正方形の面積の四分の一である。

解説

問1

$$\text{重なった部分は正方形の} \frac{1}{4} \text{ だから, } 8 \times 8 \times \frac{1}{4} = 16 \text{ (cm}^2\text{)}$$

問2

(1)

四角形 $ABCD$ は正方形なので, $BD = \sqrt{2} AB = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$

$$OC = OD = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

O から CD に垂線 OK をひく。

$$\triangle OKD \text{ は } \angle KDO = 45^\circ \text{ より, } KD = KO = \frac{OD}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4 \text{ (cm)} \text{ の直角二等辺三角形である。}$$

$$KJ = 5 - 4 = 1 \text{ (cm)}$$

$\triangle OKJ$ において, 三平方の定理より,

$$OJ = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ (cm)}$$

【問 11】

$AB=AC=12\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ の二等辺三角形 ABC がある。図1のように、辺 AB 上の点 A, B とは異なる位置に点 P をとる。点 B, C, P を通る円 O をかき、円周と辺 AC の交点を Q とする。また、線分 BQ, CP の交点を R とする。

次の各問いに答えなさい。

(長野県 2010 年度)

問1 円の中心 O は、次のア～エの中の、2つの直線の交点と一致する。

どの2つの直線か、次のア～エから2つ選び、記号を書きなさい。

- ア $\angle BAC$ の二等分線
- イ 辺 AC の垂直二等分線
- ウ $\angle BPC$ の二等分線
- エ 辺 BP の垂直二等分線

問2 $\triangle ABQ \equiv \triangle ACP$ を証明しなさい。

問3 図1において、 $BP=7\text{ cm}$ となるように点 P をとるとき、 $BR:RQ$ を求めなさい。

問4 図2は、図1において、円の中心 O が辺 BC 上の点となるように点 P をとったものである。

(1) BP の長さを求めなさい。

(2) $\triangle RBC$ の面積を求めなさい。

問5 図1において、 $BP=6\text{ cm}$ となるように点 P をとるとき、円 O の半径を求めなさい。

図1

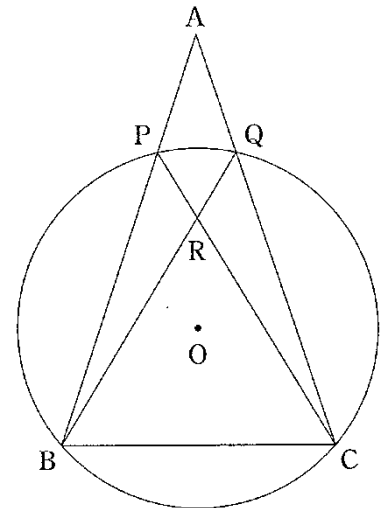
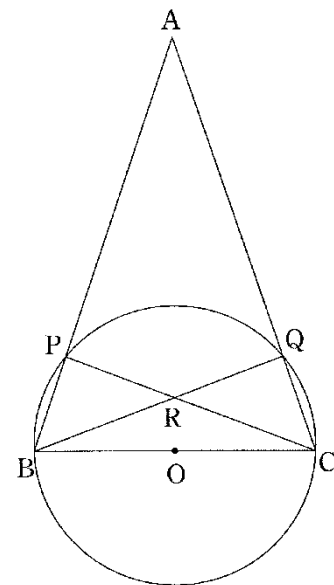


図2



解答欄

問1		
問2		
問3	:	
問4	(1)	cm
	(2)	cm ²
問5	cm	

解答

問1

ア,エ

問2

$\triangle ABQ$ と $\triangle ACP$ において,

仮定から,

$$AB=AC \quad \cdots \textcircled{1}$$

共通だから,

$$\angle BAQ = \angle CAP \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\widehat{PQ}$ の円周角だから,

$$\angle ABQ = \angle ACP \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABQ \equiv \triangle ACP$$

問3

12:5

問4

$$(1) \frac{3}{2} \text{ cm} \quad (2) \frac{3\sqrt{15}}{5} \text{ cm}^2$$

$$\text{問5} \quad \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

解説

問4

(1)

円周角の定理より, $\angle BPC = 90^\circ$ 2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle BPC \sim \triangle BOA$

$$BP:BO = BC:BA \quad BP:3 = 6:12 \quad BP = 3 \times \frac{6}{12} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

(2)

$$\text{三平方の定理より, } CP = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$$

$AP=AQ$, $AB=AC$ より, $AB:AP=AQ:AC$ だから, $PQ \parallel BC$

$$\text{よって, } PR:RC = PQ:BC = AP:AB = \left(12 - \frac{3}{2}\right):12 = 7:8$$

$$\text{よって, } \triangle RBC = \frac{8}{15} \triangle PBC = \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{5} \text{ cm}^2$$

問5

$BP=6 \text{ cm}$ のとき, $AP=BP=AQ=CQ=6 \text{ cm}$ だから,

$$\text{二等辺三角形 } ABC \text{ において, } PQ \parallel BC, PQ = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

PQ の中点を M , BC の中点を N とする。

$$AN = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$MN = \frac{AN}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$$

ここで, 3 辺の長さが等しいので, $\triangle OPB \equiv \triangle OBC \equiv \triangle OCQ$ $ON=x \text{ cm}$ とすると,

$$\triangle OPB = \triangle OBC = \triangle OCQ = \frac{1}{2} \times 6 \times x = 3x \text{ cm}^2 \quad \triangle OPQ = \frac{1}{2} \times 3 \times (MN - x) = \frac{3}{2} \left(\frac{3\sqrt{15}}{2} - x \right) \text{ cm}^2 \quad \triangle APQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{9\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2 \quad \text{よって, } \triangle ABC = \triangle OPB + \triangle OBC + \triangle OCQ + \triangle OPQ + \triangle APQ \text{ より, } \frac{1}{2} \times 6$$

$$\times 3\sqrt{15} = 3 \times 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{3\sqrt{15}}{2} - x \right) + \frac{9\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{これを解いて, } x = \frac{3\sqrt{15}}{5} \quad \text{よって, 円の半径は, } \triangle OBN \text{ で三平方の定理より, } \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{5} \right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ cm}$$

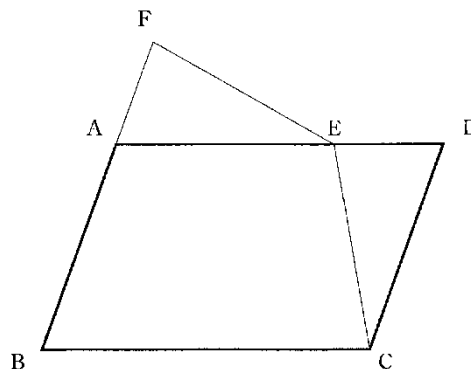
【問 12】

図のように、平行四辺形 $ABCD$ の辺 AD 上に $AB=AE$ となる点 E をとり、 BA の延長上に $AD=BF$ となる点 F をとる。 A と F 、 E と F 、 C と E をそれぞれ結ぶ。

次の問1、問2に答えなさい。

(岐阜県 2010 年度)

問1 $\triangle AEF \equiv \triangle DCE$ であることを証明する。次の証明の続きを書き、証明を完成させなさい。



〔証明〕

$\triangle AEF$ と $\triangle DCE$ で、

仮定から、

$$BF = AD \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$AB = AE \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から、

$$AF = DE \quad \cdots \textcircled{3}$$

問2 A と C 、 D と F をそれぞれ結び、 $\triangle EAC$ と $\triangle EDF$ をつくる。 $AB=3\text{ cm}$ 、 $BC=5\text{ cm}$ のとき、 $\triangle EAC$ の面積は $\triangle EDF$ の面積の何倍であるかを求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕 $\triangle AEF$ と $\triangle DCE$ で, 仮定から, $BF=AD$ …① $AB=AE$ …② ①, ②から, $AF=DE$ …③
問2	倍

解答

問1

平行四辺形の対辺だから,

$$AB=DC \cdots \text{④}$$

②, ④から,

$$AE=DC \cdots \text{⑤}$$

$BF \parallel CD$ より, 平行線の錯角だから,

$$\angle FAE = \angle EDC \cdots \text{⑥}$$

③, ⑤, ⑥から,

2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle AEF \equiv \triangle DCE$$

問2 $\frac{9}{4}$ 倍

解説

問2

$$AE:AD=3:2 \text{ より, } \triangle EDF = \frac{2}{3} \triangle AEF$$

$$\triangle EAC = \frac{3}{2} \triangle DCE \quad \triangle ADF \equiv \triangle DCE \text{ より, } \triangle EAC \text{ は } \triangle EDF \text{ の, } \frac{3}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{4} \text{ 倍}$$

【問 13】

線分 BC を直径とする円周上に 2 点 A, D をとり, $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ をつくる。このとき, $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ であることを次のように証明したい。(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) にあてはまる式として最も適当なものを, 下のアからカまでのの中からそれぞれ選んで, そのかな符号を書きなさい。

(愛知県 2010 年度 B)

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ で,

BC は直径だから, $\angle BAC = \angle CDB = 90^\circ \cdots \text{①}$

$\widehat{AB}$ に対する円周角だから, (Ⅰ) $\cdots \text{②}$

$AD \parallel BC$ だから, (Ⅱ) $\cdots \text{③}$

②, ③から, (Ⅲ) $\cdots \text{④}$

共通な辺だから, $BC = CB \cdots \text{⑤}$

①, ④, ⑤から,

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が, それぞれ等しいので,

$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$

ア $\angle ADB = \angle ABD$

イ $\angle ADB = \angle ACB$

ウ $\angle ADB = \angle DBC$

エ $\angle ACB = \angle ABD$

オ $\angle ACB = \angle DBC$

カ $\angle ABC = \angle DCB$

解答欄

Ⅰ (), Ⅱ (), Ⅲ ()

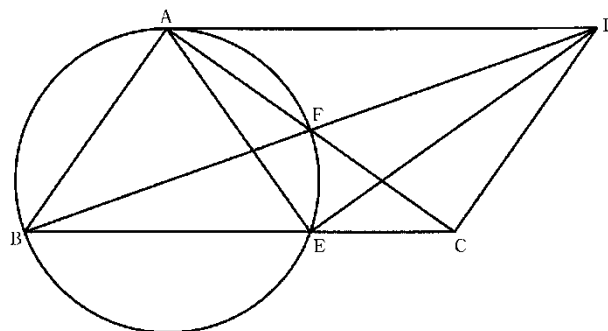
解答

Ⅰ (イ), Ⅱ (ウ), Ⅲ (オ)

【問 14】

図のように，平行四辺形 $ABCD$ の辺 BC 上に $AB=AE$ となる点 E をとる。3 点 A, B, E を通る円が，平行四辺形 $ABCD$ の対角線の交点 F を通るとき， $\triangle AED \equiv \triangle DCA$ であることを証明しなさい。ただし，点 E は点 B と異なる点とする。

(三重県 2010 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle AED$ と $\triangle DCA$ において,

共通だから,

$$AD=DA \quad \cdots \textcircled{1}$$

仮定より,

$$AB=AE \quad \cdots \textcircled{2}$$

平行四辺形の対辺は等しいから,

$$AB=DC \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より,

$$AE=DC \quad \cdots \textcircled{4}$$

また, 平行線の錯角は等しいから,

$$\angle EAD = \angle AEB \quad \cdots \textcircled{5}$$

$AB=AE$ より, $\triangle ABE$ は二等辺三角形だから,

$$\angle AEB = \angle ABC \quad \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より,

$$\angle EAD = \angle ABC \quad \cdots \textcircled{7}$$

平行四辺形の対角は等しいから,

$$\angle ABC = \angle CDA \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧より,

$$\angle EAD = \angle CDA \quad \cdots \textcircled{9}$$

①, ④, ⑨より,

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

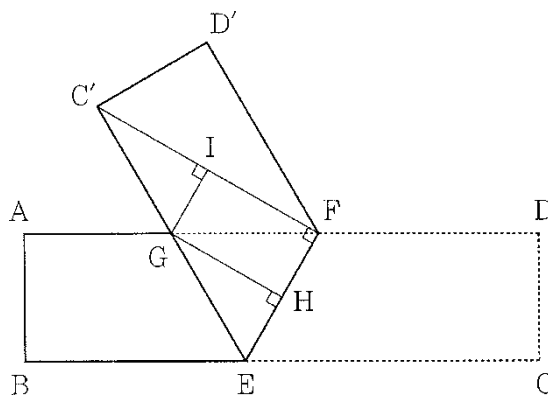
$$\triangle AED \equiv \triangle DCA$$

【問 15】

長方形の紙テープ ABCD を図のように EF で折り返したとき、点 C, D はそれぞれ点 C', D' に移動した。このとき、AF と C'E の交点を G とし、点 G から EF, FC' にそれぞれ垂線 GH, GI をひいた。また、EG=6 cm, EH=3 cm であった。さらに、EG = GC' = AG となり、 $\angle EFC' = 90^\circ$ となった。

次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2010 年度)



問1 $\triangle EHG$ と $\triangle GIC'$ が合同であることを次のように証明した。a と b にあてはまるものの組み合わせを、下の語群ア～エから選んで記号を書き、この証明を完成させなさい。

〔証明〕

$\triangle EHG$ と $\triangle GIC'$ において

$\angle EHG = \angle GIC' = 90^\circ$ …①

また、 $\angle EFC' = \angle GIC'$ より a となるので、同位角の関係より

$\angle HEG = \angle IG C'$ …②

さらに $EG = GC'$ …③

よって、①、②、③から b ので

$\triangle EHG \equiv \triangle GIC'$

語群

- | | | |
|---|---|--|
| ア | a : EF // GI | b : 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい |
| イ | a : EF $\perp$ IF | b : 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい |
| ウ | a : EF // GI | b : 直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい |

問2 線分 AB の長さは何 cm か、求めなさい。

問3 長方形の紙テープ ABCD の面積は何 cm^2 か、求めなさい。

解答欄

問1	
問2	cm
問3	cm ²

解答

問1 ア

問2 $3\sqrt{3}$ cm

問3 $63\sqrt{3}$ cm²

解説

問2

G から BC に垂線をひき、交点を K とする。

HF=GI=EH=3cm, EF=3+3=6cm

折り返した角より, $\angle GEF = \angle FEC$ 平行線の錯角より, $\angle GFE = \angle FEC$

よって, $\angle GEF = \angle GFE$ よって, GF=GE=6 cm

$\triangle GEF$ は正三角形なので, $\angle GEB = 180^\circ - 60^\circ \times 2 = 60^\circ$ $AB = GK = \frac{\sqrt{3}}{2} GE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ cm

問3

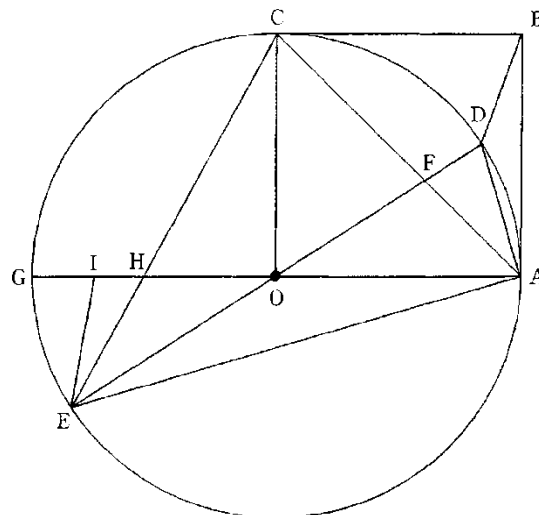
$KE = \frac{GE}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm

BC=BK+KE+EG+GC'=6+3+6+6=21cm

よって, 求める面積は $21 \times 3\sqrt{3} = 63\sqrt{3}$ cm²

【問 16】

図のような、正方形 $OABC$ と、中心が点 O で線分 OA を半径とし点 C を通る円 O がある。正方形 $OABC$ の内部にある弧 $\widehat{AC}$ 上に、2 点 A, C と異なる点 D をとる。点 O と点 D を通る直線をひき、円 O との交点のうち点 D と異なる点を E とする。点 A と点 C を結び、線分 AC と線分 OD との交点を F とする。点 A と点 D 、点 A と点 E 、点 B と点 D 、点 C と点 E をそれぞれ結ぶ。直線 OA と円 O との交点のうち点 A と異なる点を G とする。線分 OG と線分 CE との交点を H とする。線分 GH 上に点 I を、 $\angle OAE = \angle HEI$ となるようにとる。点 E と点 I を結ぶ。



このとき、次の問1では に適当な数を書き入れ、その後の指示に従って答えなさい。問2では に適当な数を書き入れなさい。

(岡山県 2010 年度)

問1 $\angle AEC =$ $^{\circ}$ である。また、 $\triangle OAF \equiv \triangle OEI$ を証明しなさい。

問2 $EI = 4$ cm, $\angle OAE = 15^{\circ}$ であるとき、 $\angle AOF =$ (ア) $^{\circ}$, $OI =$ (イ) cm である。

また、円 O の半径は (ウ) cm であり、 $\triangle ABD$ の面積は (エ) cm^2 である。

解答欄

問1	$\angle AEC = \quad \circ$	
	〔証明〕	
問2	(ア)	$\circ$
	(イ)	cm
	(ウ)	cm
	(エ)	cm ²

解答

問1

$$\angle AEC = 45^\circ$$

〔証明〕

$\triangle OAF$ と $\triangle OEI$ において,

OA, OE は円 O の半径なので,

$$OA = OE \quad \cdots (1)$$

対頂角は等しいから,

$$\angle AOF = \angle EOI \quad \cdots (2)$$

AC は正方形 $OABC$ の対角線なので,

$$\angle OAF = 45^\circ \quad \cdots (3)$$

仮定から, $\angle OAE = \angle HEI$ なので,

$$\angle OEI = \angle OEH + \angle HEI$$

$$= \angle OEH + \angle OAE \quad \cdots (4)$$

(1)より $\triangle OAE$ は二等辺三角形なので,

$$\angle OAE = \angle OEA \quad \cdots (5)$$

(4), (5)から,

$$\angle OEI = \angle OEH + \angle OEA$$

$$= \angle AEH$$

$$= \angle AEC$$

$$= 45^\circ \quad \cdots (6)$$

(3), (6)から,

$$\angle OAF = \angle OEI \quad \cdots (7)$$

(1), (2), (7)から, 一辺とその両端の角が

それぞれ等しいので,

$$\triangle OAF \equiv \triangle OEI$$

問2

$$(ア) \quad 30^\circ$$

$$(イ) \quad 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(ウ) \quad 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(エ) \quad 4\text{cm}^2$$

解説

問2

弧 AD に対する円周角と中心角の関係より,

$$\angle AOF = \angle AOD = 2\angle AED = 2 \times 15^\circ = 30^\circ \quad \cdots (ア)$$

$\triangle OAF \equiv \triangle OEI$ だから, $AF = EI = 4 \text{ cm}$ F から OA に垂線をひき, その交点を J とおく。

$$\triangle FAJ \text{ は } \angle FAJ = 45^\circ \text{ より, } FJ = AJ \text{ の直角二等辺三角形になるので, } FJ = AJ = \frac{FA}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle FOJ$ は, $\angle FOJ = 30^\circ$ の直角三角形だから

$$OF = 2FJ = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \quad OI = OF = 4\sqrt{2} \text{ cm} \quad \cdots (イ)$$

$$\text{また, } OJ = \sqrt{3} FJ = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{よって, 円の半径 } OA = OJ + AJ = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} \text{ cm} \quad \cdots (ウ)$$

D から OA に垂線をひき, その交点を K とする。

$\triangle ODK$ は $\angle DOK = 30^\circ$ の直角三角形だから,

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} \text{ cm}$$

$$AK = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle ABD = \frac{1}{2} \times AB \times AK = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \times (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

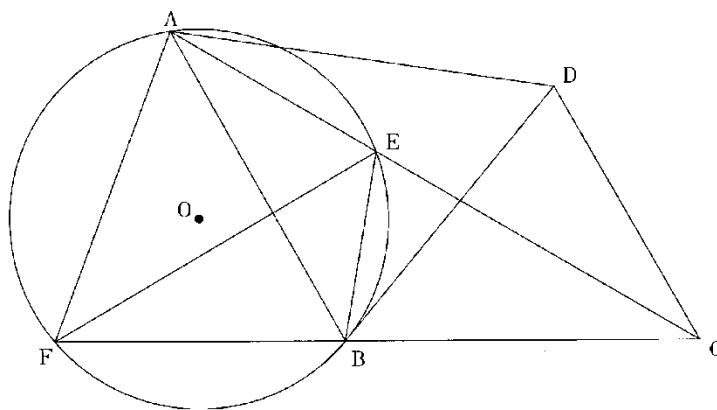
$$= (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 6 - 2 = 4 \text{ cm}^2 \quad \cdots (エ)$$

【問 17】

図のように、円 O と $AB \parallel DC$ の台形 $ABCD$ があり、2 点 A, B は円 O の円周上の点です。対角線 AC と円 O との交点を E 、 CB の延長と円 O との交点を F とします。このとき、 $EF = EC$ 、 $\angle BEF = \angle CBD$ です。

これについて、次の問1・問2に答えなさい。

(広島県 2010 年度)



問1 $\triangle AFB \equiv \triangle BDC$ であることを証明しなさい。

問2 $\triangle ABD$ の面積が 12 cm^2 、 $BC = 5 \text{ cm}$ のとき、点 A と直線 CF との距離は何 cm ですか。

解答欄

問1	〔仮定〕 図において、4 点 A, B, E, F は円 O の円周上の点、$AB \parallel DC$、$EF = EC$、$\angle BEF = \angle CBD$ 〔結論〕 $\triangle AFB \equiv \triangle BDC$ 〔証明〕
問2	cm

解答

問1

$\triangle AFB$ と $\triangle BDC$ において

$EF=EC$ であるから

$$\angle BFE = \angle BCE \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\widehat{BE}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BFE = \angle BAE \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \angle BCE = \angle BAE \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{より}, AB=BC \quad \cdots \textcircled{4}$$

平行線の同位角は等しいから

$$\angle ABF = \angle BCD \quad \cdots \textcircled{5}$$

$\widehat{BF}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAF = \angle BEF \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\angle BEF = \angle CBD \text{ であることと } \textcircled{6} \text{より},$$

$$\angle BAF = \angle CBD \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{7} \text{より},$$

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFB \equiv \triangle BDC$$

$$\text{問2} \quad \frac{24}{5}$$

解説

問2

$\triangle AFB \equiv \triangle BDC$ より,

A と CF との距離は, B と CD との距離と等しい。

また, $AB \parallel DC$ より, D と AB との距離とも等しい。

$$AB=BC=5 \text{ cm}, \triangle ABD=12 \text{ cm}^2 \text{ より}, \frac{1}{2} \times 5 \times (\text{D と AB との距離})=12$$

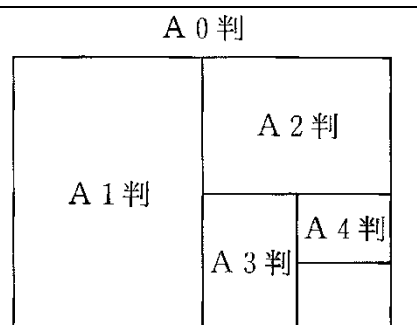
$$(\text{D と AB との距離}) = \frac{24}{5}$$

$$\text{よって, A と CF との距離は } \frac{24}{5} \text{ cm}$$

【問 18】

身のまわりにある教科書やノート、コピー用紙の大きさは、A 判や B 判という紙の規格にもとづいているものが多い。そのうち、A 判の紙の大きさは、次のように決められている。

- ① となり合う 2 辺の長さの比が $1:\sqrt{2}$ で、面積が 1 m^2 の長方形の紙の大きさを A0 判とする。
- ② A0 判の紙を、長い方の辺が半分になるように切ってできた長方形の紙の大きさを、A1 判とする。
- ③ 同じように、長方形の長い方の辺が半分になるように次々と切ってできた長方形の紙の大きさを順に、A2 判、A3 判、A4 判、…とする。



次の問1～問4に答えなさい。

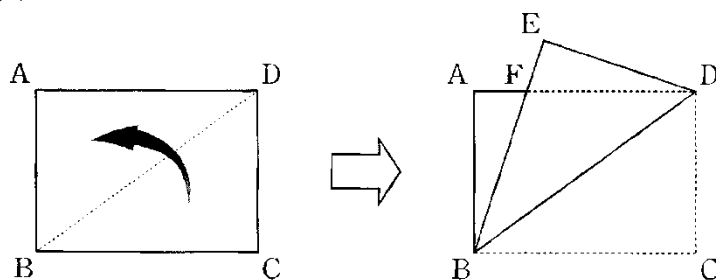
(山口県 2010 年度)

問1 A0 判の紙の短い方の辺の長さを $a\text{ cm}$ とするとき、A2 判の紙の長い方の辺の長さを a を使って表しなさい。

問2 A3 判の紙の面積は、A0 判の紙の面積の何倍か。求めなさい。

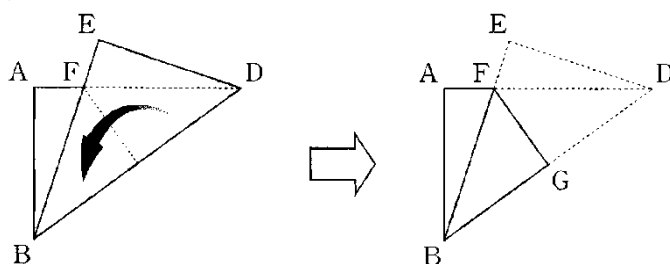
問3 図1のように、A4 判の紙 ABCD を対角線 BD で折り返したとき、頂点 C が移った点を E、線分 AD と線分 BE の交点を F とする。このとき、 $\triangle ABF \equiv \triangle EDF$ であることを証明しなさい。

図1



問4 図2のように、図1でできた図形を、さらに点 D が点 B に重なるように折り返すと、点 E は点 A に重なった。このとき、折り目となる線分を FG とする。 $AB=21\text{ cm}$ 、 $AD=21\sqrt{2}\text{ cm}$ とするとき、線分 FG の長さを求めなさい。

図2



解答欄

問1	cm
問2	倍
問3	〔証明〕
問4	cm

解答

問1 $\frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ cm}$

問2 $\frac{1}{8}$ 倍

問3

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle EDF$ で

四角形 $ABCD$ は長方形であるから

$AB=DC \cdots \textcircled{1}$

$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ \cdots \textcircled{2}$

仮定から

$DC=DE \cdots \textcircled{3}$

$\angle BCD=\angle BED=90^\circ \cdots \textcircled{4}$

①, ③から

$AB=ED \cdots \textcircled{5}$

②, ④から

$\angle BAF=\angle DEF \cdots \textcircled{6}$

また, 対頂角は等しいから

$\angle AFB=\angle EFD \cdots \textcircled{7}$

⑥, ⑦から

$\angle ABF=\angle EDF \cdots \textcircled{8}$

よって, ⑤, ⑥, ⑧から,

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABF \equiv \triangle EDF$

問4 $\frac{21\sqrt{6}}{4} \text{ cm}$

解説

問2

A 0 版の短い方の辺の長さを $a \text{ cm}$ とするとき,

A 0 版の長い方の辺は $\sqrt{2}a \text{ cm}$,

A 3 版の長い方の辺は $\frac{1}{2}a \text{ cm}$, 短い方の辺は $\frac{\sqrt{2}}{4}a \text{ cm}$ と表せる。

$$(\text{A 3 版の面積}) \div (\text{A 0 版の面積}) = \left(\frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{4}a \right) \div (a \times \sqrt{2}a) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}a^2 \right) \div (\sqrt{2}a^2) = \frac{1}{8} \text{ 倍}$$

問4

$\triangle ABD$ において, 三平方の定理より,

$$BD = \sqrt{21^2 + (21\sqrt{2})^2} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BG = DG = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$\triangle BFG \sim \triangle BDE$ だから,

$$FG : DE = BG : BE \quad FG : 21 = \frac{21\sqrt{3}}{2} : 21\sqrt{2}$$

$$21\sqrt{2} \cdot FG = 21 \times \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

$$FG = \frac{21\sqrt{6}}{4} \text{ cm}$$

【問 19】

図のように、線分 AB を直径とする半径 5 cm の円 O の周上に $AC=8\text{ cm}$ となる点 C をとる。点 O を通り、線分 BC に平行な直線が線分 AC と交わる点を D 、線分 AC に平行な直線が線分 BC と交わる点を E とする。

次の問1・問2に答えなさい。

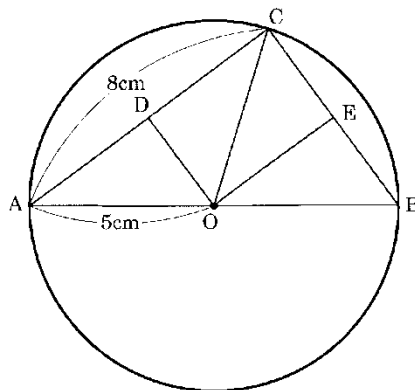
(徳島県 2010 年度)

問1 図1のように、線分 OC をひく。次の(1)・(2)に答えなさい。

(1) 線分 BC の長さを求めなさい。

(2) $\triangle CDO \equiv \triangle OEB$ を証明しなさい。

図1



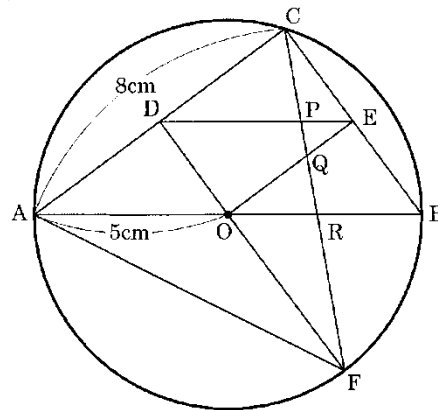
問2 図2のように、線分 DO を延長し、点 C を含まない $\widehat{AB}$ と交わる点を F とし、線分 DE , AF , CF をひく。また、線分 CF と線分 DE , OE , OB との交点をそれぞれ P , Q , R とする。次の(1)・(2)に

答えなさい。

(1) $\angle DAO$ の大きさを α 度とすると、 $\angle OAF$ の大きさを、 α を用いて表しなさい。

(2) 四角形 $EQRB$ の面積を求めなさい。

図2



解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	〔証明〕
問2	(1)	() 度
	(2)	cm ²

解答

問1

(1) 6cm

(2)

〔証明〕

$\triangle CDO$ と $\triangle OEB$ で,

$BC \parallel OD, AC \parallel OE$ から,

2組の向かいあう辺が, それぞれ平行だから,

四角形 $CDOE$ は平行四辺形である。

よって, $CD=OE$ …①

CO, OB はそれぞれ円 O の半径だから,

$CO=OB$ …②

$\triangle OCA$ は $OC=OA$ の二等辺三角形だから,

$\angle OCD=\angle OAD$ …③

$AC \parallel OE$ から, 同位角が等しいので,

$\angle OAD=\angle BOE$ …④

③, ④から,

$\angle OCD=\angle BOE$ …⑤

①, ②, ⑤から,

2辺とその間の角が, それぞれ等しいので,

$\triangle CDO \equiv \triangle OEB$

問2

(1) $\frac{90-a}{2}$ 度

(2) $\frac{189}{44} \text{ cm}^2$

解説

問2

(1)

$OA=OF$ より, $\angle OFA=\angle OAF$ $\angle FDA=\angle BCA=90^\circ$

よって, $\triangle AFD$ の内角の和は 180° より, $2\angle OAF + a^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $2\angle OAF = 90^\circ - a^\circ$ $\angle OAF = \frac{90-a}{2} (^\circ)$

(2)

$\triangle ABC$ において $EO \parallel CA$ より, $BE:EC=BO:OA=5:5=1:1$

よって, $CE=EB=\frac{6}{2}=3\text{cm}$

また, 中点連結定理より, $OE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4\text{cm}$

$OE \parallel AC$ より, $\angle OEB=90^\circ$

$\triangle OEB=\frac{1}{2}BE \times OE=\frac{1}{2}\times 3 \times 4=6\text{cm}^2$

$DF \parallel CB$ より, $EQ:QO=CE:OF=3:5$ $OR:RB=OF:CB=5:6$

$\triangle ORQ=\frac{5}{8}\triangle EOR=\frac{5}{8}\times \frac{5}{11}\triangle OEB=\frac{5}{8}\times \frac{5}{11}\times 6=\frac{75}{44}\text{cm}^2$

(四角形 $EQRB$) $=\triangle OEB-\triangle ORQ=6-\frac{75}{44}=\frac{189}{44}\text{cm}^2$

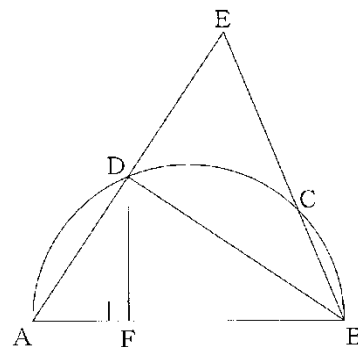
【問 20】

図のような、線分 AB を直径とする半円があり、点 C は $\widehat{AB}$ 上の点である。 $\angle CBA$ の二等分線をひき、 $\widehat{AC}$ との交点を D とし、直線 AD と直線 BC との交点を E とする。また、点 D から線分 AB に垂線をひき、その交点を F とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(香川県 2010 年度)

問い 線分 EC の中点を G とし、点 D と点 G を結ぶとき、 $\triangle ADF \equiv \triangle EDG$ であることを証明せよ。



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

点 A と点 C を結ぶ。

$\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ において、

BD は共通

仮定より、

$\angle ABD = \angle EBD$

AB は直径だから、 $\angle ADB = 90^\circ$ $\angle EDB = 180^\circ - \angle ADB = 90^\circ$

よって、 $\angle ADB = \angle EDB$

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ABD \equiv \triangle EBD$

よって、 $AD = ED$ …①

仮定より、

点 G は線分 EC の中点だから、 $CG = EG$ …②

①, ②より、

$DG \parallel AC$

同位角は等しいから、

$\angle EGD = \angle GCA$

AB は直径で、 $\angle ACB = 90^\circ$ だから、

$\angle GCA = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

よって、 $\angle EGD = \angle GCA = 90^\circ$ …③

$\triangle ADF$ と $\triangle EDG$ において、

$\triangle ABD \equiv \triangle EBD$ より、

$AD = ED$, $\angle DAF = \angle DEG$

仮定より、

$\angle AFD = 90^\circ$

よって、③より、 $\angle AFD = \angle EGD = 90^\circ$

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ADF \equiv \triangle EDG$

解説

AC を結ぶ。

$\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ の合同を導くと、 $AD = ED$, $\angle DAF = \angle DEG$ がいえる。

また、 $\triangle EAC$ で中点連結定理より、 $DG \parallel AC$

$\angle DGC = \angle ACB = 90^\circ$ だから、 $\angle AFD = \angle EGD = 90^\circ$ がいえる。

これより直角三角形の合同条件に結びつける。

【問 21】

図1のように、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC があり、2 辺 AC , BC をそれぞれ 1 辺とする正方形 $ACDE$, $BFGC$ を二等辺三角形 ABC の外側につくる。また、点 A と点 F を結び $\triangle ABF$ を、点 B と点 D を結び $\triangle DCB$ をそれぞれつくる。このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2010 年度)

問1 $\triangle ABF \equiv \triangle DCB$ であることを証明せよ。

問2 右の図2のように、 $\angle BAC = 90^\circ$ で、 $BC = 2 \text{ cm}$ であるとき、

(1) 線分 BD の長さを求めよ。

(2) 線分 AF と、線分 BD , BC との交点をそれぞれ H , I とする。このとき、線分 HI の長さを求めよ。

図1

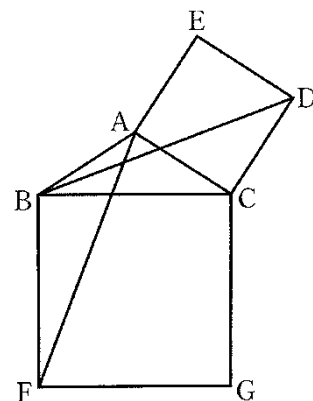
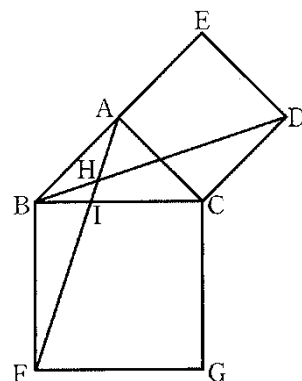


図2



解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle DCB$ において,

四角形 $BFGC$ は正方形だから,

$BF=CB$ …①

仮定から, $AB=AC$

四角形 $ACDE$ は正方形だから,

$AC=DC$

よって, $AB=DC$ …②

また, $\angle ABF=90^\circ + \angle ABC$

$\angle DCB=90^\circ + \angle ACB$

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから,

$\angle ABC=\angle ACB$

よって, $\angle ABF=\angle DCB$ …③

①, ②, ③で,

2つの三角形は, 2辺とその間の角がそれぞれ等しいことがいえたから,

$\triangle ABF \equiv \triangle DCB$

問2

(1) $\sqrt{10}$ cm

(2) $\frac{\sqrt{10}}{12}$ cm

解説

問2

(1)

$\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$ より, $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから, $AB=AC=\frac{BC}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ cm

四角形 $ACDE$ は正方形だから, $AE=DE=\sqrt{2}$ cm, $\angle BED=90^\circ$

$\triangle BDE$ で, 三平方の定理より, $BD=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$ cm

(2)

A から BC に垂線 AK をひく。

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の直角二等辺三角形だから,

$AK=BK=CK=\frac{2}{2}=1$ cm

$BF \parallel AK$ より, $BI:IK=BF:AK=2:1$ $BI=\frac{2}{3} \times 1=\frac{2}{3}$ cm, $IK=\frac{1}{3} \times 1=\frac{1}{3}$ cm

$\triangle AIK$ で三平方の定理より, $AI=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$ cm

A と D を結ぶ。 $\angle CAD=45^\circ$, $\angle ACB=45^\circ$ より, 錯角が等しいので, $AD \parallel BC$

よって, $AH:HI=AD:BI=2:\frac{2}{3}=3:1$ $HI=\frac{1}{4}AI=\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{\sqrt{10}}{12}$ cm

【問 22】

図1～図3のように、3点 A, B, C は円周上にある点で、三角形 ABC は1辺の長さが 4 cm の正三角形である。点 C をふくまない弧 AB 上に $\angle ACP = 15^\circ$ となる点 P をとる。

このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2010 年度)

図2, 図3において、線分 CP 上に $AP = CQ$ となる点 Q をとるとき、次の(1), (2)に答えよ。

(1) $\triangle PBA \equiv \triangle QBC$ であることを証明せよ。

(2) 図3において、点 B から線分 CP にひいた垂線と線分 CP との交点を H とするとき、次の①, ②に答えよ。

① 線分 BH の長さは何 cm か。

② 三角形 BQH の面積は何 cm^2 か。ただし、答えだけでなく、答えを求める過程がわかるように、途中の式や計算なども書くこと。

図1

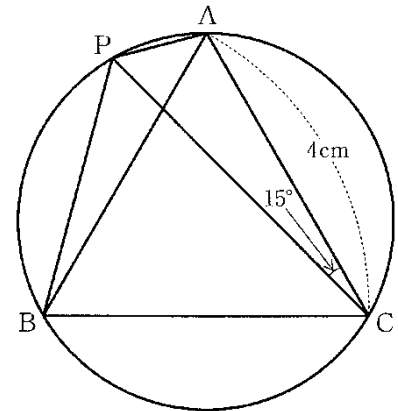


図2

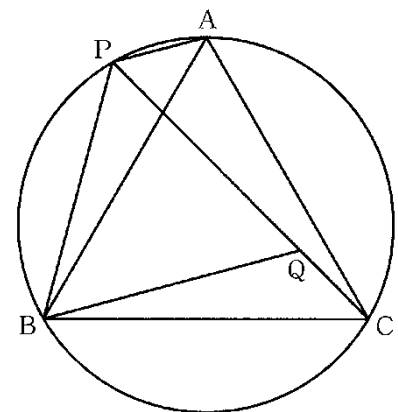
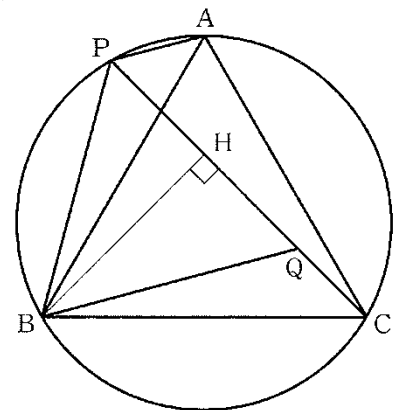


図3



(1)	〔証明〕		
(2)	①	cm	
	②		
	答		cm ²

解答

(1)

$\triangle PBA$ と $\triangle QBC$ において,

$AB=CB$ (仮定) $\cdots$ ①

$AP=CQ$ (仮定) $\cdots$ ②

$\angle PAB=\angle QCB$ (弧 PB に対する円周角) $\cdots$ ③

①, ②, ③より,

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle PBA \equiv \triangle QBC$

(2)

① $2\sqrt{2}$ cm

②

$\triangle PBA \equiv \triangle QBC$ だから $BP=BQ$

また, $\angle BPQ=60^\circ$ より $\angle BQP=60^\circ$

ゆえに, $\triangle BQH$ は $\angle BQH=60^\circ$,

$\angle BHQ=90^\circ$ の直角三角形なので,

$$QH:2\sqrt{2}=1:\sqrt{3} \text{ より } QH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

したがって, $\triangle BQH$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{答 } \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

解説

(2)

②

$\triangle PBA \equiv \triangle QBC$ より, $PB=QB$

$\angle BPQ=60^\circ$ より, $\triangle BPQ$ は正三角形。

$$\text{よって, } QH = \frac{BQ}{2} = \frac{BP}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{したがって, } \triangle BQH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$