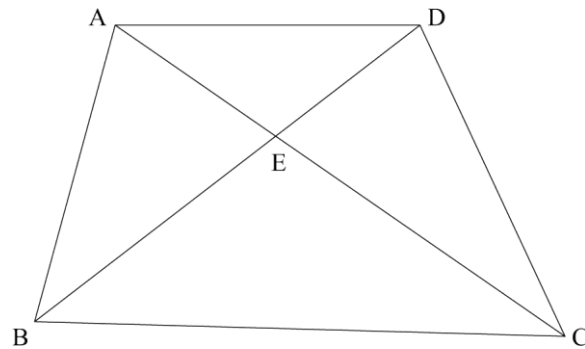


3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2021 年度出題】

【問 1】

下の図のように、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、対角線 AC 、 BD の交点を E とします。
次の問いに答えなさい。

(北海道 2021 年度)



問 1 $CD=CE$, $\angle ACD=30^\circ$ のとき, $\angle BEC$ の大きさを求めなさい。

問 2 線分 BE 上に点 F を, $BF=DE$ となるようにとります。点 F を通り, 対角線 AC に平行な直線と辺 AB , BC との交点をそれぞれ G , H とします。このとき, $AD=HB$ を証明しなさい。

解答欄

問 1	度
問 2	[証明]

解答

問 1 105 度

問 2

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle HBF$ において

仮定より, $DE=BF$ …①

$AD \parallel BC$ より, $\angle ADE = \angle HBF$ (錯角)…②

対頂角は等しいので, $\angle AED = \angle CEB$

$AC \parallel GH$ より, $\angle CEB = \angle HFB$ (同位角)

したがって, $\angle AED = \angle HFB$ …③

①, ②, ③より

一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \equiv \triangle HBF$ …④

したがって, $AD=HB$

解説

問 1

$CD=CE$ より, $\triangle CDE$ は二等辺三角形なので, 底角は等しいから

$\angle CDE = \angle CED$

よって, $\angle CED = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$

ゆえに, $\angle BEC = 180^\circ - \angle CED = 105^\circ$

① 問題文中から

条件として, $AD \parallel BC$, $BF=DE$, $AC \parallel GH$ が見つかる。

② $AD \parallel BC$, $AC \parallel GH$ からは

「同位角, 錯角が等しい」「平行線と線分の比」などが発想として出てくる。

③ 今回は, $AD=HB$ であることの証明であり

そのためには $\triangle ADE$ と $\triangle HBF$ が合同であることを示せばよいので

$BF=DE$, 「同位角, 錯角が等しい」などを利用する可能性が高い。

図 1

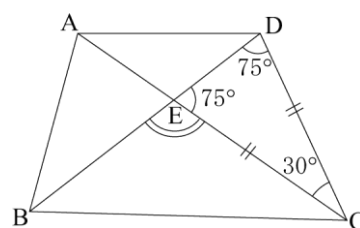
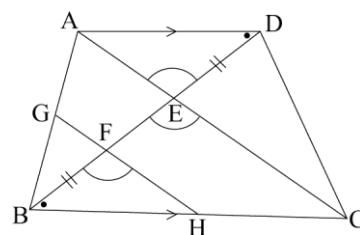


図 2



【問 2】

下の図のように、正三角形 ABC があり、辺 AC 上に点 D をとる。また、正三角形 ABC の外側に正三角形 DCE をつくる。このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。

(青森県 2021 年度)

- (1) $\triangle BCD \equiv \triangle ACE$ であることを次のように証明した。㉞ , ㉟ には式, ㊦ には適切な内容をそれぞれ入れなさい。

[証明]

$\triangle BCD$ と $\triangle ACE$ について

$\triangle ABC$ と $\triangle DCE$ は正三角形だから、

㉞ …①

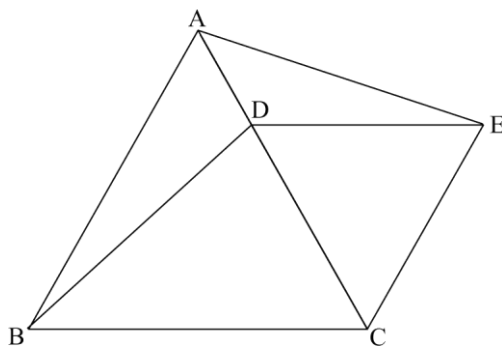
$CD = CE$ …②

㉟ $= 60^\circ$ …③

①, ②, ③から、

㊦ がそれぞれ等しいので、

$\triangle BCD \equiv \triangle ACE$



- (2) 四角形 $ABCE$ の周の長さが 21 cm のとき、次の①、②に答えなさい。

① $AB = a \text{ cm}$, $CD = b \text{ cm}$ としたとき、辺 AE の長さを a, b を用いて表しなさい。

② $\triangle ABD$ の周の長さが 13 cm のとき、正三角形 DCE の 1 辺の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	㉞	
	㉟	
	㊦	
(2)	①	
	②	cm

解答

(1)

㊦ $BC=AC$

㊧ $\angle BCD=\angle ACE$

㊨ 2組の辺とその間の角

(2)

① $21-2a-b$

② 4 (cm)

解説

(2)

①

四角形 ABCE の周の長さが 21cm なので、

$$AB+BC+CE+AE=21$$

$$AB=BC=a$$

$CD=CE=b$ なので

$$a+a+b+AE=21$$

$$AE=21-2a-b$$

②

$\triangle BCD \equiv \triangle ACE$ なので対応する辺の長さは等しく

$$BD=AE=21-2a-b \quad (\cdots \text{式①})$$

また、 $AD=AC-CD=a-b$ ($\cdots$ 式②)

$\triangle ABD$ の周の長さが 13cm なので

$$AB+BD+AD=13$$

これに式①と式②を代入すると

$$a+(21-2a-b)+(a-b)=13$$

$$21-2b=13$$

$$b=4$$

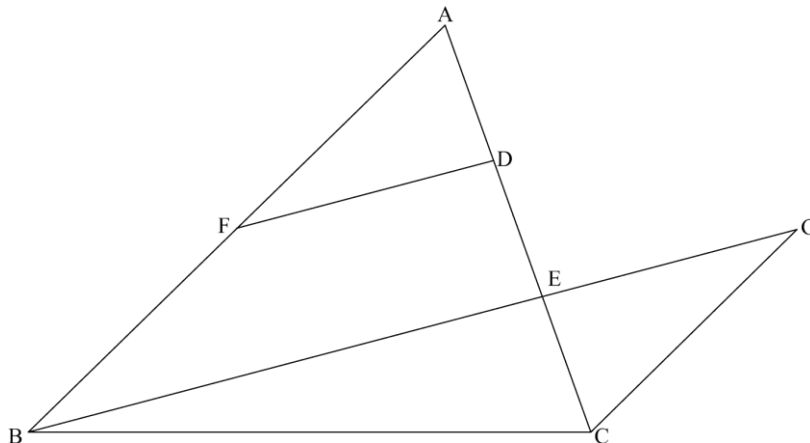
よって、CD の長さが 4cm なので、正三角形 DCE の 1 辺の長さは 4cm である。

【問 3】

次の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 AC 上に 2 点 D , E があり、 $AD=DE=EC$ となっています。点 D を通り、直線 BE に平行な直線をひき、辺 AB との交点を F とします。また、点 C を通り、辺 AB に平行な直線をひき、直線 BE との交点を G とします。

このとき、 $\triangle AFD \equiv \triangle CGE$ であることを証明しなさい。

(岩手県 2021 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle AFD$ と $\triangle CGE$ において

仮定から

$AD=CE$ …①

$AB \parallel GC$ より、平行線の錯角は等しいから

$\angle FAD = \angle GCE$ …②

$FD \parallel BG$ より、平行線の同位角は等しいから

$\angle ADF = \angle AEB$ …③

対頂角は等しいから

$\angle CEG = \angle AEB$ …④

③, ④から

$\angle ADF = \angle CEG$ …⑤

①, ②, ⑤より

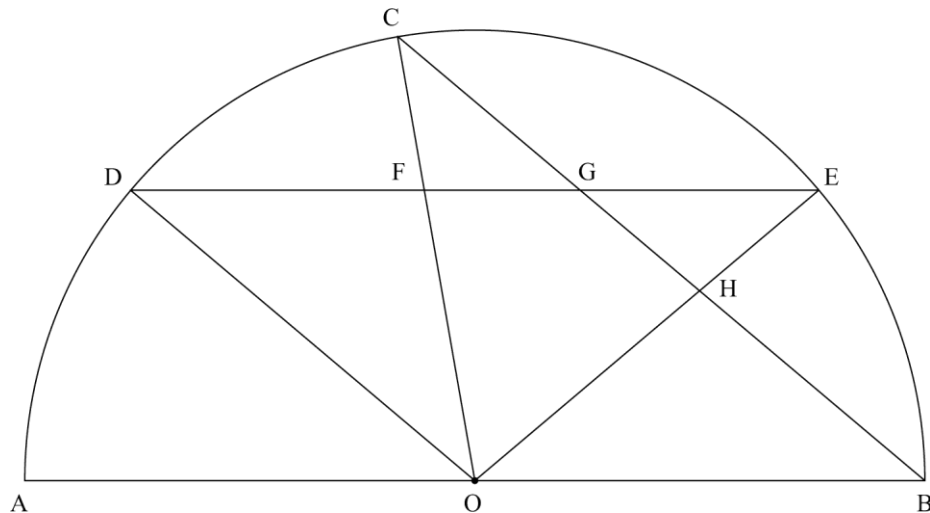
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AFD \equiv \triangle CGE$

【問 4】

下の図のように、点 O を中心とし、線分 AB を直径とする半円 O がある。点 A とは異なる点 C を、弧 AB 上に、 $\angle AOC$ の大きさが 90° より小さくなるようにとる。また、点 D を、弧 AC 上に、 $OD \parallel BC$ となるようにとる。点 D を通り線分 AB に平行な直線と半円 O との交点のうち点 D とは異なる点を E とする。線分 DE と線分 OC 、 BC との交点をそれぞれ F 、 G とし、線分 OE と線分 BC との交点を H とする。このとき、それぞれの問いに答えなさい。

(山形県 2021 年度)



問 1 $\angle BGE = 40^\circ$ であるとき、 $\angle AOC$ の大きさを求めなさい。

問 2 $\triangle OCH \equiv \triangle OEF$ であることを証明しなさい。

問 3 $AB = 8 \text{ cm}$ 、 $DE = 6 \text{ cm}$ であるとき、 $\triangle CFG$ の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	
問 2	〔証明〕
問 3	cm ²

解答

問 1 80°

問 2

〔証明〕

△OCH と△OEF において

共通だから

∠COH＝∠EOF…①

半円 O の半径だから

OC＝OE…②

△OCB は OC＝OB の二等辺三角形だから

∠OCH＝∠OBC…③

仮定より四角形 OBGD は平行四辺形であり

平行四辺形の対角は等しいから

∠OBC＝∠ODE…④

△ODE は OD＝OE の二等辺三角形だから

∠ODE＝∠OEF…⑤

③，④，⑤より

∠OCH＝∠OEF…⑥

①，②，⑥より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△OCH≡△OEF

問 3 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ cm²

解説

問 1

① 問題文中から、条件となる情報をさがすと、線分 AB を直径とする半円、 $OD \parallel BC$, $DE \parallel AB$ などが見つかる。

② 線分 AB を直径とする半円からは、「円周角の定理」「半円の弧に対する円周角は 90° 」

$OD \parallel BC$, $DE \parallel AB$ からは、「同位角、錯角は等しい」「平行線と線分の比」などが発想として出てくる。

③ 今回は、 $\angle AOC$ の大きさを求める問題なので、「円周角の定理」「半円の弧に対する円周角は 90° 」「同位角、錯角は等しい」などの角に関する性質を利用する可能性が高い。

以上のことに注意して解いていく。

図 1 のように、 $DE \parallel AB$ より、錯角は等しいので、 $\angle BGE = \angle ABC = 40^\circ$

円周角の定理より、 $\angle AOC = 2\angle ABC = 80^\circ$

問 2

問 1 のヒントから、平行により、四角形 $OBGD$ が平行四辺形となることに注意。証明に利用する辺や角などは図 2 を参照。

問 3

問 1 のヒントに加えて、問 2 で証明に利用した $\square OBGD$ や、証明の結論である $\triangle OCH \equiv \triangle OEF$ にも着目する。直径 AB の長さが 8cm だから、半径 OB , OA , OD , OC , OE の長さはすべて 4cm である。

図 3 のように、 $\square OBGD$ の対辺は等しいので、 $DG = OB = 4(\text{cm})$

よって、 $GE = DE - DG = 6 - 4 = 2(\text{cm})$

$GE \parallel OB$ より、 $\triangle GEH$ と $\triangle OBH$ で、平行線と線分の比から、 $EH : OH = GE : BO = 2 : 4 = 1 : 2$

よって、 $OH = \frac{2}{3}OE = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}(\text{cm})$

図 4 で、 $\triangle OCH \equiv \triangle OEF$ より

$OF = OH = \frac{8}{3}(\text{cm})$

よって、 $FC = OC - OF = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}(\text{cm})$

図 1

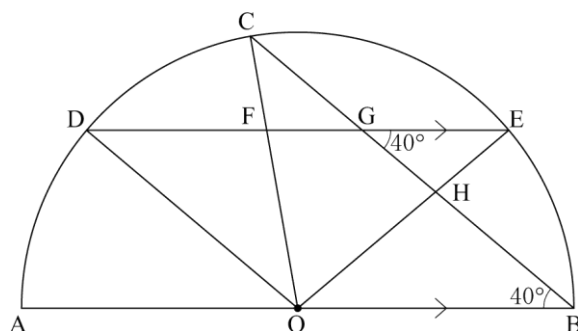


図 2

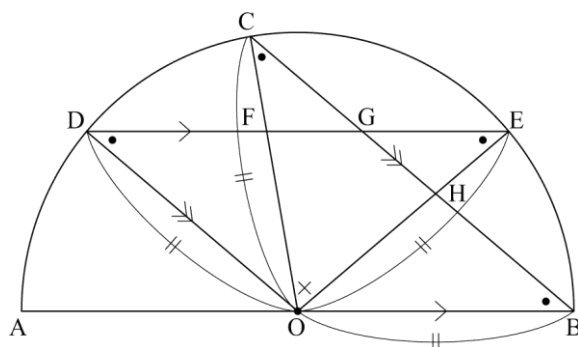


図 3

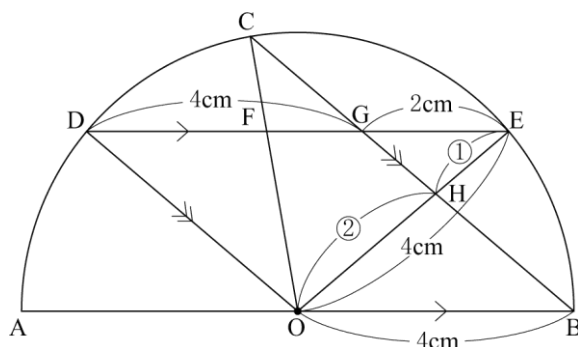


図 4

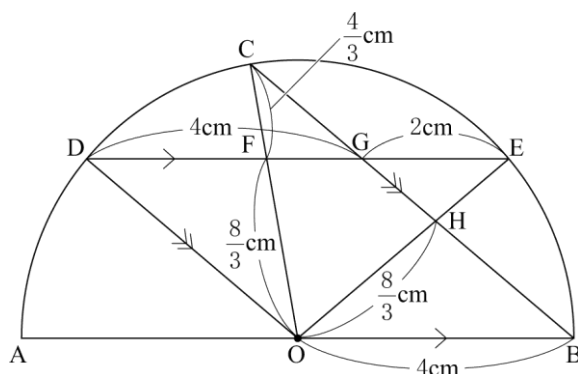


図5で、 $DG : GE = 4 : 2 = 2 : 1$ より、

$$\triangle DOG : \triangle EOG = 2 : 1$$

$$\text{すなわち、} \triangle DOG = \frac{2}{3} \triangle DOE$$

また、 $CG \parallel DO$ より

$\triangle FCG$ と $\triangle FOD$ で平行線と線分の比から

$$GF : DF = CF : OF = \frac{4}{3} : \frac{8}{3} = 1 : 2 \text{より}$$

$$\triangle GOF : \triangle DOF = 1 : 2$$

$$\text{すなわち} \triangle GOF = \frac{1}{3} \triangle DOG$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \triangle DOE$$

$$= \frac{2}{9} \triangle DOE$$

$CF : OF = 1 : 2$ より

$$\triangle CFG : \triangle GOF = 1 : 2$$

すなわち

$$\triangle CFG = \frac{1}{2} \triangle GOF = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} \triangle DOE = \frac{1}{9} \triangle DOE$$

ここで図6のように

$\triangle DOE$ において

点Oから、辺DEに垂線OIをおろす。

$\triangle DOE$ は $OD = OE$ の二等辺三角形だから

$$DI = EI = 3 \text{ (cm)}$$

$\triangle DIO$ は $\angle DIO = 90^\circ$ の直角三角形だから

三平方の定理より

$$OI^2 = OD^2 - DI^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$OI > 0$ より

$$OI = \sqrt{7} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって} \triangle DOE = \frac{1}{2} \times DE \times OI = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{したがって} \triangle CFG = \frac{1}{9} \triangle DOE = \frac{1}{9} \times 3\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

図5

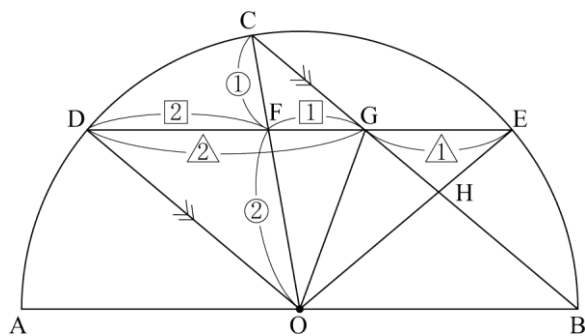
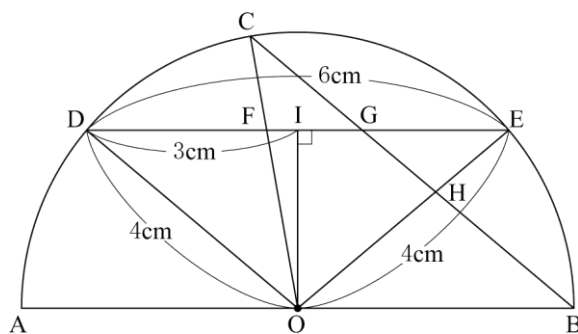


図6

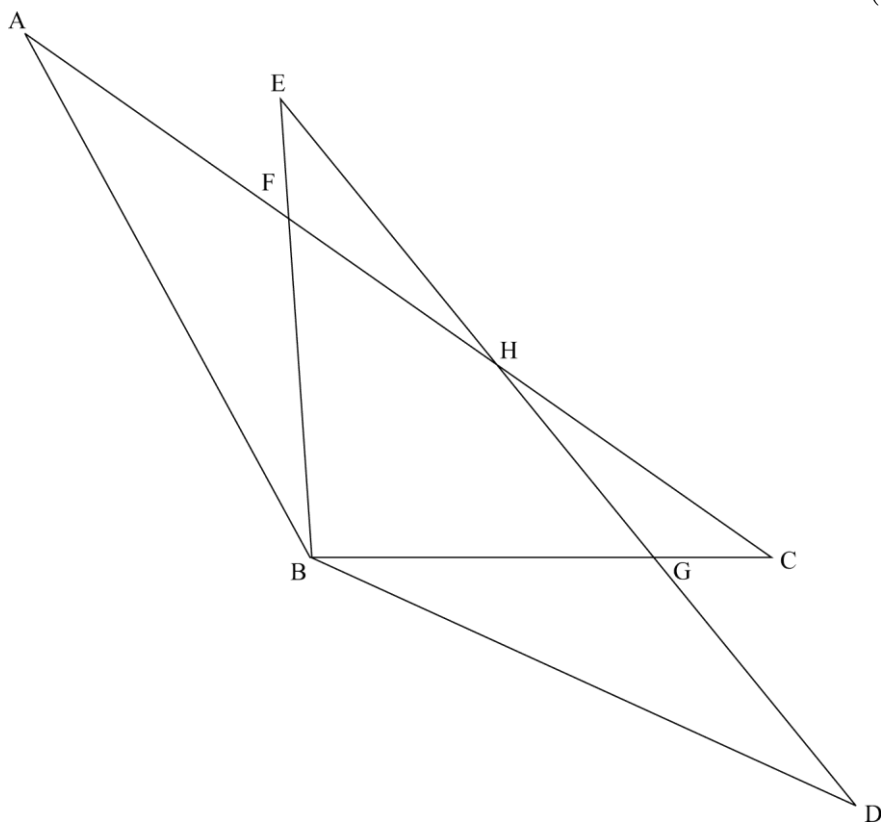


【問 5】

下の図において、 $\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ であり、辺 AC と辺 BE との交点を F 、辺 BC と辺 DE との交点を G 、辺 AC と辺 DE との交点を H とする。

このとき、 $AF = DG$ となることを証明しなさい。

(福島県 2021 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕 例 1

$\triangle ABF$ と $\triangle DBG$ において

仮定から $AB = DB \cdots ①$

仮定から $\angle BAF = \angle BDG \cdots ②$

仮定から $\angle ABC = \angle DBE \cdots ③$

$\angle ABF = \angle ABC - \angle CBE \cdots ④$

$\angle DBG = \angle DBE - \angle CBE \cdots ⑤$

③, ④, ⑤より $\angle ABF = \angle DBG \cdots ⑥$

①, ②, ⑥より 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \equiv \triangle DBG$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$AF = DG$

例 2

$\triangle EBG$ と $\triangle CBF$ において

仮定から $BE = BC \cdots ①$

仮定から $\angle BEG = \angle BCF \cdots ②$

共通な角は等しいから $\angle EBG = \angle CBF \cdots ③$

①, ②, ③より 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle EBG \equiv \triangle CBF$

合同な図形の対応する辺は等しいから

$EG = CF \cdots ④$

仮定から $AC = DE \cdots ⑤$

$AF = AC - CF \cdots ⑥$

$DG = DE - EG \cdots ⑦$

④, ⑤, ⑥, ⑦から

$AF = DG$

解説

① 問題文中から, 条件として $\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ が見つかる。

② $\triangle ABC \equiv \triangle DBE$ から, 「対応する辺の長さ, 角の大きさがそれぞれ等しい」など, 発想を広げることができる。

③ 今回は $AF = DG$ となることの証明なので, その辺を含む三角形である $\triangle ABF$ と $\triangle DBG$ の合同を証明していく。

【問 6】

先生と太郎さんと花子さんの次の会話を読んで、あとの問 1～問 3 に答えなさい。

(茨城県 2021 年度)

(先生と太郎さんと花子さんの会話)

先生：下の図 1 の $\triangle ABC$ は、 $\angle ABC = 66^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形です。

$\triangle ABC$ を直線 ℓ にそってすべらないように転がしていくことを考えましょう。

下の図 2 のように、点 A を中心に回転させたとき、もとの位置の三角形を $\triangle AB'C'$ とすると、 $\triangle ABC$ の頂点 B が、 $\triangle AB'C'$ の辺 $B'C'$ 上にくるときがあります。

太郎：先生、このときの $\angle BAB'$ の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ なので、図 2 の $\triangle ABC$ は点 A を中心に時計回りに $\boxed{\text{ア}}$ だけ回転移動させたことになります。

図 1

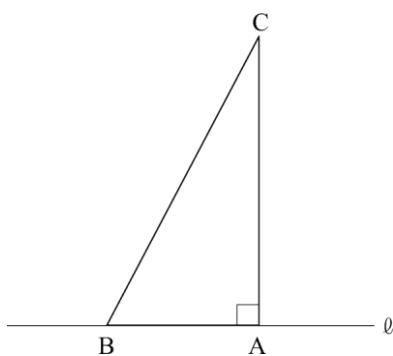
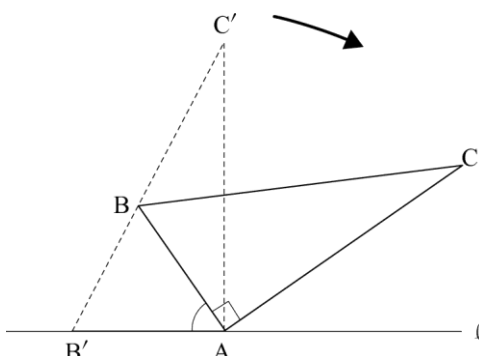


図 2



先生：よく気がつきましたね。では次に、下の図 3 のように $\triangle ABC$ を $AB = AC$ の直角二等辺三角形にして、同じように転がしていくことを考えましょう。

図 3

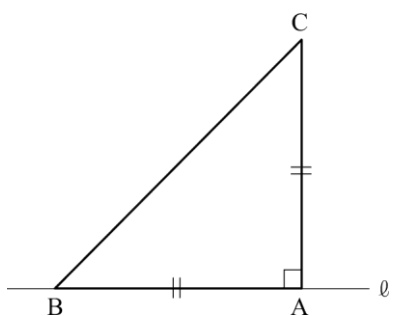
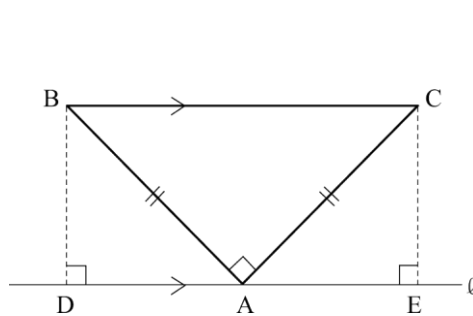


図 4



太郎：上の図 4 のように、直線 ℓ と辺 BC が平行になるときがあります。

花子：このとき、点 B ， C から直線 ℓ に垂線をひき、直線 ℓ との交点をそれぞれ D ， E とすると、 $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$ が成り立ちそうね。

先生：では，花子さん，黒板に証明を書いてください。

花子：はい。次のように証明できます。



先生：そのとおりです。よくできましたね。

さらに，図3の直角二等辺三角形ABCを，下の図5のように，直線 ℓ にそってすべらないように，点Bが再び直線 ℓ 上にくる斜線の図形の位置まで転がしていくことを考えましょう。

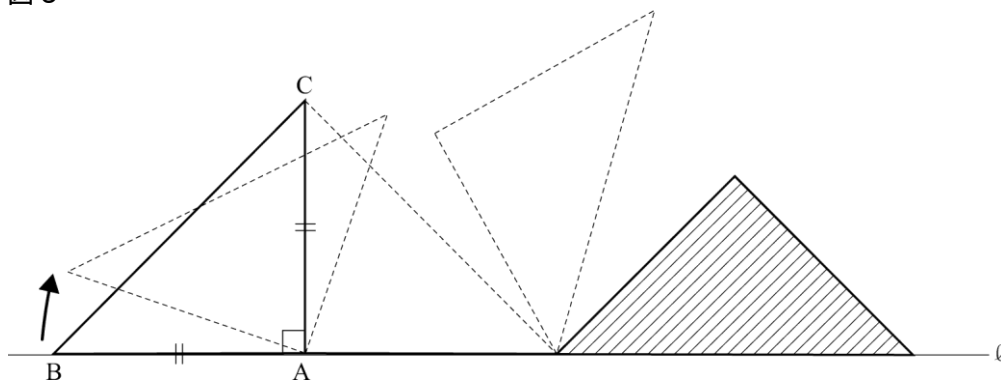
太郎：点Bが動いた跡にできる線と直線 ℓ とで囲まれた部分の面積はどうなるかな。

先生：では， $AB=AC=3\text{ cm}$ として，面積を求めてみましょう。

太郎：はい。面積を求めると ウ cm^2 になりました。

先生：そのとおりです。よくできましたね。

図5



問1 会話中の ア に当てはまる角の大きさを求めなさい。

問2 会話中の イ に当てはまる証明を書きなさい。

問3 会話中の ウ に当てはまる数を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

解答欄

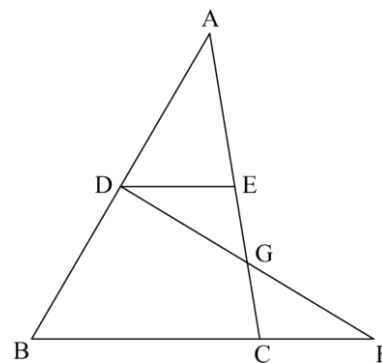
問 1	ア	度
問 2	イ	
問 3	ウ	cm ²

【問 7】

右の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 AB 、 AC の中点をそれぞれ D 、 E とする。また、辺 BC の延長に $BC : CF = 2 : 1$ となるように点 F をとり、 AC と DF の交点を G とする。

このとき、 $\triangle DGE \equiv \triangle FGC$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2021 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle DGE$ と $\triangle FGC$ について

$\triangle ABC$ で、点 D , E はそれぞれ

辺 AB , AC の中点であるから

$DE \parallel BC \cdots ①$

$$DE = \frac{1}{2}BC \cdots ②$$

①より $DE \parallel BF$ だから、錯角は等しいので

$$\angle GED = \angle GCF \cdots ③$$

$$\angle EDG = \angle CFG \cdots ④$$

また、 $BC : CF = 2 : 1$ から

$$CF = \frac{1}{2}BC \cdots ⑤$$

②, ⑤より

$$DE = FC \cdots ⑥$$

③, ④, ⑥より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle DGE \equiv \triangle FGC$$

解説

① 問題文中から、辺 AB , AC の中点、 $BC : CF = 2 : 1$ などの条件が見つかる。

② 辺 AB , AC の中点からは、「中点連結定理 $\Rightarrow$ 平行 $\Rightarrow$ 同位角, 錯角, 平行線と線分の比」などが発想として出てくる。

③ 今回は合同であることの証明なので、辺の長さや、角の大きさについての性質を使う可能性が高い。

【問 8】

図 1 のように、点 O を中心とする円と、点 O を 1 つの頂点とし、1 辺の長さが円 O の半径と等しい正方形 $OABC$ が重なっている。

この図において、図 2 のように円 O の弧 AC 上に点 D をとり、 D における接線 ℓ と辺 AB 、 BC との交点をそれぞれ E 、 F とする。また、 C を通り ℓ に垂直な直線と ℓ との交点を G とし、 D を通り辺 OC に垂直な直線と OC との交点を H とする。次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(群馬県 2021 年度 後期)

図 1

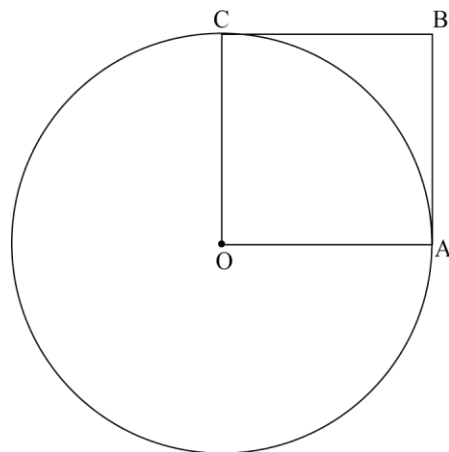
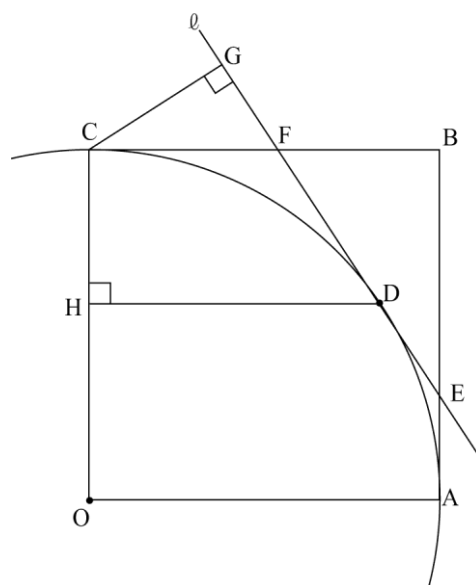


図 2



問 1 図 2 における次のア～オの直線のうち、 ℓ 以外に円 O の接線となっているものを 2 つ選び、記号で答えなさい。

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| ア 直線 OA | イ 直線 OC | ウ 直線 AB |
| エ 直線 BC | オ 直線 CG | |

問 2 三角形 CDG と三角形 CDH が合同であることを証明しなさい。

問 3 $BE=8\text{ cm}$ 、 $BF=6\text{ cm}$ とする。次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(1) 正方形 $OABC$ の 1 辺の長さを求めなさい。

(2) 三角形 ODH の面積を求めなさい。

解答欄

問 1		
問 2	〔証明〕	
問 3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問 1 ウ, エ

問 2

〔証明〕

$\triangle CDG$ と $\triangle CDH$ において

$\angle CGD = \angle CHD = 90^\circ \dots ①$

CD は共通 $\dots ②$

FC, FD は円 O の接線より, $FC = FD$ となるので

$\triangle FCD$ は二等辺三角形であるから

$\angle FCD = \angle FDC \dots ③$

$CF \parallel HD$ より, 平行線の錯角は等しいので

$\angle FCD = \angle HDC \dots ④$

③, ④より, $\angle FDC = \angle HDC$ となるので

$\angle GDC = \angle HDC \dots ⑤$

①, ②, ⑤より

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

$\triangle CDG \equiv \triangle CDH$

問 3

(1) 12 (cm)

(2) $\frac{864}{25}$ (cm²)

解説

問 1

円の接線は半径と垂直に交わる。 OA と OC はともに円の半径で,
 $OA \perp AB$, $OC \perp BC$ であることに注目する。

問 3

(1)

図 1 において, $\triangle BFE$ で三平方の定理を用いると, $EF = 10$ cm である。ここで, 正方形の一辺の長さを r cm とすると, $CF = (r - 6)$ cm である。

FC, FD は円 O の接線より, $FD = FC = r - 6$ (cm)

同様にして, $ED = EA = r - 8$ (cm)

$ED + FD = EF$ より, $(r - 8) + (r - 6) = 10 \quad 2r = 24$

$r = 12$ (cm)

(2)

$\triangle FBE$ と $\triangle OHD$ において

$\angle EBF = \angle DHO = 90^\circ \dots ①$

$\angle BOC = 90^\circ$, $DH \perp OC$ より, $BC \parallel DH$ だから
平行線の錯角は等しく

$\angle BFE = \angle HDF \dots ②$

円の接線は接点を通る半径に垂直だから

$\angle ODG = 90^\circ \dots ③$

①, ②, ③より $\angle BEF = \angle HDO \dots ④$

①, ④より, 2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle FBE \sim \triangle OHD$

ここで, (1) より, $EF = 10$ cm, $OD = OA = 12$ cm だから, 相似比は $10 : 12 = 5 : 6$

よって, 面積比は, $\triangle FBE : \triangle OHD = 5^2 : 6^2 = 25 : 36$

したがって, $\triangle OHD = \triangle FBE \times \frac{36}{25} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{36}{25} = \frac{864}{25}$ (cm²)

なお, 最後の計算を行う際

$24 \times 36 = (30 - 6) \times (30 + 6) = 900 - 36 = 864$

のようにすると, 計算をすばやく進められる。

図 1

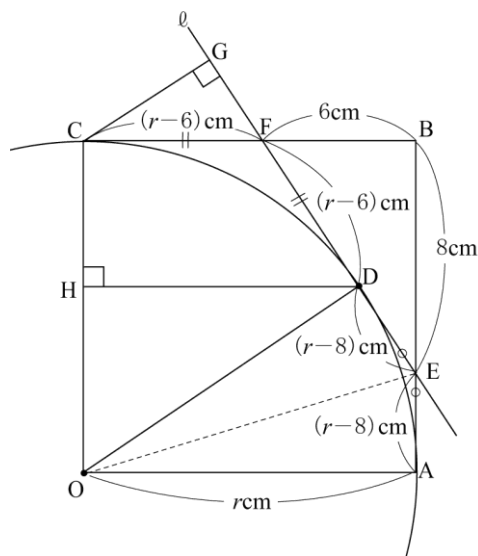
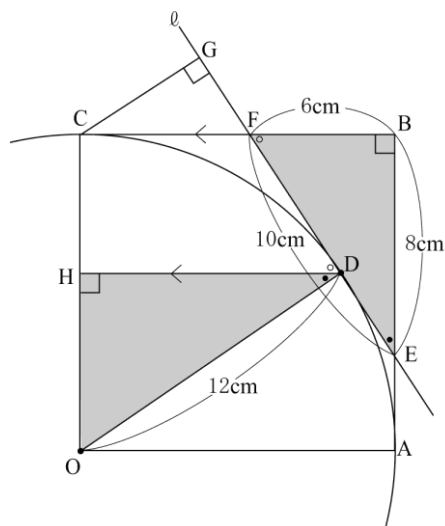


図 2

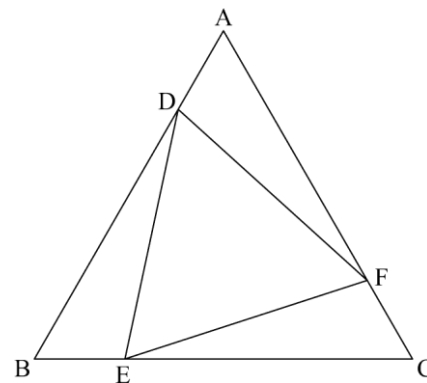


【問9】

右の図1のように、正三角形ABCの辺AB上に点Dを、辺BC上に点Eを、辺CA上に点Fを $AD=BE=CF$ となるようにとる。

このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。

(神奈川県 2021 年度)



- (1) 三角形ADFと三角形CFEが合同であることを次のように証明した。(a) ～ (c) に最も適するものを、それぞれ選択肢の1～4の中から1つ選び、その番号を答えなさい。

〔証明〕

$\triangle ADF$ と $\triangle CFE$ において、

まず、仮定より、

$$AD=BE=CF \cdots \textcircled{1}$$

よって、 $AD=CF \cdots \textcircled{2}$

次に、 $\triangle ABC$ は正三角形であるから、

$$\angle BAC = \angle ACB$$

よって、 $\angle DAF = \angle FCE \cdots \textcircled{3}$

さらに、 $\triangle ABC$ は正三角形であるから、

$$AB=BC=CA \cdots \textcircled{4}$$

①、④より、

$$AF = CA - \text{(a)} = AB - AD \cdots \textcircled{5}$$

$$CE = \text{(b)} - BE = AB - AD \cdots \textcircled{6}$$

⑤、⑥より、 $AF=CE \cdots \textcircled{7}$

②、③、⑦より、(c) から、

$$\triangle ADF \equiv \triangle CFE$$

(a), (b) の選択肢

- 1 BC
- 2 BD
- 3 CE
- 4 CF

(c) の選択肢

- 1 3組の辺がそれぞれ等しい
- 2 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
- 3 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい
- 4 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい

- (2) $AB=18\text{ cm}$ で、 $AD < BD$ とする。三角形ABCの面積と三角形DEFの面積の比が12 : 7であるとき、線分ADの長さを求めなさい。

解答欄

(1)	(a)	
	(b)	
	(c)	
(2)	cm	

解答

(1)

(a) 4

(b) 1

(c) 2

(2) 3 (cm)

解説

(2)

① 問題文から情報をさがすと、正三角形 ABC が見つかる。

また、前問で $\triangle ADF \equiv \triangle CFE$ がわかったことにも注意しよう。

② 正三角形 ABC からは、「3つの内角がすべて等しく 60° 」

「辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ である直角三角形」

$\triangle ADF \equiv \triangle CFE$ からは

「対応する辺や角がそれぞれ等しい」などが発想として出てくる。

③ 問いに対する新たな条件として、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積比が $12 : 7$ であることが加わったことにも注意。

以上のことに注目しながら解いていこう。

(1)と同様にして、 $\triangle ADF \equiv \triangle CFE \equiv \triangle BED$ が証明でき

それによって、 $DE = EF = FD$

すなわち、 $\triangle DEF$ は正三角形であることがわかる。

よって、 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ であり、その面積比が $12 : 7$ であることから、相似比は $\sqrt{12} : \sqrt{7} = 2\sqrt{3} : \sqrt{7}$

$AB : DE = 2\sqrt{3} : \sqrt{7} \Rightarrow 2\sqrt{3}DE = \sqrt{7}AB$

$\Rightarrow DE = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}AB = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \times 18 = 3\sqrt{21}(\text{cm})$

ここで、 $\triangle DBE$ に着目し、頂点 E から辺 BD に垂線 EH をひくと、 $\triangle BHE$ は 30° , 60° , 90° を内角にもつ直角三角形だから、 $BE = x \text{ cm}$ とおくと、 $BH : BE = 1 : 2$ より、 $BH = \frac{1}{2}x(\text{cm})$,

$BH : EH = 1 : \sqrt{3}$ より、 $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}x(\text{cm})$

$\triangle ADF \equiv \triangle BED$ より、 $AD = BE = x(\text{cm})$ なので、 $DH = AB - AD - BH = 18 - x - \frac{1}{2}x = 18 - \frac{3}{2}x(\text{cm})$

$\triangle DHE$ において、三平方の定理より、 $EH^2 + DH^2 = DE^2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(18 - \frac{3}{2}x\right)^2 = (3\sqrt{21})^2$

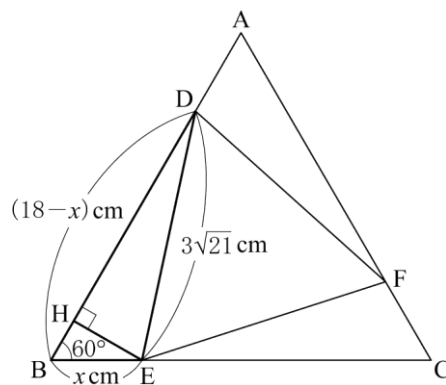
$\Rightarrow \frac{3}{4}x^2 + 324 - 54x + \frac{9}{4}x^2 = 189 \Rightarrow 3x^2 - 54x + 135 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-15) = 0 \Rightarrow x = 3, 15$

$AD = BE = 3(\text{cm})$ のとき、 $BD = 18 - 3 = 15(\text{cm})$ なので、 $AD < BD$ を満たす。

$AD = BE = 15(\text{cm})$ のとき、 $BD = 18 - 15 = 3(\text{cm})$ なので、 $AD < BD$ を満たさない。

よって、 $AD = 3 \text{ cm}$



【問 10】

右の図のように、円周上に異なる点 A, B, C, D, E があり、 $AC=AE$ 、 $\widehat{BC}=\widehat{DE}$ である。線分 BE と線分 AC, AD との交点をそれぞれ点 F, G とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

ただし、 $\widehat{BC}$ 、 $\widehat{DE}$ は、それぞれ短い方の弧を指すものとする。

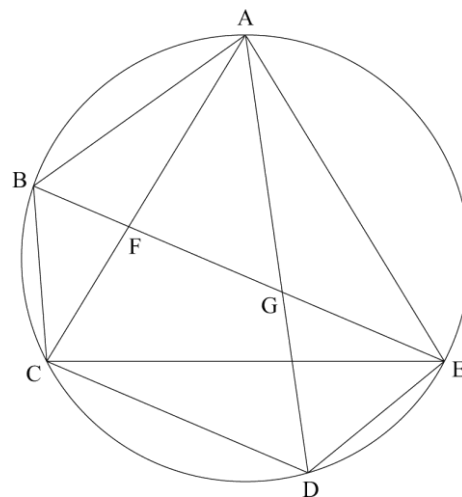
(富山県 2021 年度)

問 1 $\triangle ABC \equiv \triangle AGE$ を証明しなさい。

問 2 $AB=4\text{ cm}$ 、 $AE=6\text{ cm}$ 、 $DG=3\text{ cm}$ とするとき、次の問いに答えなさい。

(1) 線分 AF の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ABG$ と $\triangle CEF$ の面積比を求めなさい。



解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	(1)	cm
	(2)	:

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle AGE$ において

仮定より

$$AC = AE \cdots ①$$

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ACB = \angle AEG \cdots ②$$

$\widehat{BC} = \widehat{DE}$ より円周角は等しいから

$$\angle BAC = \angle GAE \cdots ③$$

①, ②, ③より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \equiv \triangle AGE$$

問 2

$$(1) \frac{24}{7} \text{ cm}$$

$$(2) 28 : 27$$

解説

問 2

(1)

$\widehat{BC} = \widehat{DE}$ だから, $\angle BAF = \angle DAE$

同じ弧に対する円周角だから, $\angle ABF = \angle ADE$

よって, $\triangle ABF \sim \triangle ADE$ より, $AB : AD = AF : AE$

$AB = 4\text{cm}$, $AE = 6\text{cm}$, $DG = 3\text{cm}$, $\triangle ABC \equiv \triangle AGE$ より

$AG = AB = 4\text{cm}$ だから, $AD = AG + DG = 4 + 3 = 7(\text{cm})$

以上より, $4 : 7 = AF : 6$ だから, $AF = 4 \times 6 \div 7 = \frac{24}{7}(\text{cm})$

(2)

仮定より $AC = AE = 6\text{cm}$, $\triangle ABC \equiv \triangle AGE$ より $AG = AB = 4\text{cm}$ だから,

$\triangle ABG$ と $\triangle ACE$ はどちらも二等辺三角形である。

また, $\widehat{BC} = \widehat{DE}$ より, $\angle BAF = \angle GAE$ だから, $\angle BAG = \angle BAF + \angle FAG = \angle GAE + \angle FAG = \angle CAE$

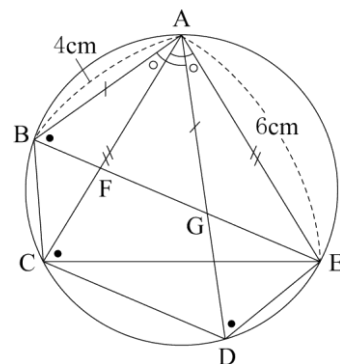
よって, $\triangle ABG \sim \triangle ACE$ で, 相似比は $AB : AC = 4 : 6 = 2 : 3$, 面積比は $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

$\triangle ACE$ と $\triangle CEF$ は, 底辺を AC , CF とすると, 高さが共通な三角形である。問 2 より $AF = \frac{24}{7}\text{cm}$ だか

ら, $CF = AC - AF = 6 - \frac{24}{7} = \frac{18}{7}(\text{cm})$

よって, $\triangle ACE : \triangle CEF = AC : CF = 6 : \frac{18}{7} = 7 : 3$ より, $\triangle CEF = \frac{3}{7} \triangle ACE$

以上より, $\triangle ABG : \triangle CEF = 4 : \frac{3}{7} \times 9 = 28 : 27$

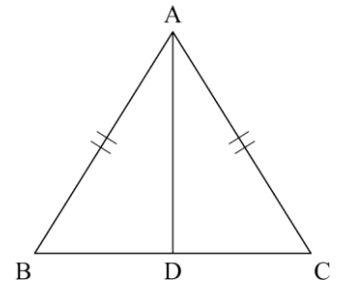


【問 11】

右の図のような $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC があり、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。

下の【証明】は、 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ が合同であることを証明したものである。このとき、ア にあてはまる角を書け。また、イ にあてはまる言葉を書き入れて三角形の合同条件を完成させよ。

(福井県 2021 年度)



【証明】

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ で、

仮定より、

$$AB=AC \cdots \textcircled{1}$$

また、 AD は共通だから、

$$AD=AD \cdots \textcircled{2}$$

AD は $\angle A$ の二等分線だから、

$$\angle BAD = \text{ア} \cdots \textcircled{3}$$

①、②、③から、イ が、それぞれ等しいので、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

解答欄

ア	
イ	

解答

ア $\angle CAD$

イ 2 組の辺とその間の角

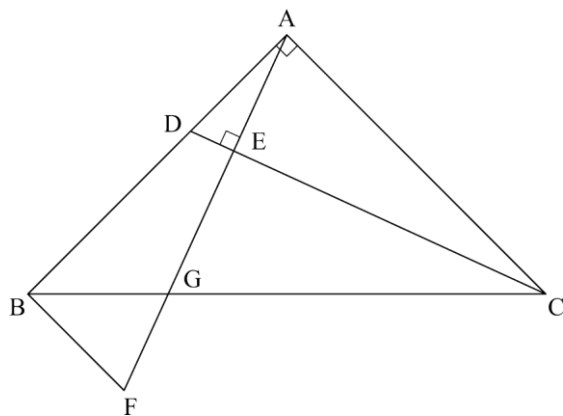
【問 12】

右の図のように、 $\angle A$ を直角とする直角二等辺三角形 ABC の辺 AB 上に点 A , B と異なる点 D をとり、点 C と点 D を結ぶ。

さらに、点 A から線分 CD に垂線をひき、線分 CD との交点を E とする。線分 AE を E の方に延長した半直線上に、 $AF=CD$ となる点 F をとる。線分 AF と線分 BC の交点を G とする。また、点 B と点 F を結ぶ。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2021 年度)

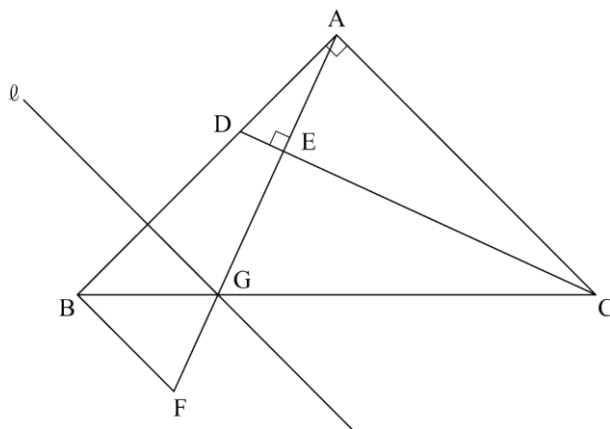


問 1 $AD=BF$ となることを証明せよ。

問 2 $AD=\frac{1}{3}AB$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle BFG$ と $\triangle AEC$ の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(2) $AB=\sqrt{2}\text{cm}$ とし、下の図のように直線 AC と平行で、点 G を通る直線を直線 ℓ とする。直線 ℓ を回転の軸として $\triangle BFG$ を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。



解答欄

問 1	〔証明〕		
問 2	(1)	$(\triangle BFG \text{ の面積}) : (\triangle AEC \text{ の面積}) =$	:
	(2)	(cm^3)	

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ADC$ と $\triangle BFA$ で

仮定より

$$CD=AF \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形だから

$$AC=BA \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle ADC$ で, $\angle CAD=90^\circ$ より

$$\angle ACD=180^\circ-90^\circ-\angle ADC=90^\circ-\angle ADC \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle ADE$ で, $\angle DEA=90^\circ$ より

$$\angle EAD=180^\circ-90^\circ-\angle ADE=90^\circ-\angle ADE \cdots \textcircled{4}$$

③, ④から

$$\angle ACD=\angle BAF \cdots \textcircled{5}$$

①, ②, ⑤から

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

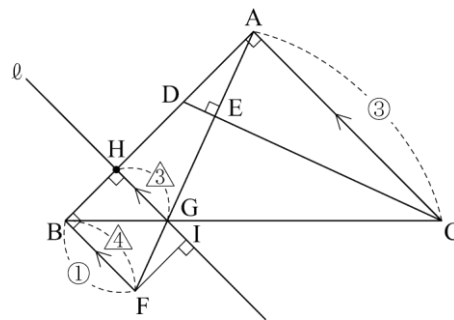
$$\triangle ADC \equiv \triangle BFA$$

したがって, $AD=BF$

問 2

$$(1) (\triangle BFG \text{ の面積}) : (\triangle AEC \text{ の面積}) = 5 : 18$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{36} \pi \quad (\text{cm}^3)$$



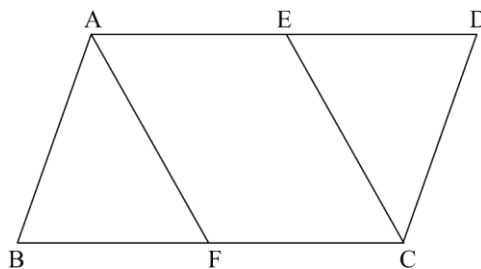
【問 13】

各問いに答えなさい。

(長野県 2021 年度)

問 1 図 1 は、平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AD 、 BC の中点をそれぞれ E 、 F とし、点 A と F 、点 C と E を結んだものである。

図 1



- (1) 図 1 において、四角形 $AFCE$ が平行四辺形であることを次のように証明することができる。証明 1 の あ，い に当てはまるものとして最も適切なものを、下のア～エから 1 つずつ選び、記号を書きなさい。また、「平行四辺形になるための条件」になるように、う に当てはまる適切な言葉を書きなさい。

〔証明 1〕

あ， $AD=BC$ であり、点 E 、 F は、それぞれ、辺 AD 、 BC の中点なので、 $AE=FC$ ……①

また、い， $AD \parallel BC$

よって、 $AE \parallel FC$ ……②

①、②から、う が等しくて平行なので、
四角形 $AFCE$ は平行四辺形である。

ア 平行四辺形の 2 組の向かい合う辺は、それぞれ平行なので

イ 平行四辺形の 2 組の向かい合う辺は、それぞれ等しいので

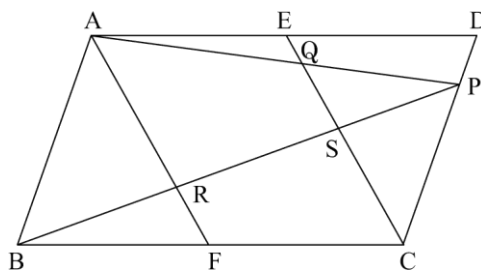
ウ 平行四辺形の 2 組の向かい合う角は、それぞれ等しいので

エ 平行四辺形の対角線は、それぞれの中点で交わるので

- (2) 四角形 $AFCE$ が平行四辺形であることは、証明 1 において、 $AE \parallel FC$ の代わりに $AF=CE$ を示すことでも証明することができた。その証明の中で、 $AF=CE$ を $\triangle ABF \equiv \triangle CDE$ であることから示した。このとき、三角形の合同条件のどれを使ったか、適切な合同条件を書きなさい。

- 問2 図2は、図1において、辺CDを4等分した点のうち、点Dに近い方の点をPとし、線分APと線分ECの交点をQ、線分BPと線分AF、ECの交点をそれぞれR、Sとしたものである。

図2



- (1) 図2において、 $\triangle ABR$ と $\triangle CPS$ は、次のように証明することができる。えに証明2の続きを書き、証明2を完成させなさい。

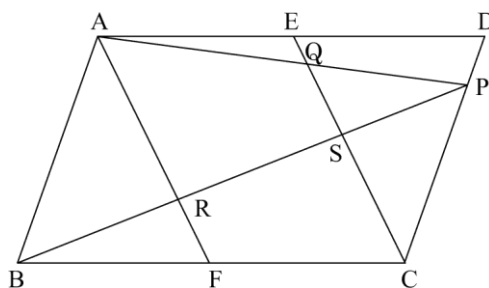
〔証明2〕

$\triangle ABR$ と $\triangle CPS$ について、
 四角形ABCDは平行四辺形なので、
 $AB \parallel DC$ より、平行線の錯角は等しいから、
 $\angle ABR = \angle CPS$ ……①

え

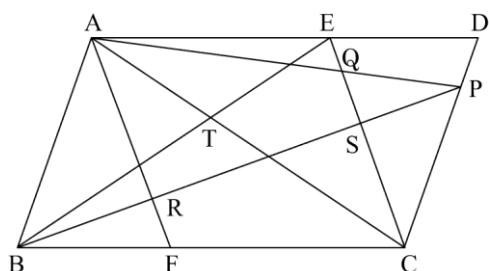
- (2) PSはSBの何倍になるか、求めなさい。
- (3) 図3は、図2において、 $\triangle RBF$ の面積を 9 cm^2 としたものである。このとき、四角形ARSQの面積を求めなさい。

図3



- 問3 図4は、図2において、点E、Fをそれぞれ、辺AD、BC上の $AE=CF$ となる点に変え、線分ACと線分BEの交点をTとしたものである。 $\angle TCF=34^\circ$ 、 $\angle RFB=70^\circ$ 、 $\angle ETC=68^\circ$ のとき、 $\angle ABT$ の大きさを求めなさい。

図4



解答欄

問 1	(1)	あ	
		い	
		う	
	(2)		
問 2	(1)	$\triangle ABR$ と $\triangle CPS$ について、 四角形 $ABCD$ は平行四辺形なので、 $AB \parallel DC$ より、平行線の錯角は等しいから、 $\angle ABR = \angle CPS$ ……①	
	(2)	倍	
	(3)	cm^2	
問 3	°		

解答

問 1

(1)

あい

いア

う 1 組の向かい合う辺

(2)

2 組の辺とその間の角が、それぞれ等しい

問 2

(1)

$\triangle ABR$ と $\triangle CPS$ について、

四角形 $ABCD$ は平行四边形なので、

$AB \parallel DC$ より、平行線の錯角は等しいから、

$\angle ABR = \angle CPS \quad \dots \textcircled{1}$

四角形 $AFCE$ は平行四边形なので、 $AF \parallel EC$ より、平行線の同位角は等しいから

$\angle ARB = \angle QSR \quad \dots \textcircled{2}$

また、対頂角が等しいから、

$\angle QSR = \angle CSP \quad \dots \textcircled{3}$

②、③より、

$\angle ARB = \angle CSP \quad \dots \textcircled{4}$

①、④から、2 組の角が、それぞれ等しいので、

$\triangle ABR \sim \triangle CPS$

(2) $\frac{3}{8}$ (倍)

(3) $\frac{240}{7}$ (cm^2)

問 3 36 ($^\circ$)

解説

問 1

(2)

$\triangle ABF$ と $\triangle CDE$ において、

$\square ABCD$ の向かいあう辺は等しいから、 $AB = CD \quad \dots \textcircled{1}$ 、 $CB = AD \quad \dots \textcircled{2}$

仮定より、 $BF = \frac{1}{2}CB$ 、 $DE = \frac{1}{2}AD \quad \dots \textcircled{3}$ ②、③より、 $BF = DE \quad \dots \textcircled{4}$

$\square ABCD$ の向かいあう角は等しいから、 $\angle ABF = \angle CDE \quad \dots \textcircled{5}$

①、④、⑤より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABF \equiv \triangle CDE$

よって、 $AF = CE$

問 2

(2)

図 1 のように、 $\square ABCD$ の向かいあう辺は等しいから、 $AB = CD$

また、 $CP : PD = 3 : 1$ より、

$AB : CP = 4 : 3$

(1) より、 $\triangle ABR \sim \triangle CPS$ だから、

$BR : PS = AB : CP = 4 : 3$

図 2 のように、 $RF \parallel SC$ より、

$\triangle BCS$ において、平行線と線分の比から、

$BR : RS = BF : FC = 1 : 1 = 4 : 4$

よって、 $BR : RS : PS = 4 : 4 : 3$ だから、

$BS : PS = 8 : 3$

すなわち、 PS は SB の $\frac{3}{8}$ 倍である。

図 1

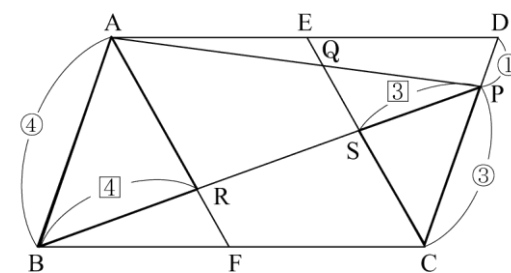
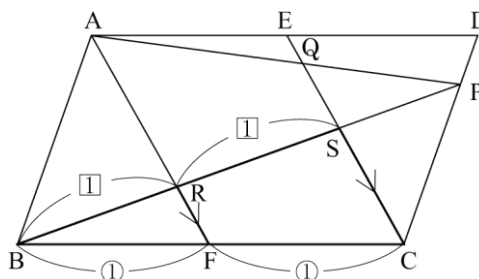
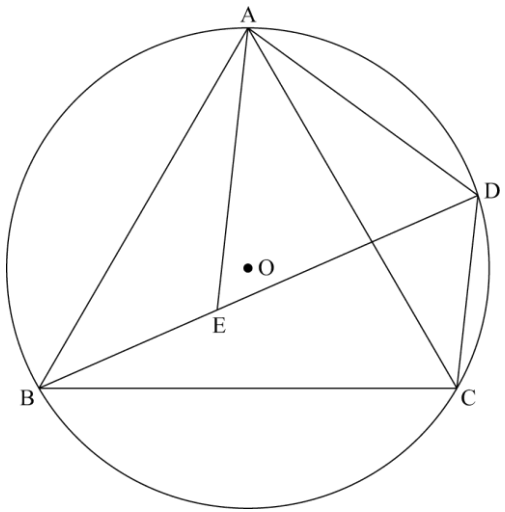


図 2



【問 14】

下の図で、4 点 A, B, C, D は円 O の周上の点であり、 $\triangle ABC$ は正三角形である。また、点 E は線分 BD 上の点で、 $BE=CD$ である。



次の問 1，問 2 に答えなさい。

(岐阜県 2021 年度)

問 1 $AE=AD$ であることを証明しなさい。

問 2 点 A から線分 BD にひいた垂線と BD との交点を H とする。

- $AB=6\text{ cm}$, $\angle ABD=45^\circ$ のとき、
- (1) AH の長さを求めなさい。
 - (2) $\triangle ABE$ の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ で

仮定から, $AB=AC$ …①

仮定から, $BE=CD$ …②

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$\angle ABE=\angle ACD$ …③

①, ②, ③から

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABE \equiv \triangle ACD$

対応する辺だから

$AE=AD$

問 2

(1) $3\sqrt{2}$ (cm)

(2) $(9-3\sqrt{3})$ (cm²)

解説

問 2

(1)

$\angle ABH=45^\circ$, $\angle AHB=90^\circ$ より, $\triangle ABH$ は, $1:1:\sqrt{2}$ の辺の比をもつ直角二等辺三角形である。

$AH:AB=1:\sqrt{2}$, $AH:6=1:\sqrt{2}$

$\sqrt{2}AH=6$

$AH=3\sqrt{2}$ (cm)

(2)

$\widehat{AB}$ に対する円周角より,

$\angle ADB=\angle ACB=60^\circ$

問 1 より, $AE=AD$ だから, $\triangle AED$ は二等辺三角形であり, 底角は等しいので

$\angle AED=\angle ADB=60^\circ$

よって, $\triangle AEH$ は, $1:2:\sqrt{3}$ の辺の比をもつ直角三角形なので,

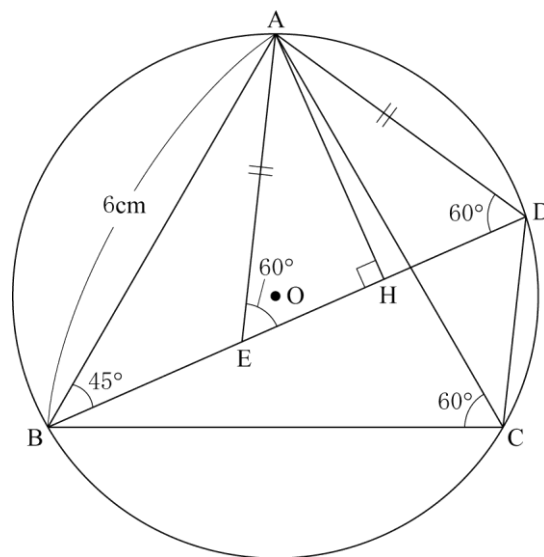
$EH:AH=1:\sqrt{3}$, $EH:3\sqrt{2}=1:\sqrt{3}$

$\sqrt{3}EH=3\sqrt{2}$

$EH=\sqrt{6}$ (cm)

$BH=AH=3\sqrt{2}$ (cm) より, $BE=BH-EH=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ (cm)

よって, $\triangle ABE=BE \times AH \times \frac{1}{2}=(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}=9-3\sqrt{3}$ (cm²)



【問 15】

図 7 において、3 点 A, B, C は円 O の円周上の点であり、BC は円 O の直径である。 $\widehat{AC}$ 上に $\angle OAC = \angle CAD$ となる点 D をとり、BD と OA との交点を E とする。点 C を通り OD に平行な直線と円 O との交点を F とし、DF と BC との交点を G とする。

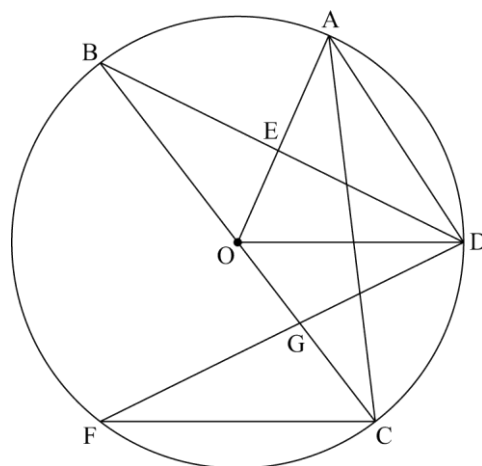
このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(静岡県 2021 年度)

問 1 $\triangle BOE \equiv \triangle DOG$ であることを証明しなさい。

問 2 $\angle BGF = 72^\circ$ 、円 O の半径が 6 cm のとき、小さい方の $\widehat{AD}$ の長さを求めなさい。ただし、円周率は π とする。

図 7



解答欄

問 1	〔証明〕
問 2	cm

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle BOE$ と $\triangle DOG$ で

仮定より、円 O の半径だから、 $BO=DO$ …①

$\widehat{CD}$ の円周角は等しいから、 $\angle OBE=\angle CFD$ …②

$OD \parallel FC$ より、平行線の錯角は等しいから

$\angle CFD=\angle ODG$ …③

②, ③より、 $\angle OBE=\angle ODG$ …④

同じ弧の中心角は円周角の 2 倍と等しいから

$\angle BOE=2\angle BCA$ …⑤

$\triangle OCA$ は $OA=OC$ の二等辺三角形より

$\angle BCA=\angle OAC$ …⑥

仮定より、 $\angle OAC=\angle CAD$ …⑦

同じ弧の中心角は円周角の 2 倍と等しいから

$\angle DOG=2\angle CAD$ …⑧

⑤, ⑥, ⑦, ⑧より、 $\angle BOE=\angle DOG$ …⑨

①, ④, ⑨より

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BOE \equiv \triangle DOG$

問 2 $\frac{14}{5}\pi$ (cm)

解説

問 1

① 問題文中から、条件として円 O , BC は円 O の直径、 $\angle OAC=\angle CAD$, $OD \parallel FC$ などが見つかる。

② 円 O から、 「円周角の定理」 「半径はすべて等しい」

BC が円 O の直径であることから、 「半円の弧に対する円周角は 90° 」

$OD \parallel FC$ からは、 「同位角, 錯角は等しい」 「平行線と線分の比」

などが、発想として出てくる。

③ 今回は、合同であることを証明する問題なので、辺や角についての条件を利用することが予想される。

問 2

$\angle OAC=\angle CAD=a^\circ$ とすると

問 1 より、 $\angle GOD=2a^\circ$, $\angle ODG=a^\circ$

$\triangle OGD$ において、内角と外角の関係より

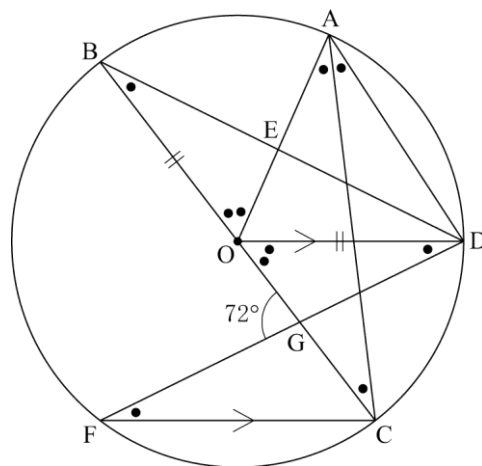
$2a+a=72$, $a=24$

$\angle AOD=180^\circ-(\angle AOB+\angle COD)$

$=180^\circ-(2a^\circ+2a^\circ)=180^\circ-4a^\circ$

$=180^\circ-4 \times 24^\circ=84^\circ$

よって、 $\widehat{AD}=2\pi \times 6 \times \frac{84}{360}=\frac{14}{5}\pi$ (cm)

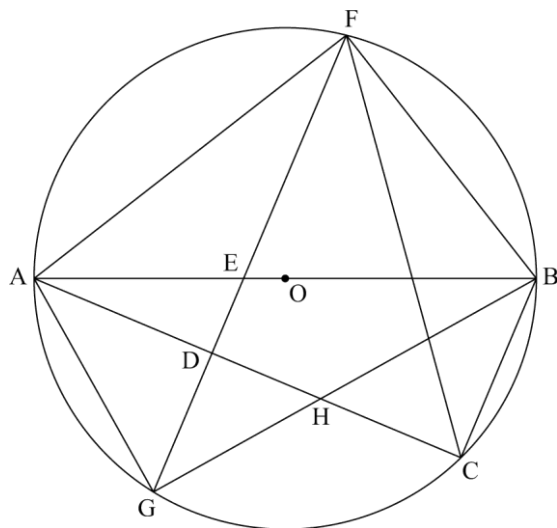


【問 16】

次の図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。線分 AC 上に $BC=AD$ となる点 D をとり、点 D を通り線分 BC に平行な直線と線分 AB との交点を E とする。直線 DE と円 O の交点のうち、点 C をふくまない側の弧 AB 上にある点を F 、点 C をふくむ側の弧 AB 上にある点を G とする。また、線分 BG と線分 AC の交点を H とする。

このとき、あとの各問いに答えなさい。ただし、 $AC > BC$ とする。

(三重県 2021 年度)



問 1 次の は、 $\triangle AGE \sim \triangle ACF$ であることを証明したものである。

(ア) ~ (ウ) に、それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

〔証明〕

$\triangle AGE$ と $\triangle ACF$ において、

弧 AF に対する円周角は等しいから、 (ア) = $\angle ACF$ …①

$BC \parallel FG$ より、平行線の同位角は等しいから、 $\angle AEG =$ (イ) …②

弧 AC に対する円周角は等しいから、 (イ) = $\angle AFC$ …③

②、③より、 $\angle AEG = \angle AFC$ …④

①、④より、 (ウ) がそれぞれ等しいので、

$\triangle AGE \sim \triangle ACF$

問 2 $\triangle ADG \equiv \triangle BCH$ であることを証明しなさい。

問 3 $AB = 13$ cm, $BC = 5$ cm のとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 線分 DE の長さを求めなさい。

(2) $\triangle BFG$ の面積と $\triangle OFG$ の面積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問 1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問 2	〔証明〕	
問 3	(1)	cm
	(2)	$\triangle BFG : \triangle OFG =$:

解答

問 1

(ア) $\angle AGE$

(イ) $\angle ABC$

(ウ) 2 組の角

問 2

〔証明〕

$\triangle ADG$ と $\triangle BCH$ において

仮定より, $AD = BC \cdots ①$

弧 CG に対する円周角は等しいから

$\angle DAG = \angle CBH \cdots ②$

半円の弧 AB に対する円周角だから

$\angle BCH = 90^\circ \cdots ③$

$BC \parallel FG$ より, 平行線の同位角は等しいから

$\angle BCH = \angle FDA \cdots ④$

③, ④より

$\angle FDA = 90^\circ \cdots ⑤$

⑤より

$\angle ADG = 180^\circ - \angle FDA = 90^\circ \cdots ⑥$

③, ⑥より

$\angle ADG = \angle BCH \cdots ⑦$

①, ②, ⑦より

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADG \equiv \triangle BCH$

問 3

(1) $\frac{25}{12}$ cm

(2) $\triangle BFG : \triangle OFG = 7 : 1$

解説

問 2

① 問題文中から、条件となる情報をさがすと、線分 AB を直径とする円、 $BC=AD$ 、平行などが見つかる。

② 線分 AB を直径とする円からは、「円周角の定理」「半円の弧に対する円周角は 90° 」

平行からは、「同位角、錯角が等しい」「平行線と線分の比」などが発想として出てくる。

③ 今回は、三角形が合同であることを証明する問題なので、「円周角の定理」「半円の弧に対する円周角は 90° 」「 $BC=AD$ 」「同位角、錯角が等しい」などの辺や角に関する性質を利用する可能性が高い。

以上のことに注意して証明を行う。

問 3

(1)

問 2 であげた発想から、「半円の弧に対する円周角は 90° 」「平行線と線分の比」を利用しよう。

図 2 のように、半円の弧に対する円周角は 90° だから、 $\triangle ABC$ は、 $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形である。よって、三平方の定理より、

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$$AC > 0 \text{ より、} AC = 12 \text{ (cm)}$$

$$BC = AD = 5 \text{ (cm)}$$

$ED \parallel BC$ より、 $\triangle ABC$ において、平行線と線分の比から、 $DE : CB = AD : AC$

$$DE : 5 = 5 : 12 \Rightarrow DE = \frac{25}{12} \text{ (cm)}$$

図 1

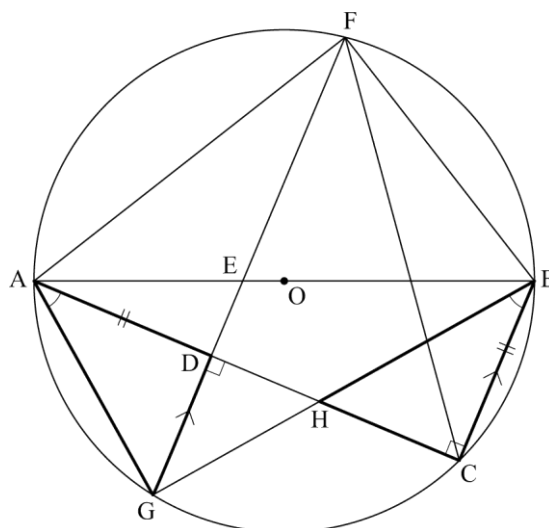
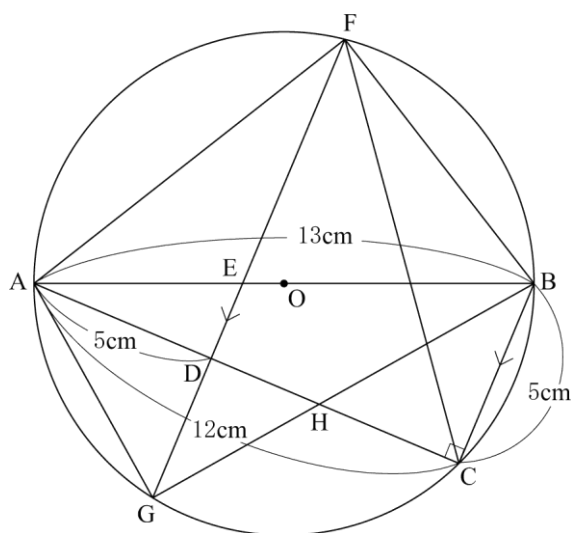


図 2



(2)

図3のように、 $\triangle BFG$ と $\triangle OFG$ は、底辺 FG が共通なので、その面積比は、高さ BI と OJ の比に等しくなる。
 $BI \perp FG$, $OJ \perp FG$ より、 $BI \parallel OJ$ だから、 $\triangle EBI$ において、平行線と線分の比から、 $BI : OJ = BE : OE$
 よって、 $\triangle BFG : \triangle OFG = BI : OJ = BE : OE$
 次に、図4のように、 $ED \parallel BC$ より、 $\triangle ABC$ において、平行線と線分の比から、 $AE : EB = AD : DC = 5 : 7$
 $AO : OB = 1 : 1 = 6 : 6$ より、 $BE : OE = 7 : 1$
 したがって、 $\triangle BFG : \triangle OFG = BE : OE = 7 : 1$

図3

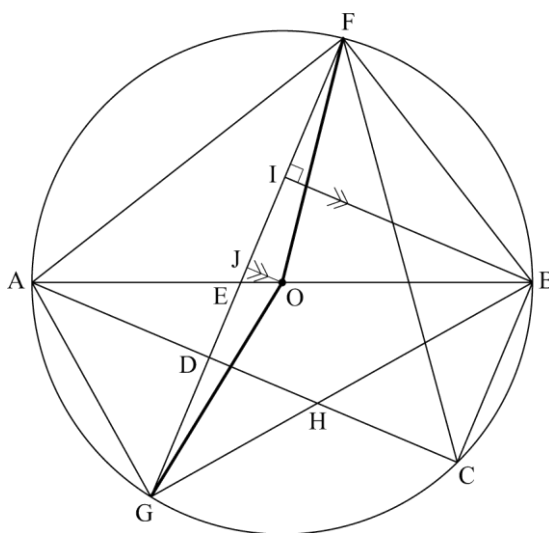
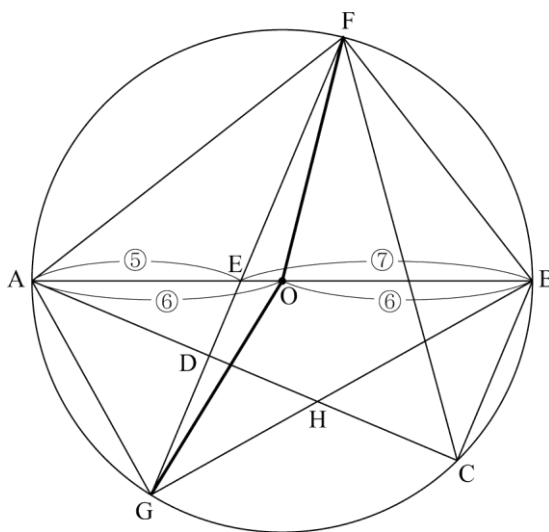


図4



【問 17】

太郎さんと花子さんは、数学の授業で円について学習した後、2点で交わる2つの円について調べることになりました。

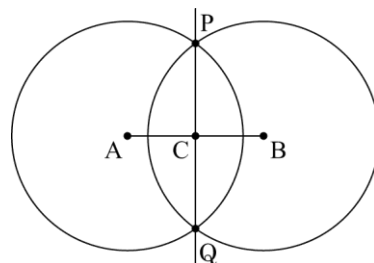
太郎さんは、次の手順でノートに右の図をかきました。後の問1から問3に答えなさい。

(滋賀県 2021 年度)

手順

図

- ① 線分をひき、線分の両端を A , B とする。
- ② 線分 AB において、点 A と点 B をそれぞれ中心として、等しい半径の円をかき、この2つの円の交点を P , Q とする。
- ③ 線分 AB と直線 PQ との交点を C とする。



①から③の手順で、線分 AB の長さや円の半径をいろいろ変えて調べます。

問1 太郎さんは、まず線分 AB の長さを 8 cm にして、円の半径をいろいろ変えて調べました。すると、4点 A , B , P , Q が、点 C を中心とする円周上にある場合があります。このとき、線分 AP の長さと $\angle APB$ の大きさを求めなさい。

太郎さんと花子さんは、図を見て気づいたことを話しています。

2人の会話



太郎さん

2つの円の半径は等しいので、 $\triangle ABP$ は $PA=PB$ の二等辺三角形だね。二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺と垂直に交わることは教科書に書いていたね。

四角形 $AQBP$ はひし形だから、太郎さんの言ったことは、ひし形 $AQBP$ の対角線 PQ が $\angle APB$ を二等分し、直線 PQ と線分 AB は垂直に交わる ことと同じだね。



花子さん



太郎さん

花子さんの言ったことは、三角形の合同条件を利用したら証明できそう だね。

問2 2人の会話の中にある太郎さんの言った波線部の考え方をを使って、下線部を証明しなさい。

問3 $AP=PQ=5\text{ cm}$ のとき、線分 AP の延長線が点 B を中心とする円と、点 P 以外にもう1点で交わりました。その交点を D としたとき、線分 PD の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	AP= cm
	∠APB= °
問 2	[証明]
問 3	cm

解答

問 1

$$AP=4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\angle APB=90^\circ$$

問 2

〔証明〕

$\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ について

仮定より, $AP=BP$ …① $AQ=BQ$ …② PQ は共通…③

①, ②, ③より, 3組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle APQ \equiv \triangle BPQ$ である。

合同な三角形の対応する角の大きさは等しいので

$$\angle APQ = \angle BPQ \dots ④$$

よって, PQ は $\angle APB$ の二等分線である。

次に, $\triangle APC$ と $\triangle BPC$ について, PC は共通…⑤

$$\text{④より } \angle APC = \angle BPC \dots ⑥$$

①, ⑤, ⑥より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle APC \equiv \triangle BPC$

よって, 合同な三角形の対応する角の大きさはそれぞれ等しいので, $\angle ACP = \angle BCP$

$$\text{よって, } \angle ACP + \angle BCP = 2\angle ACP = 180^\circ$$

$$\angle ACP = 90^\circ \text{ より, } AB \perp PQ$$

問 3 5 cm

解説

問 1

$AP=AQ=BP=BQ$ より, 四角形 $AQBP$ はひし形である。また, 4点 A, B, P, Q が, 点 C を中心とする円周上にあることから, $CA=CB=CP=CQ$ より, ひし形 $AQBP$ は正方形である。よって, $\angle APB=90^\circ$

また, $\triangle APC$ は, $CA=CP$, $\angle ACP=90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$AC : AP = 1 : \sqrt{2}, \quad AC = \frac{1}{2}AB = 4(\text{cm}) \text{ より,}$$

$$4 : AP = 1 : \sqrt{2}, \quad AP = 4\sqrt{2}(\text{cm})$$

問 3

$AP=PQ=QA=5(\text{cm})$ より, $\triangle APQ$ は正三角形である。問 2 より, $AB \perp PQ$ だから

$$CP=CQ=\frac{5}{2}(\text{cm})$$

$$\angle PAC = \frac{1}{2}\angle PAQ = 30^\circ, \quad \angle APC = 60^\circ$$

また, $PA=PB$ より, $\triangle PAB$ は二等辺三角形だから

$$\angle PAC = \angle PBC = 30^\circ$$

$\triangle PAB$ において, 内角と外角の関係より

$$\angle DPB = \angle PAC + \angle PBC = 60^\circ$$

次に, $PB=BD$ より, $\triangle DPB$ は二等辺三角形だから, $\angle DPB = \angle PDB = 60^\circ$

よって, $\triangle PBD$ は正三角形だから, $PD=PB=5(\text{cm})$

図 1

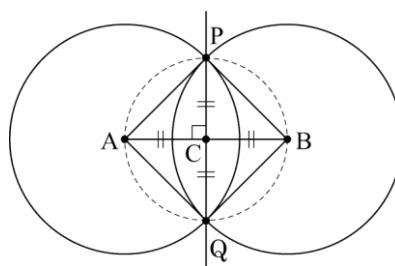
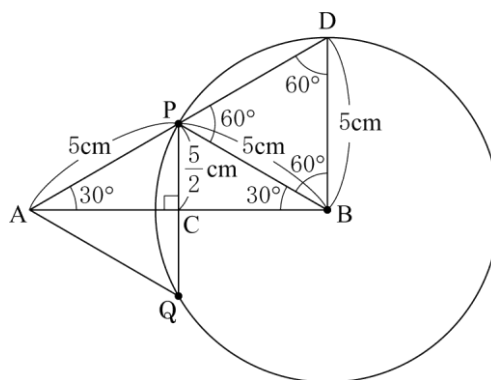


図 2



【問 18】

次の問 1，問 2 に答えなさい。

(大阪府 B 2021 年度)

- 問 1 図 1 において，四角形 $ABCD$ は内角 $\angle ABC$ が鋭角の平行四角形である。 $\triangle EDC$ は $ED=EC$ の二等辺三角形であり， E は直線 BC 上にある。 F は， A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。 G は， C から辺 ED にひいた垂線と辺 ED との交点である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 B 2021 年度)

- (1) $\triangle ABF \equiv \triangle CDG$ であることを証明しなさい。
- (2) 四角形 $ABCD$ の面積を $a \text{ cm}^2$ ，四角形 $AFED$ の面積を $b \text{ cm}^2$ とするとき， $\triangle CEG$ の面積を a ， b を用いて表しなさい。

図 1

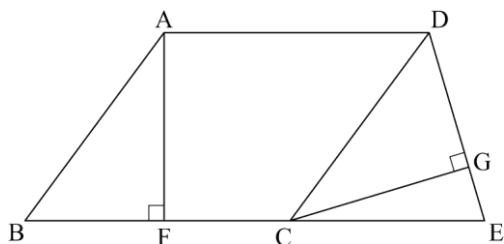


図 2

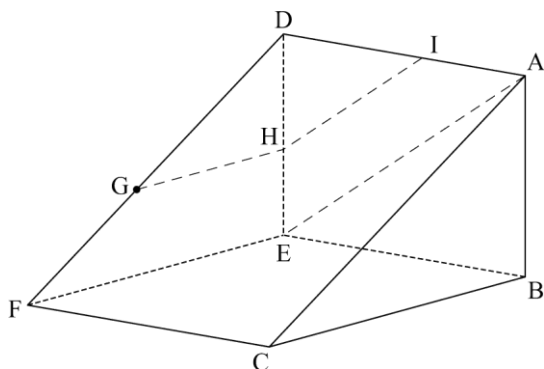
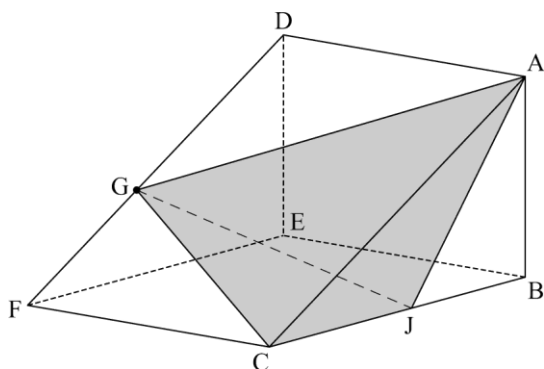


図 3



- 問 2 図 2，図 3 において，立体 $ABC-DEF$ は三角柱である。 $\triangle ABC$ は $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形であり， $AB=4 \text{ cm}$ ， $CB=6 \text{ cm}$ である。 $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$ である。四角形 $EFCB$ は 1 辺の長さが 6 cm の正方形であり，四角形 $DFCA$ ， $DEBA$ は長方形である。 G は辺 DF 上の点であり， $DG:GF=4:3$ である。

次の問いに答えなさい。

- (3) 図 2 において， A と E とを結ぶ。 H は， G を通り辺 FE に平行な直線と辺 DE との交点である。 I は， H を通り線分 AE に平行な直線と辺 AD との交点である。
 - ① 次のア～オのうち，辺 AB とねじれの位置にある辺はどれですか。すべて選び，記号を○で囲みなさい。
 ア 辺 AD イ 辺 CF ウ 辺 DE エ 辺 DF オ 辺 FE
 - ② 線分 DI の長さを求めなさい。
- (4) 図 3 において， G と A ， G と C とをそれぞれ結ぶ。 J は辺 CB 上の点であり，3 点 A ， J ， B を結んでできる $\triangle AJB$ の内角 $\angle AJB$ の大きさは， $\triangle ABC$ の内角 $\angle BAC$ の大きさと等しい。 J と G とを結ぶ。立体 $AGCJ$ の体積を求めなさい。

解答欄

問 1	(1)	〔証明〕	
	(2)	cm ²	
問 2	(3)	①	
		②	cm
	(4)	cm ³	

解答

問 1

(1)

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle CDG$ において

$AF \perp BC$, $CG \perp ED$ だから

$\angle AFB = \angle CGD = 90^\circ \dots \textcircled{7}$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$AB = CD \dots \textcircled{1}$

$AB \parallel DC$ であり, 平行線の同位角は等しいから

$\angle ABF = \angle DCE \dots \textcircled{7}$

$\triangle EDC$ は $ED = EC$ の二等辺三角形だから

$\angle CDG = \angle DCE \dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より $\angle ABF = \angle CDG \dots \textcircled{9}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{9}$ より, 直角三角形の斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \equiv \triangle CDG$

(2) $b - a \text{ cm}^2$

問 2

(3)

① イ エ オ

② $\frac{24}{7} \text{ cm}$

(4) $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

解説

問 1

(1)より, $\triangle ABF \equiv \triangle CDG$ だから, $\triangle ABF = \triangle CDG$ より

四角形 $ABCD = \triangle ABF +$ 四角形 $AFCD$

$= \triangle CDG +$ 四角形 $AFCD =$ 五角形 $AFCGD = a(\text{cm}^2)$

よって, $\triangle CEG =$ 四角形 $AFED -$ 五角形 $AFCGD = b - a(\text{cm}^2)$

問 2

(3)

①

交わらず, かつ平行でない直線の組が, ねじれの位置の条件である。辺 AB と交わるのは, 図 1 において×印で示した辺 AD, AC, BC, BE であり, 辺 AB と平行なのは, 図 1 において∨印で示した辺 DE である。よって, それ以外の辺が辺 AD とねじれの位置にある。

よって, 辺 AD とねじれの位置にある辺は, **イ, エ, オ** である。

②

$GH // FE$ より, $\triangle DFE$ において, 平行線と線分の比から,

$DH : HE = DG : GF = 4 : 3$

また, $HI // EA$ より, $\triangle DEA$ において, 平行線と線分の比から, $DI : IA = DH : HE = 4 : 3$

よって, $DI = \frac{4}{7}DA = \frac{4}{7}EB = \frac{4}{7} \times 6 = \frac{24}{7}(\text{cm})$

(4)

図 2 のように, 立体 $AGCJ$ を $\triangle ACJ$ を底面とする三角錐として見ると, 頂点 G から底面 ACJ におろした垂線は, 辺 AC と交わる。その交点を K とすると, $GK = FC = 6(\text{cm})$

図 3 のように, $\triangle ABC$ に着目すると, $\triangle ABC$ と $\triangle JBA$ において, $\angle ABC = \angle JBA = 90^\circ$, $\angle CAB = \angle AJB$ より, 2 組の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ABC \sim \triangle JBA$

よって, $AB : JB = BC : BA \Rightarrow 4 : JB = 6 : 4 \Rightarrow JB = \frac{8}{3}(\text{cm})$

$CJ = BC - JB = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}(\text{cm})$

よって, $\triangle ACJ = CJ \times AB \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{20}{3}(\text{cm}^2)$

したがって, 立体 $AGCJ$ の体積は

$\triangle ACJ \times GK \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \times 6 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}(\text{cm}^3)$

図 1

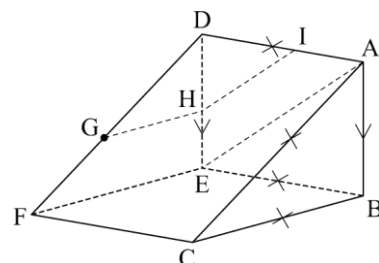


図 2

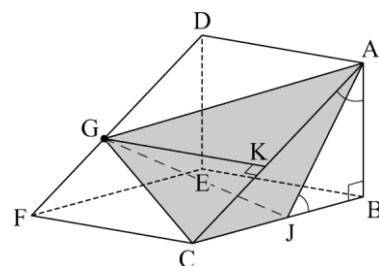
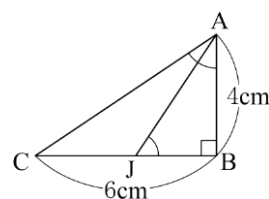


図 3



【問 19】

図 1 のように、円 O の周上に 4 点 A, B, C, D がある。円 O の直径 AC と、線分 BD との交点を E とする。

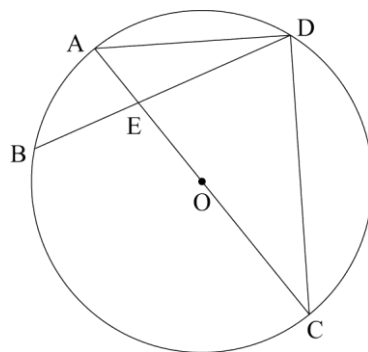
ただし、 $\widehat{CD}$ の長さは、 $\widehat{AD}$ の長さより長いものとする。

次の問 1 ～ 問 4 に答えなさい。

(和歌山県 2021 年度)

問 1 $DB=DC$, $\angle BDC=70^\circ$ のとき、 $\angle CAD$ の大きさを求めなさい。

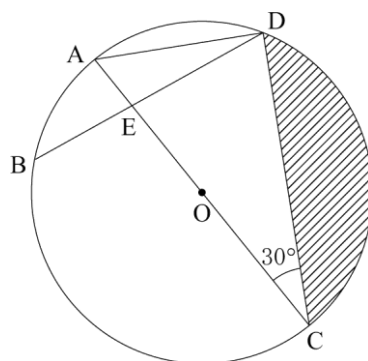
図 1



問 2 図 2 のように、 $AC=4\text{ cm}$, $\angle ACD=30^\circ$ のとき、 の部分の面積を求めなさい。

ただし、円周率は π とする。

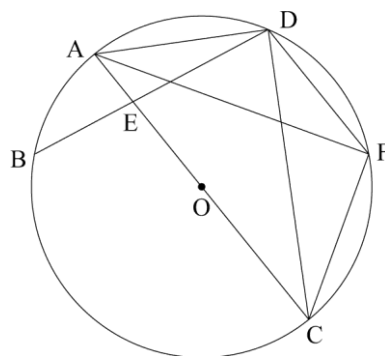
図 2



問 3 図 3 のように、 $AC \parallel DF$ となるように円 O の周上に点 F をとる。

このとき、 $AF=CD$ を証明しなさい。

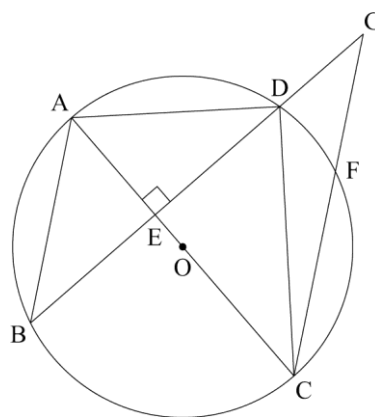
図 3



問 4 図 4 のように、 $AC \perp BD$, $AD=3\text{ cm}$, $DE=\sqrt{5}\text{ cm}$ とする。
また、 $BA \parallel CF$ となるように円 O の周上に点 F をとり、直線 BD と直線 CF の交点を G とする。

このとき、 $\triangle ABE$ と $\triangle CGE$ の面積の比を求め、最も簡単な整数の比で表しなさい。

図 4



解答欄

問 1	$\angle CAD =$ 度
問 2	cm^2
問 3	〔証明〕
問 4	$\triangle ABE : \triangle CGE =$:

解答

問 1 $\angle CAD = 55$ (度)

問 2 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ (cm^2)

問 3

$\triangle ACF$ と $\triangle CAD$ で

AC は共通…①

AC は直径で $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから

$\angle AFC = \angle CDA = 90^\circ$ …②

$\widehat{CF}$ に対する円周角は等しいから

$\angle CAF = \angle CDF$ …③

$AC \parallel DF$ より, 錯角が等しいので

$\angle ACD = \angle CDF$ …④

③, ④より

$\angle CAF = \angle ACD$ …⑤

①, ②, ⑤から

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACF \equiv \triangle CAD$

よって, $AF = CD$

問 4 $\triangle ABE : \triangle CGE = 16 : 25$

解説

問 1

図 1 のように、点 B, C を結ぶ。

$\triangle DBC$ は、 $DB=DC$ の二等辺三角形だから

底角は等しいので、 $\angle DBC = \angle DCB = (180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 55^\circ$

$\widehat{DC}$ に対する円周角より $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$

問 2

図 2 のように、点 O, D を結ぶ。

斜線部分の図形は、おうぎ形 OCD から $\triangle OCD$ を取り除いたものである。

$\triangle OCD$ は、 $OC=OD$ の二等辺三角形だから、底角は等しいので

$\angle OCD = \angle ODC = 30^\circ$, $\angle COD = 180^\circ - 30^\circ \times 2 = 120^\circ$

よって、おうぎ形 OCD の面積は $\pi \times 2^2 \times \frac{120}{360} = \frac{4}{3}\pi$ (cm²)

半円の弧に対する円周角より、 $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$ だから

$\triangle ACD$ は、 $AD : AC : CD = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形である。

よって、 $AD : AC = 1 : 2 \Rightarrow AD : 4 = 1 : 2 \Rightarrow AD = 2$ (cm)

$AC : CD = 2 : \sqrt{3} \Rightarrow 4 : CD = 2 : \sqrt{3} \Rightarrow CD = 2\sqrt{3}$ (cm) より

$\triangle ACD = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ (cm²)

$OA=OC$ より、 $\triangle AOD = \triangle OCD$ だから、 $\triangle OCD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (cm²)

よって、斜線部分の面積は、 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ (cm²)

問 4

図 3 のように、 $\triangle AED$ は $\angle AED = 90^\circ$ の直角三角形だから

三平方の定理より $AE^2 = AD^2 - DE^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$

$\Rightarrow AE > 0$ より

$AE = 2$ (cm)

また、 $\triangle AED$ と $\triangle ADC$ において

共通な角だから $\angle EAD = \angle DAC$

半円の弧に対する円周角より

$\angle ADC = 90^\circ$ から $\angle AED = \angle ADC = 90^\circ$

よって

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AED \sim \triangle ADC$

したがって

$AE : AD = AD : AC$

$2 : 3 = 3 : AC$

$AC = \frac{9}{2}$ (cm)

よって、 $CE = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$ (cm) だから

$AE : CE = 2 : \frac{5}{2} = 4 : 5$

図 4 のように

$BA \parallel CG$ より

$\triangle ABE \sim \triangle CGE$ であり

その相似比は $AE : CE = 4 : 5$ だから

面積比は $4^2 : 5^2 = 16 : 25$

図 1

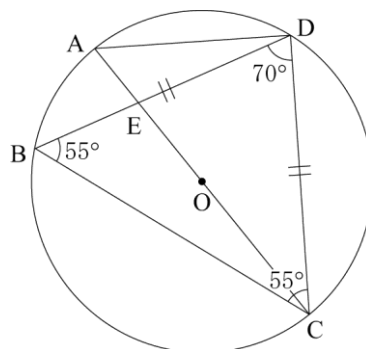


図 2

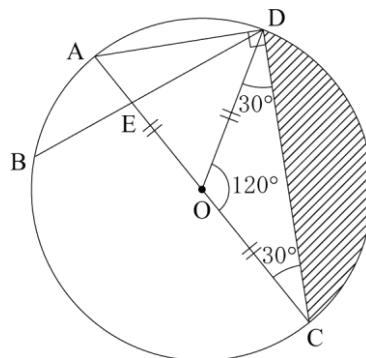


図 3

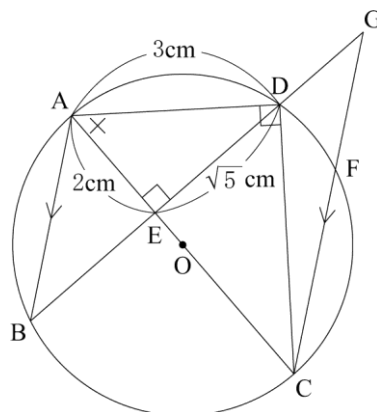
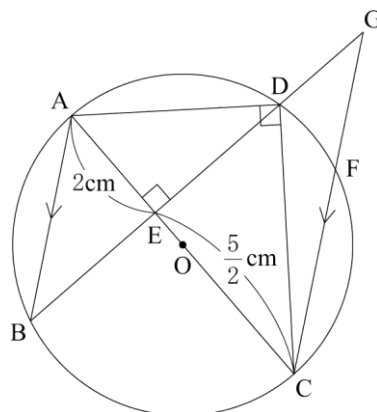


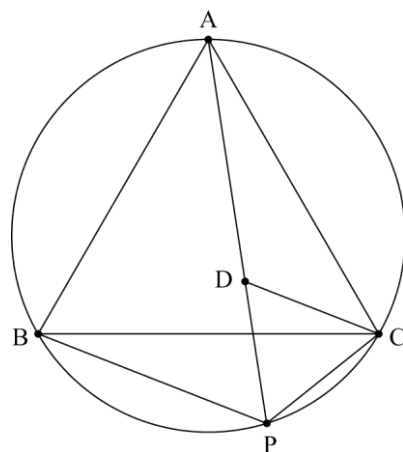
図 4



【問 20】

右の図のように 3 点 A, B, C を通る円があり, $\triangle ABC$ は 1 辺の長さが 9 cm の正三角形である。 $\widehat{BC}$ は円周上の 2 点 B, C を両端とする弧のうち短い方を表すものとし, 点 P は $\widehat{BC}$ 上の点である。また, 点 D を線分 AP 上に $PC=PD$ となるようにとる。このとき, 次の各問いに答えなさい。

図



(鳥取県 2021 年度)

問 1 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

問 2 $\triangle ADC \equiv \triangle BPC$ であることを, 次のように証明した。

証明の 1 , 2 にあてはまるものとして, 最も適切なものを, あとの

1 , 2 の選択肢のア～エからそれぞれひとつずつ選び, 記号で答えなさい。

また, 3 にあてはまる三角形の合同条件を答え, この証明を完成させなさい。

ただし, 証明の中にある 1 , 2 には, それぞれ同じ記号が入るものとする。

(証明)

$\triangle ADC$ と $\triangle BPC$ で,

$\triangle ABC$ は正三角形だから $AC=BC$ …①

$\widehat{PC}$ に対する円周角だから $\angle PAC =$ 1

よって, $\angle DAC =$ 1 …②

また, $\triangle ABC$ が正三角形だから $\angle ABC = 60^\circ$

$\widehat{AC}$ に対する円周角だから $\angle ABC = \angle APC$

よって $\angle APC = 60^\circ$

これと, $PC=PD$ であることにより, $\triangle PCD$ は正三角形である。よって, $\angle DCP = 60^\circ$

ここで, $\angle ACD = 60^\circ -$ 2

$\angle BCP = 60^\circ -$ 2

であるので, $\angle ACD = \angle BCP$ …③

①, ②, ③より 3 ので,

$\triangle ADC \equiv \triangle BPC$ である。

(証明終)

【 1 の選択肢】

ア $\angle BAP$

イ $\angle PBC$

ウ $\angle CDP$

エ $\angle BCP$

【 2 の選択肢】

ア $\angle CDP$

イ $\angle APB$

ウ $\angle BAP$

エ $\angle BCD$

問 3 AP=10 cm のとき，四角形 ABPC の周の長さを求めなさい。

問 4 線分 BC と線分 AP の交点を Q とする。BP : PC=2 : 1 のとき，△CDQ の面積を求めなさい。

解答欄

問 1	cm ²	
問 2	1	
	2	
	3	
問 3	cm	
問 4	cm ²	

解答

問 1 $\frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

問 2

1 イ

2 エ

3 1 組の辺とその両端の角が, それぞれ等しい

問 3 28 cm

問 4 $\frac{27\sqrt{3}}{28} \text{ cm}^2$

解説

問 1

点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと, $\triangle ABH$ は 3 つの内角の大きさがそれぞれ 30° , 60° , 90° の辺の比が決まった直角三角形になる。

$$AB : AH = 2 : \sqrt{3} \quad AH = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

問 3

$$(\text{四角形 ABPC の周の長さ}) = AB + BP + PC + CA = 9 + BP + PC + 9$$

問 2 より, 合同な図形の対応する辺の長さは等しいので, $BP = AD$ 仮定より, $PC = DP$

よって, $BP + PC = AD + DP = AP = 10 \text{ (cm)}$ より,

$$(\text{四角形 ABPC の周の長さ}) = 9 + BP + PC + 9 = 9 + 10 + 9 = 28 \text{ (cm)}$$

問 4

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しく, $\angle ACB = \angle APB = 60^\circ$

同様に, $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しく, $\angle ABC = \angle APC = 60^\circ$

$\angle APB = \angle APC$ より, 線分 AP は $\angle BPC$ の二等分線だから, $\triangle BPC$ で角の二等分線の性質を用いると,

$$BQ : QC = BP : PC = 2 : 1 \quad BC = 9 \text{ cm} \text{ なので, } BQ = 6 \text{ cm, } QC = 3 \text{ cm}$$

$$\text{ここで } PC = CD = DP = x \text{ cm とすると, } BP = AD = 2x \quad AP = AD + DP = 2x + x = 3x$$

$$\text{さらに } \triangle AQC \sim \triangle BQP \text{ より対応する辺の比は等しく, } AC : BP = QC : QP \quad 9 : 2x = 3 : QP$$

$$QP = \frac{2}{3}x \text{ (cm)} \quad \text{よって, } AQ = AP - QP = 3x - \frac{2}{3}x = \frac{7}{3}x \text{ (cm) となるので, } AQ : QP = \frac{7}{3}x : \frac{2}{3}x = 7 : 2$$

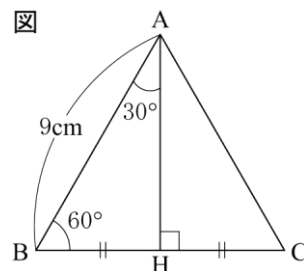
これは $\triangle ABC$ と $\triangle BPC$ で BC を共通の底辺とみたときの高さの比なので, $\triangle ABC : \triangle BPC = 7 : 2$

$$\text{よって } \triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とすると, } \triangle BPC = \frac{2}{7}S$$

$$\text{問 2 より } \triangle ADC \equiv \triangle BPC \text{ なので, } \triangle ADC \text{ の面積も } \frac{2}{7}S$$

$$\text{次に, } \triangle ABC \text{ において, } BQ : QC = 2 : 1 \text{ に注目すると, } \triangle AQC = \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{1}{3}S$$

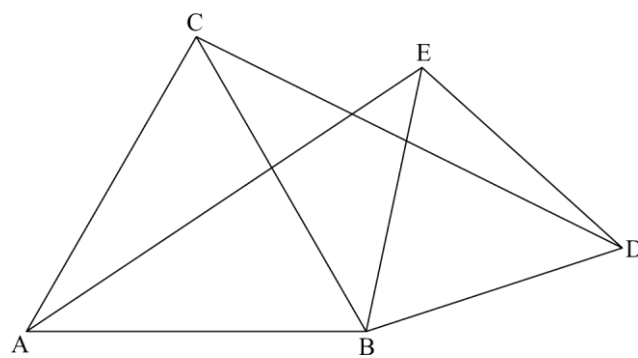
$$\text{よって, } \triangle CDQ = \triangle AQC - \triangle ADC = \frac{1}{3}S - \frac{2}{7}S = \frac{1}{21}S = \frac{1}{21} \times \frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{28} \text{ (cm}^2\text{)}$$



【問 21】

次の図において、 $\triangle ABC$ と $\triangle BDE$ はそれぞれ正三角形で、 $AB > BD$ とします。このとき、点 A と点 E 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶと、 $\triangle ABE \equiv \triangle CBD$ となります。このことを証明するには、三角形の合同条件のうちのどれを使えばよいですか。一つ答えなさい。

(岡山県 2021 年度 特別)



解答欄

解答

2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

解説

$\triangle ABE$ と $\triangle CBD$ において

$\triangle ABC$ 、 $\triangle BDE$ はともに正三角形なので、

$AB = CB \cdots ①$ 、 $BE = BD \cdots ②$

また、正三角形の内角はすべて等しく 60° なので、

$\angle ABC = \angle EBD = 60^\circ$

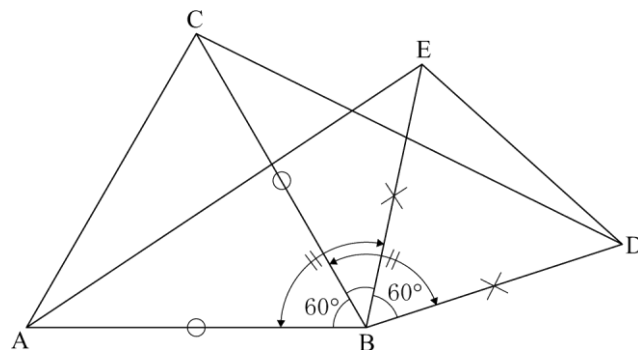
$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE$,

$\angle CBD = \angle EBD + \angle CBE$ より、

$\angle ABE = \angle CBD \cdots ③$

①、②、③より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ABE \equiv \triangle CBD$



【問 22】

中学生の航平さんは、「三角形の 3 つの辺に接する円の作図」について、高校生のお兄さんの啓太さんと話をしています。

航平「数学の授業で、先生から、これまで学習したことを用いると、三角形の 3 つの辺に接する円を作図できると聞いたんだけど、どうやったら作図できるんだろう。」

啓太「①角の二等分線の作図と②垂線の作図の方法を知っていれば、その円を作図できるよ。」

航平「その 2 つの方法は習ったし、角の二等分線の作図の方法が正しいことも証明したよ。」

啓太「そうなんだね。実は、三角形の 2 つの角の二等分線の交点が、その円の中心になるんだよ。三角形の 3 つの辺に接する円の作図には、いろいろな図形の性質が用いられているから、作図をする際には振り返るといいよ。」

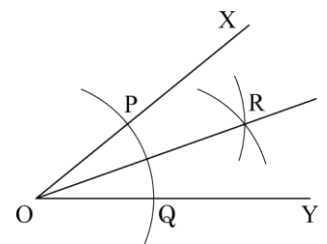
次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(広島県 2021 年度)

問 1 下線部①について、航平さんは、下の【角の二等分線の作図の方法】を振り返りました。

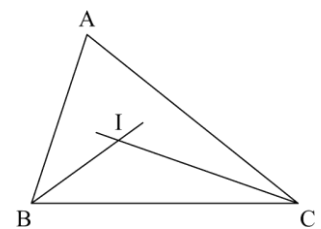
【角の二等分線の作図の方法】

- 〔1〕 点 O を中心とする円をかき、半直線 OX, OY との交点を、それぞれ P, Q とする。
- 〔2〕 2 点 P, Q を、それぞれ中心として、同じ半径の円をかき、その交点の 1 つを R とする。
- 〔3〕 半直線 OR を引く。



【角の二等分線の作図の方法】において、作図した半直線 OR が $\angle XOY$ の二等分線であることを、三角形の合同条件を利用して証明しなさい。

問 2 下線部②について、航平さんは、右の図の $\triangle ABC$ において、 $\angle ABC$, $\angle ACB$ の二等分線をそれぞれ引き、その交点を I としました。そして、下の【手順】によって点 I から辺 BC に垂線を引きました。



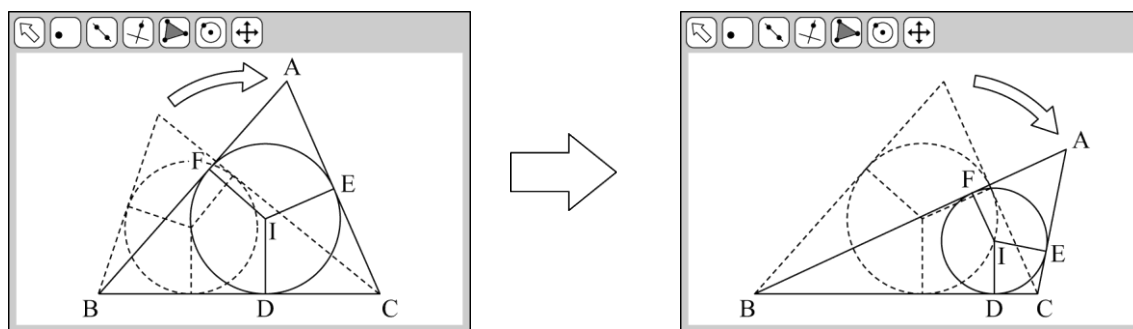
【手順】

- 〔1〕 を中心として、 を半径とする円をかく。
- 〔2〕 を中心として、 を半径とする円をかく。
- 〔3〕 〔1〕, 〔2〕 でかいた円の交点のうち、I ではない方を J とする。
- 〔4〕 2 点 I, J を通る直線を引く。

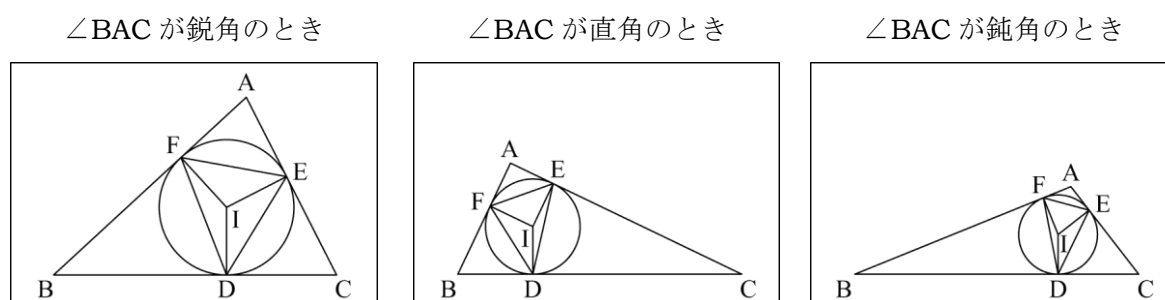
【手順】の ・ に当てはまる点をそれぞれ答えなさい。また、 ・ に当てはまる線分をそれぞれ答えなさい。

航平さんは、点 I から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を D としました。同じようにして、点 I から辺 CA , AB にも垂線を引き、辺 CA , AB との交点をそれぞれ E , F としました。そして、角の二等分線の性質から $ID=IE=IF$ であり、点 I を中心とし、 ID を半径とする円が、円の接線の性質から $\triangle ABC$ の 3 つの辺に接する円であることが分かりました。

問 3 さらに、航平さんは、コンピュータを使って $\triangle ABC$ の 3 つの辺に接する円をかき、下の図のように、辺 BC をそのままにして点 A を動かし、 $\triangle ABC$ をいろいろな形の三角形に変え、いつでも成り立ちそうなことがらについて調べました。



航平さんは、下の図のように、 $\angle BAC$ の大きさを、鋭角、直角、鈍角と変化させたときの $\triangle DEF$ に着目しました。



航平さんは、 $\triangle ABC$ がどのような三角形でも、 $\triangle DEF$ が鋭角三角形になるのではないだろうかと考え、それがいつでも成り立つことを、下のように説明しました。

【航平さんの説明】

$\angle BAC = \angle x$ とするとき、 $\angle FDE$ を、 $\angle x$ を用いて表すと、 $\angle FDE = \boxed{\text{オ}}$ と表せる。これより、 $\angle FDE$ は、 $\boxed{\text{カ}}^\circ$ より大きく $\boxed{\text{キ}}^\circ$ より小さいことがいえるから、鋭角である。同じようにして、 $\angle DEF$, $\angle EFD$ も鋭角である。よって、 $\triangle ABC$ がどのような三角形でも、 $\triangle DEF$ は鋭角三角形になる。

【航平さんの説明】の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる式を、 $\angle x$ を用いて表しなさい。

また、 $\boxed{\text{カ}} \cdot \boxed{\text{キ}}$ に当てはまる数をそれぞれ求めなさい。

解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
問 3	オ	
	カ	
	キ	

解答

問 1

〔証明〕

点 P と点 R, 点 Q と点 R をそれぞれ結ぶ。

$\triangle POR$ と $\triangle QOR$ において

$OP = OQ \cdots \textcircled{1}$

$PR = QR \cdots \textcircled{2}$

共通な辺であるから

$OR = OR \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

3 組の辺がそれぞれ等しいから

$\triangle POR \equiv \triangle QOR$

合同な図形の対応する角は等しいから

$\angle POR = \angle QOR$

したがって, OR は $\angle XOY$ の二等分線である。

問 2

ア B

イ BI

ウ C

エ CI

問 3

オ $90^\circ - \frac{1}{2}\angle x$

カ 0

キ 90

解説

問 3

四角形 AFIE に着目する。

線分 IF, IE は点 I を中心とする円の半径であり

点 F, E はそれぞれ辺 AB, AC と円の接点だから

$\angle IFA = \angle IEA = 90^\circ$

四角形の内角の和は 360° だから

$\angle FIE = 360^\circ - (\angle IFA + \angle IEA + \angle BAC)$ より

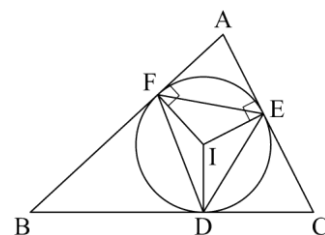
$\angle FIE = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \angle x) \quad \angle FIE = 180^\circ - \angle x$

$\angle FIE$ は $\widehat{FE}$ に対する中心角, $\angle FDE$ は $\widehat{FE}$ に対する円周角だから

$\angle FDE = \frac{1}{2}\angle FIE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle x) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle x$

また, $\angle x$ は $\triangle ABC$ の内角だから 0° より大きく 180° より小さいので

$\angle FDE$ は, $90^\circ - \frac{1}{2} \times 0^\circ = 90^\circ$ より小さく, $90^\circ - \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ より大きい。



【問 23】

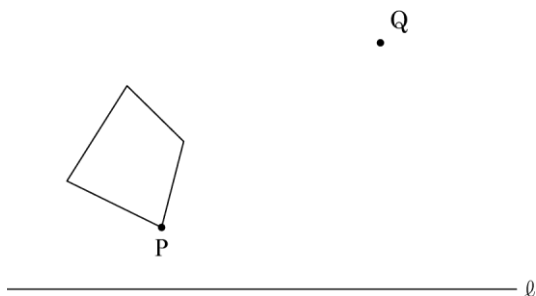
図形の回転移動について、次の問 1，問 2 に答えなさい。

(山口県 2021 年度)

問 1 図 1 において、点 P を頂点にもつ四角形を、点 O を回転の中心として、点 P が点 Q の位置に移るように回転移動させる。

点 O が直線 ℓ 上にあるとき、点 O を定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし、作図に用いた線は消さないこと。

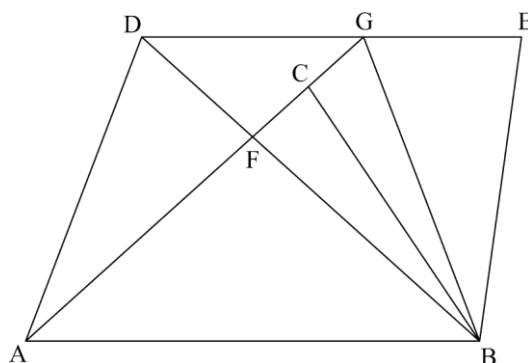
図 1

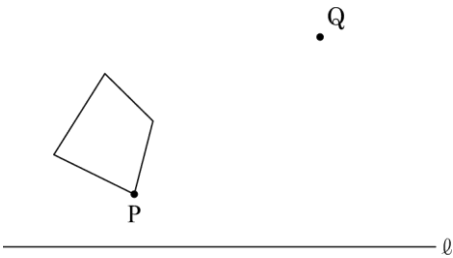


問 2 図 2 において、 $\triangle DBE$ は $\triangle ABC$ を、点 B を回転の中心として、 $DE \parallel AB$ となるように回転移動したものである。

線分 AC と線分 BD の交点を F，線分 AC の延長と線分 DE の交点を G とするとき、 $\triangle FDA \equiv \triangle FGB$ であることを証明しなさい。

図 2



問 1	〔作図〕 
問 2	〔証明〕

問 1

 $\triangle\text{FDA}$ と $\triangle\text{FGB}$ で
$$\angle AFD = \angle BFG \cdots \textcircled{1}$$
$$\angle CAB = \angle EDB$$
$$\angle FAB = \angle FDG \cdots \textcircled{2}$$
$$\angle FAB = \angle FGD \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

よって、 $\triangle FGD$ は二等辺三角形だから

②, ④より

よって、 $\triangle FAB$ は二等辺三角形だから

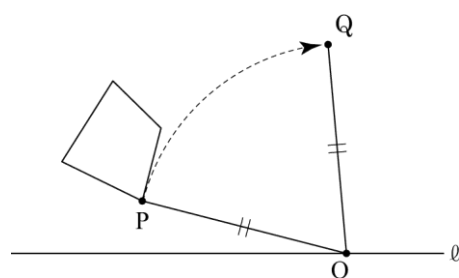
①, ⑤, ⑥より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\Delta \text{FDA} \equiv \Delta \text{FGB}$$

完成図を予想すると、図1のようになる。

よって、 $OP=OQ$ となるような点 O を作図するには、線分 PQ の垂直二等分線と直線 l の交点を求めればよい。



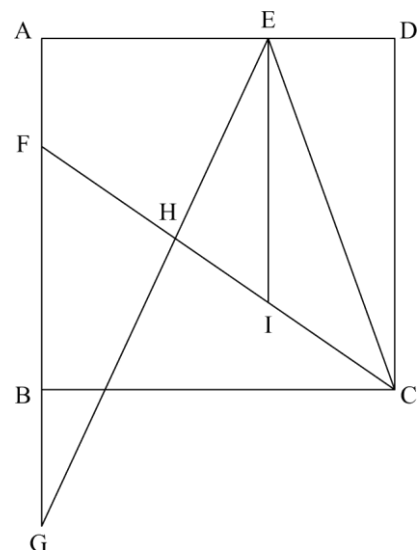
【問 24】

右の図のような，正方形 $ABCD$ があり，辺 AD 上に，2 点 A ， D と異なる点 E をとる。 $\angle BCE$ の二等分線をひき，辺 AB との交点を F とする。辺 AB を B の方に延長した直線上に $DE = BG$ となる点 G をとり，線分 GE と線分 CF との交点を H とする。点 E を通り，辺 AB に平行な直線をひき，線分 CF との交点を I とする。

このとき，次の問 1，問 2 に答えなさい。

(香川県 2021 年度)

問 1 $\triangle FGH \sim \triangle IEH$ であることを証明せよ。



問 2 $CE = FG$ であることを証明せよ。

解答欄

問 1	〔証明〕
問 2	〔証明〕

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle FGH$ と $\triangle IEH$ において

対頂角は等しいから、 $\angle FHG = \angle IHE$

$FG \parallel EI$ より、錯角は等しいから

$\angle GFH = \angle EIH$

2組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle FGH \simeq \triangle IEH$

問 2

〔証明〕

点 C と点 G を結ぶ。

$\triangle CDE$ と $\triangle CBG$ において、仮定より、 $DE = BG$

四角形 ABCD は正方形だから

$CD = CB$, $\angle CDE = \angle CBA = 90^\circ$

$\angle CBG = 180^\circ - \angle CBA = 90^\circ$

よって、 $\angle CDE = \angle CBG$

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle CDE \equiv \triangle CBG$

よって、 $\angle DCE = \angle BCG \cdots \cdots ①$ $CE = CG \cdots \cdots ②$

線分 CF は $\angle BCE$ の二等分線だから

$\angle ECF = \angle BCF \cdots \cdots ③$

$\angle DCF = \angle DCE + \angle ECF$, $\angle GCF = \angle BCG + \angle BCF$

①, ③より、 $\angle DCF = \angle GCF \cdots \cdots ④$

$DC \parallel FG$ より、錯角は等しいから

$\angle DCF = \angle GFC \cdots \cdots ⑤$

④, ⑤より、 $\angle GCF = \angle GFC$

2つの角が等しいから

$\triangle GCF$ は二等辺三角形

よって、 $CG = FG \cdots \cdots ⑥$

②, ⑥より、 $CE = FG$

解説

問 2

$CE = FG$ を証明するには

辺 CE, FG を含む合同な三角形を見つけるのが基本だが、今回はそれが見つからない。

よって、直接 $CE = FG$ を証明するのではなく

$CE = \square = FG$ というように、ほかの辺を経由して証明する。

仮定に $DE = BG$ があるので、DE, BG を含む合同な三角形をさがすと

点 C と点 G を結ぶことで、 $\triangle CDE$ と $\triangle CBG$ が見つかる。

【問 25】

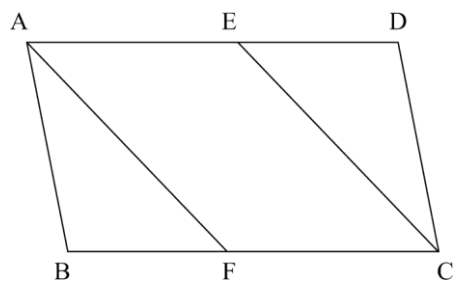
平行四辺形 ABCD がある。図 1 のように、線分 AD, BC 上に、点 E, F を、 $DE=BF$ となるようにそれぞれとり、点 A と点 F、点 C と点 E をそれぞれ結ぶ。

このとき、四角形 AFCE は平行四辺形である。

次の問 1 ～問 3 に答えよ。

(福岡県 2021 年度)

図 1



問 1 次は、図 1 における「四角形 AFCE は平行四辺形である」ことの証明である。

証明

四角形 ABCD は平行四辺形だから

ア $AE \parallel CF$ …①

イ $AD=CB$ …②

仮定から、ウ $DE=BF$ …③

②, ③より、エ $AD-DE=CB-BF$

よって、オ $AE=CF$ …④

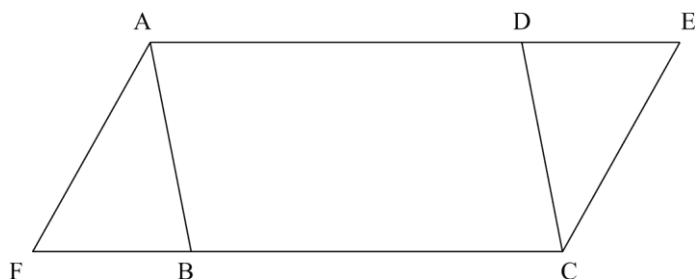
①, ④より、カ 1組の向かいあう辺が平行でその長さが等しいので四角形 AFCE は平行四辺形である。

図 2 は、図 1 における点 E, F を、線分 AD, CB を延長した直線上に $DE=BF$ となるようにそれぞれとったものである。

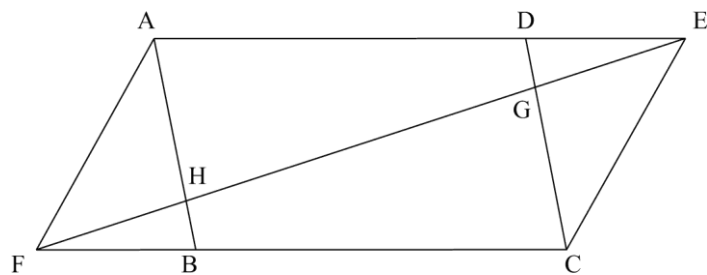
図 2 においても、四角形 AFCE は平行四辺形である。このことは、上の証明の下線部ア～カのうち、いずれか 1 つをかき直すことで証明することができる。

上の証明を、図 2 における「四角形 AFCE は平行四辺形である」ことの証明とするには、どの下線部をかき直せばよいか。ア～カから 1 つ選び、記号をかき、その下線部を正しくかき直せ。

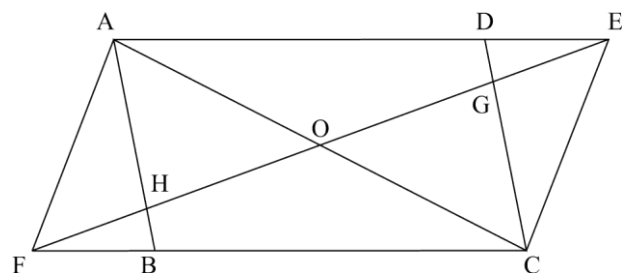
図 2



問2 図3は、図2において、対角線EFと 図3
線分CD、線分ABとの交点をそれぞれG、Hとしたものである。
図3において、 $\triangle DGE \equiv \triangle BHF$ であることを証明せよ。



問3 図4は、図3において、 $AD : DE = 3 : 1$ と 図4
なる場合を表しており、対角線EFと対角線ACとの交点をOとしたものである。
平行四辺形AFCEの面積が 12 cm^2 のとき、四角形HBCOの面積を求めよ。



解答欄

問1	記号	
	〔解答〕	
問2	〔証明〕	
問3	cm²	

解答

問 1

記号工

〔解答〕 $AD+DE=CB+BF$

問 2

〔証明〕

$\triangle DGE$ と $\triangle BHF$ において

仮定から, $DE=BF$ …①

平行線の錯角は等しいから, $AE \parallel CF$ より

$\angle GED = \angle HFB$ …②

$\angle EDG = \angle FCD$ …③

平行線の同位角は等しいから, $CD \parallel AB$ より

$\angle FCD = \angle FBH$ …④

③, ④より, $\angle EDG = \angle FBH$ …⑤

①, ②, ⑤より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle DGE \equiv \triangle BHF$

問 3 $\frac{27}{10} \text{ cm}^2$

解説

問 3

$\triangle AFE$ と $\triangle CEF$ は, 平行四辺形の対辺が等しいから, $AE=CF$ で, $AE \parallel FC$ より, それぞれ辺 AE ,

CF を底辺としたときの高さが等しいので, $\triangle AFE = \triangle CEF = \frac{1}{2} \square AFCE$

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるので, $FO=EO$ より

$\triangle OFC = \triangle OEC = \frac{1}{2} \triangle CEF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \square AFCE = \frac{1}{4} \square AFCE = \frac{1}{4} \times 12 = 3 (\text{cm}^2)$

次に, 図 1 のように, $AE=CF$, $DE=BF$, $AD:DE=3:1$ よ

り, $AE:BF=4:1$

$AE \parallel FB$ より, $\triangle AHE$ と $\triangle BHF$ で,

平行線と線分の比から, $EH:FH=AE:BF=4:1$

よって, $\triangle AHE = \frac{4}{5} \triangle AFE = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \square AFCE$

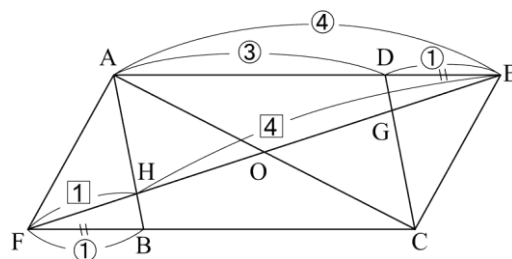
$= \frac{2}{5} \square AFCE$

また, $\triangle AHE \sim \triangle BHF$ より, 相似比は $AE:BF=4:1$ だから,

面積比は $4^2:1^2=16:1$

よって, $\triangle BHF = \frac{1}{16} \triangle AHE = \frac{1}{16} \times \frac{2}{5} \square AFCE = \frac{1}{40} \square AFCE = \frac{1}{40} \times 12 = \frac{3}{10} (\text{cm}^2)$

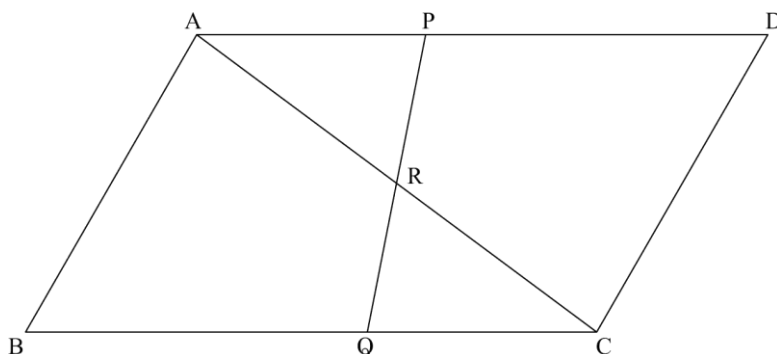
したがって, (四角形 $HBCO$) $= \triangle OFC - \triangle BHF = 3 - \frac{3}{10} = \frac{27}{10} (\text{cm}^2)$



【問 26】

下の図のように、 $AB=3\text{ cm}$ 、 $BC=5\text{ cm}$ の平行四辺形 $ABCD$ があり、2 点 P 、 Q をそれぞれ辺 AD 、 BC 上に $AP=CQ$ となるようにとる。線分 PQ と対角線 AC の交点を R とするとき、(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2021 年度 特色)



- (1) 下の〔会話〕は、太郎さんと花子さんが $RP=RQ$ となることを証明する手順について、話し合っている場面である。□①□ と □②□ には、あてはまる辺を、□④□ と □⑤□ には、あてはまる角をそれぞれ書きなさい。また、□③□ には、あとのア～オの中からあてはまる語句を 1 つ選び、記号を書きなさい。

〔会話〕

太郎さん： $RP=RQ$ となることを証明するためには、どうしたらいいかな。

花子さん： $\triangle ARP$ と $\triangle CRQ$ が合同であることをいえばよさそうね。

太郎さん： $\triangle ARP$ と $\triangle CRQ$ の辺について、仮定から、□①□ = □②□ がわかっているよ。

花子さん： $\triangle ARP$ と $\triangle CRQ$ について、大きさが等しいといえる角はあるかな。

太郎さん： 平行線の □③□ は等しいから、 $\angle PAR = \angle QCR$ がいえるね。

花子さん： 同じように平行線の □③□ が等しいことから、□④□ = □⑤□ もいえるよ。

太郎さん： そうすると、 $\triangle ARP \cong \triangle CRQ$ がいえるから、 $RP=RQ$ が証明できるね。

ア 円周角

イ 錯角

ウ 同位角

エ 中心角

オ 対頂角

- (2) $AP=2\text{ cm}$ のとき、次の問いに答えなさい。

① PD の長さを求めなさい。

② $\triangle PRD$ の面積を S_1 、四角形 $ABQR$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1 : S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

- (3) 四角形 $ABQR$ の面積が $\triangle PRD$ の面積の 3 倍になるとき、 AP の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	①	
	②	
	③	
	④	
	⑤	
(2)	①	cm
	②	$S_1 : S_2 =$:
(3)	cm	

解答

(1)

①AP

②CQ

③イ

④ $\angle APR$

⑤ $\angle CQR$

(2)

①3 (cm)

②($S_1 : S_2 =$) 3 : 8

(3) $\frac{5}{2}$ (cm)

解説

(2)

①

平行四辺形の2組の対辺はそれぞれ等しいので、 $AD = BC = 5(\text{cm})$

よって、 $PD = AD - AP = 5 - 2 = 3(\text{cm})$

②

$\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、平行四辺形の2組の対辺はそれぞれ等しいので $AB = CD$, $BC = DA$

共通な辺だから、 $AC = CA$ より、3辺がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

(1)より、 $\triangle ARP \equiv \triangle CRQ$ だから

(四角形 $ABQR$) = $\triangle ABC - \triangle CRQ$

(四角形 $DCRP$) = $\triangle CDA - \triangle ARP$ より (四角形 $ABQR$) = (四角形 $DCRP$)

$AR = CR$ より、 $\triangle ARD = \frac{1}{2} \triangle CDA$

$AP : PD = 2 : 3$ より、 $\triangle ARP = \frac{2}{5} \triangle ARD = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \triangle CDA = \frac{1}{5} \triangle CDA$

$\triangle PRD = \frac{3}{5} \triangle ARD = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \triangle CDA = \frac{3}{10} \triangle CDA$

よって、(四角形 $ABQR$) = (四角形 $DCRP$) = $\triangle CDA - \triangle ARP = \triangle CDA - \frac{1}{5} \triangle CDA = \frac{4}{5} \triangle CDA$

$S_1 : S_2 = \triangle PRD : (\text{四角形 } ABQR) = \frac{3}{10} \triangle CDA : \frac{4}{5} \triangle CDA = 3 : 8$

(3)

$AP = x \text{ cm}$ として、(2)②と同様に考える。

$AP : PD = x : (5 - x)$ より

$\triangle ARP = \frac{x}{5} \triangle ARD = \frac{x}{5} \times \frac{1}{2} \triangle CDA = \frac{x}{10} \triangle CDA$

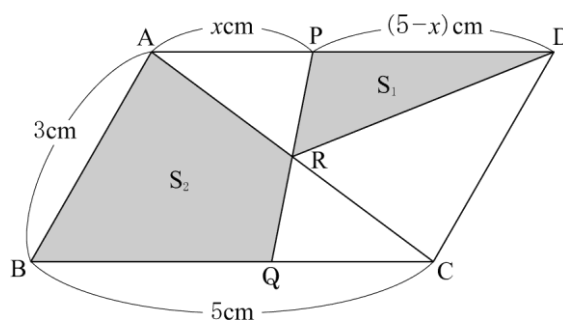
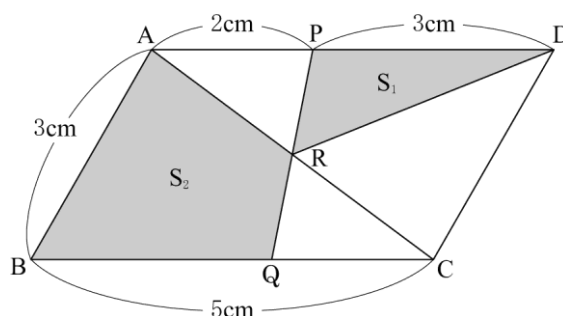
$\triangle PRD = \frac{5-x}{5} \triangle ARD = \frac{5-x}{5} \times \frac{1}{2} \triangle CDA = \frac{5-x}{10} \triangle CDA$

よって、(四角形 $ABQR$) = (四角形 $DCRP$) = $\triangle CDA - \triangle$

$ARP = \triangle CDA - \frac{x}{10} \triangle CDA = \left(1 - \frac{x}{10}\right) \triangle CDA$

$S_1 : S_2 = \triangle PRD : (\text{四角形 } DCRP) = \frac{5-x}{10} \triangle CDA : \left(1 - \frac{x}{10}\right) \triangle CDA = \frac{5-x}{10} : \left(1 - \frac{x}{10}\right) = 1 : 3$

よって、 $\left(1 - \frac{x}{10}\right) \times 1 = \frac{5-x}{10} \times 3 \quad x = \frac{5}{2}(\text{cm})$



【問 27】

図 1 ～ 図 4 のように、長方形 ABCD があり、辺 AB 上に点 P を、辺 CD 上に点 R を、 $AP=CR$ となるようにとる。さらに、辺 BC 上に点 Q を、辺 AD 上に点 S を、四角形 PQRS が平行四辺形となるようにとる。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2021 年度)

問 1 図 1 の平行四辺形 PQRS は、どのような条件が加わるとひし形になるか。次の①～④の中から 1 つ選び、その番号を書け。

- ① $\angle P = \angle Q$
- ② $PQ \perp PS$
- ③ $PR = QS$
- ④ $PQ = PS$

問 2 図 1 において、 $\triangle APS \equiv \triangle CRQ$ であることを証明せよ。

問 3 図 2 のように、 $AB=2\text{ cm}$ 、 $AD=3\text{ cm}$ とする。四角形 PQRS がひし形となり、 $AS=2\text{ cm}$ のとき、線分 AP の長さは何 cm か。

問 4 図 3、図 4 のように、点 P、R をそれぞれ点 B、D と一致するようにとる。四角形 PQRS がひし形となり、 $PQ=8\sqrt{3}\text{ cm}$ 、 $\angle SPQ=60^\circ$ のとき、次の (1)、(2) に答えよ。

(1) 辺 AB の長さは何 cm か。

(2) 図 4 のように、長方形 ABCD の辺 AB、BC、CD、DA の中点をそれぞれ E、F、G、H とすると、四角形 EFGH はひし形となる。このとき、ひし形 PQRS とひし形 EFGH が重なった部分 (図 4 の  で示した部分) の面積は何 cm^2 か。

図 1

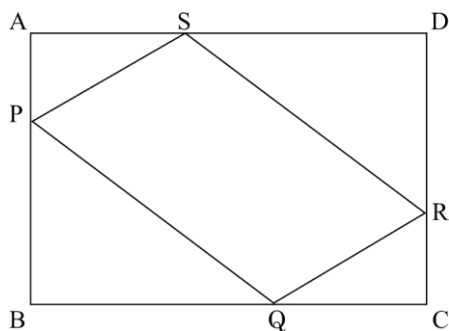


図 2

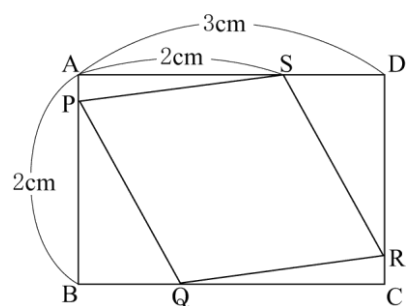


図 3

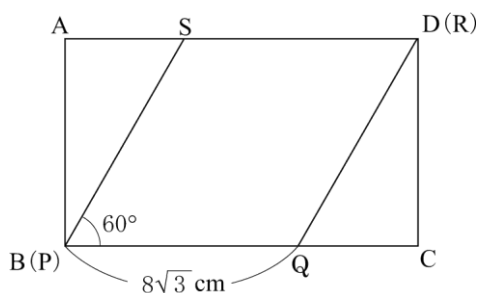
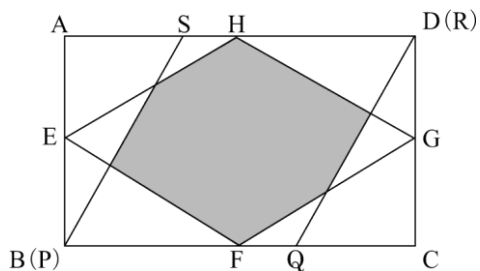


図 4



解答欄

問 1		
問 2		
問 3	cm	
問 4	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問 1 ④

問 2

△APS と △CRQ において

∠PAS=∠RCQ=90° (長方形の性質) …①

PS=RQ (平行四辺形の性質) …②

AP=CR (仮定) …③

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

△APS≡△CRQ

問 3 $\frac{1}{4}$ [cm]

問 4

(1) 12 [cm]

(2) $63\sqrt{3}$ [cm²]

解説

問 1

ひし形は、4 辺がすべて等しい四角形である。 $\square PQRS$ の 2 組の対辺はそれぞれ等しいので $PQ=SR$, $QR=PS$ より、「条件④ $PQ=PS$ 」が加われば、 $PQ=QR=SR=PS$ となる。

問 3

図 1 のように、 $AP=CR=x$ cm とおく。

直角三角形 APS において、三平方の定理より

$$PS^2=AP^2+AS^2=x^2+2^2=x^2+4$$

また、直角三角形 SRD において、三平方の定理より、 $SR^2=SD^2+DR^2=1^2+(2-x)^2=x^2-4x+5$

四角形 $PQRS$ はひし形だから、 $PS=SR$ より

$$PS^2=SR^2 \Rightarrow x^2+4=x^2-4x+5 \Rightarrow x=\frac{1}{4}(\text{cm})$$

問 4

(1)

図 2 のように、点 S , Q を結ぶ。四角形 $PQRS$ はひし形だから、

$$PQ=PS=8\sqrt{3}(\text{cm})$$

また、 $AS \parallel PQ$ より、錯角は等しいので

$$\angle ASP=\angle SPQ=60^\circ$$

よって、 $\triangle APS$ は、 $1:2:\sqrt{3}$ の辺の比をもつ直角三角形なので、

$$PS:AB=2:\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}:AB=2:\sqrt{3} \Rightarrow AB=12(\text{cm})$$

(2)

$$(1) \text{ の図 2 より, } AS:PS=1:2 \Rightarrow AS=4\sqrt{3}(\text{cm})$$

また、四角形 $PQRS$ はひし形だから、 $PQ=SR=8\sqrt{3}(\text{cm})$ 、よって、 $AR=AS+SR=4\sqrt{3}+8\sqrt{3}=12\sqrt{3}(\text{cm})$

H は辺 AD の中点だから、 $AH=\frac{1}{2}AR=6\sqrt{3}(\text{cm})$ 、 $SH=AH-AS=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\text{cm})$

図 1

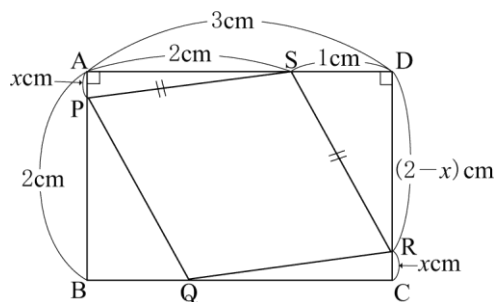


図 2

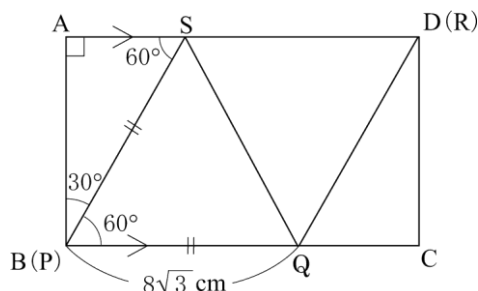


図3のように、辺PSと、辺EF、HEの交点をそれぞれK、N、辺QRと、辺FG、GHの交点をそれぞれL、M、直線HEと直線FPの交点をXとする。

AH//XPより、 $\triangle AEH$ と $\triangle PEX$ で平行線と線分の比から、 $AH:PX=AE:PE=1:1 \Rightarrow AH=PX=6\sqrt{3}(\text{cm})$
SH//XPより、 $\triangle SNH$ と $\triangle PNX$ で平行線と線分の比から、

$$SN:PN=SH:PX=2\sqrt{3}:6\sqrt{3}=1:3$$

図4のように、直線HAと直線FEの交点をYとする。
YA//PFより、 $\triangle AEY$ と $\triangle PEF$ で平行線と線分の比から、 $AY:PF=AE:PE=1:1 \Rightarrow AY=PF=6\sqrt{3}(\text{cm})$
YS//PFより、 $\triangle SKY$ と $\triangle PKF$ で平行線と線分の比から、 $SK:PK=SY:PF=10\sqrt{3}:6\sqrt{3}=5:3$

$$\text{図5より、} \triangle APS = 12 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 24\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

SN:PN=1:3より、

$$\triangle APN = \frac{3}{4} \triangle APS = \frac{3}{4} \times 24\sqrt{3} = 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

AE:EP=1:1より

$$\triangle EPN = \frac{1}{2} \triangle APN = \frac{1}{2} \times 18\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

SN:PN=1:3, SK:PK=5:3より、

SN:NK:KP=2:3:3 すなわち

$$NK:KP=3:3=1:1$$

$$\text{よって、} \triangle NEK = \frac{1}{2} \triangle EPN = \frac{1}{2} \times 9\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$$

$$\text{同様に、} \triangle LGM = \triangle NEK = \frac{9\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$$

図6のように、ひし形EFGHの対角線HFとEGは垂直に交わるから、その面積は、

$$12 \times 12\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 72\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

$$\text{よって、求める面積は、} 72\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 2 = 63\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

図3

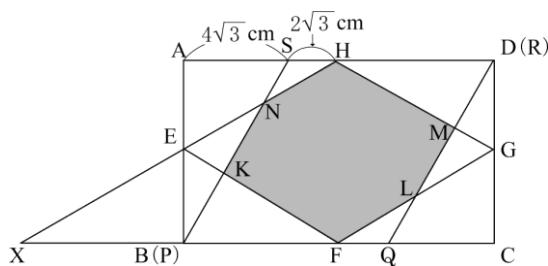


図4

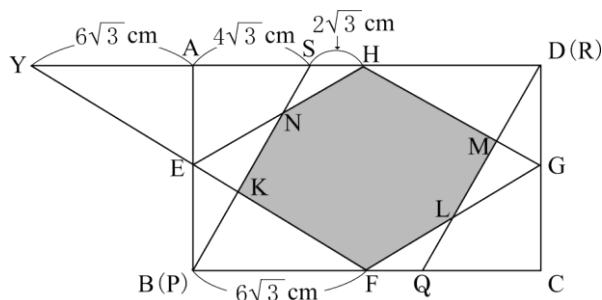


図5

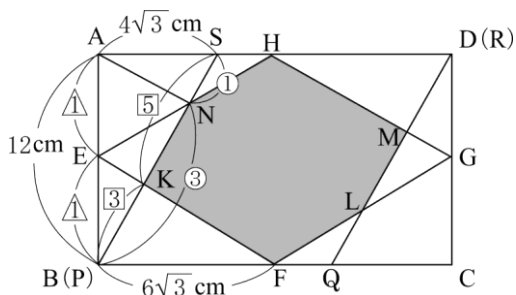
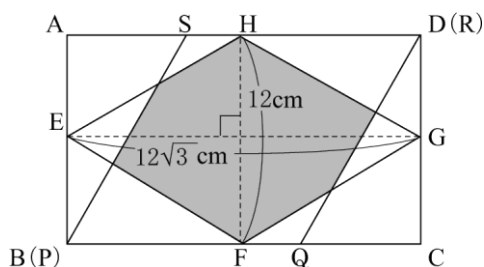


図6



【問 28】

右の図のように、 $\angle BCA=90^\circ$ の直角三角形 ABC と、辺 AB を 1 辺とする正方形 $EBAD$ 、辺 BC を 1 辺とする正方形 $BFGC$ がある。線分 AF 、 EC をひき、 AF と EC の交点を H とする。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(宮崎県 2021 年度)

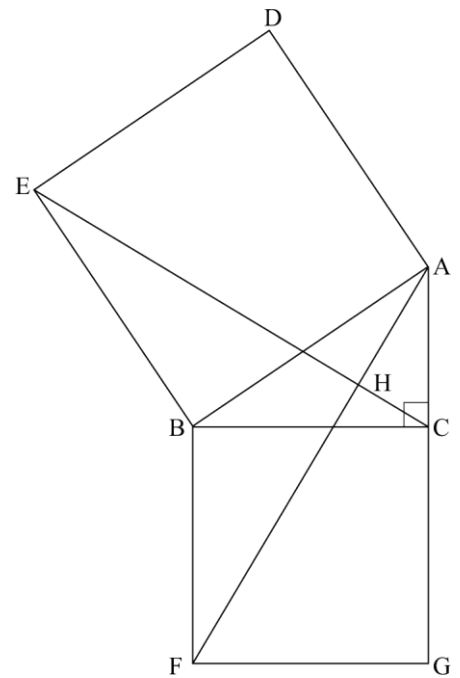
問 1 $\angle ABC=35^\circ$ のとき、 $\angle DAG$ の大きさを求めなさい。

問 2 $\triangle ABF \equiv \triangle EBC$ であることを証明しなさい。

問 3 $BC=3\text{ cm}$ 、 $AC=2\text{ cm}$ のとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(1) 四角形 $ECAD$ の面積を求めなさい。

(2) 3 点 A 、 B 、 H を通る円をかくとき、この円において、点 H を含む方の $\widehat{AB}$ の長さを求めなさい。ただし、円周率は π とする。



解答欄

問 1	$\angle DAG =$ 度	
問 2	〔証明〕 $\triangle ABF$ と $\triangle EBC$ で、	
問 3	(1)	cm^2
	(2)	cm

解答

問 1 $\angle DAG = 145$ 度

問 2

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle EBC$ で、

四角形 $EBAD$ は正方形だから、 $AB = EB \cdots ①$

四角形 $BFGC$ は正方形だから、 $BF = BC \cdots ②$

また

$$\angle ABF = \angle ABC + \angle CBF = \angle ABC + 90^\circ$$

$$\angle EBC = \angle ABC + \angle EBA = \angle ABC + 90^\circ$$

よって、 $\angle ABF = \angle EBC \cdots ③$

①, ②, ③から

2組の辺とその間の角が、それぞれ等しいので

$$\triangle ABF \equiv \triangle EBC$$

問 3

$$(1) \frac{23}{2} \text{ cm}^2$$

$$(2) \frac{\sqrt{26}}{4} \pi \text{ cm}$$

解説

問 1

$\triangle ABC$ の内角の和は 180° なので

$$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\angle DAG = \angle DAB + \angle BAC = 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

問 2

2つの角を同じ式『 $\angle ABC + 90^\circ$ 』で表すことにより大きさが等しいことを示す方法はよく出題される。
確認しておきたい。

問 3

(1)

(四角形 $ECAD$) = (正方形 $ABED$) + $\triangle ABC$ - $\triangle EBC$ ($\cdots$ 式①) と考える。

$\triangle ABC$ で三平方の定理より

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 = 4 + 9 = 13$$

$AB > 0$ より

$$AB = \sqrt{13}(\text{cm}) \text{ なので}$$

$$(\text{正方形 } ABED) = (\sqrt{13})^2$$

$$= 13(\text{cm}^2) \text{ である。}$$

$$\text{また, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times CA = 3(\text{cm}^2) \text{ である。}$$

ここで $\triangle EBC$ の面積について、

$$\text{問 2 より } \triangle ABF \equiv \triangle EBC \text{ なので面積が等しく, } \triangle EBC = \triangle ABF = \frac{1}{2} \times BF \times BC = \frac{9}{2}(\text{cm}^2) \text{ である。}$$

$$\text{したがって式①より, } (\text{四角形 } ECAD) = 13 + 3 - \frac{9}{2} = \frac{23}{2}(\text{cm}^2)$$

(2)

問 2 より、合同な図形の対応する角の大きさは等しく、 $\angle BAH = \angle BEH$ となるので

円周角の定理の逆より、4点 A, H, B, E は同一円周上に存在する。

つまり、3点 A, B, H を通る円の周が点 E も通ると分かる。

さらに、 $\angle ABE = 90^\circ$ より、直径に対する円周角は 90° なので、線分 AE がこの円の直径になる。

$$\triangle ABE \text{ は直角二等辺三角形なので, } AB : AE = 1 : \sqrt{2} \quad \sqrt{13} : AE = 1 : \sqrt{2}$$

$$AE = \sqrt{26}(\text{cm}) \text{ よって, この円の中心を } O \text{ とすると, 点 } O \text{ は } AE \text{ の中点であり}$$

また、正方形 $ABED$ の対角線の交点にもなるので、 $\angle AOB = 90^\circ$ である。

よって、 $\widehat{AB}$ の長さは、直径 $\sqrt{26}\text{cm}$ 、中心角 90°

$$\text{のおうぎ形の弧の長さとなり, } \sqrt{26} \times \pi \times \frac{90}{360} = \frac{\sqrt{26}}{4} \pi (\text{cm})$$