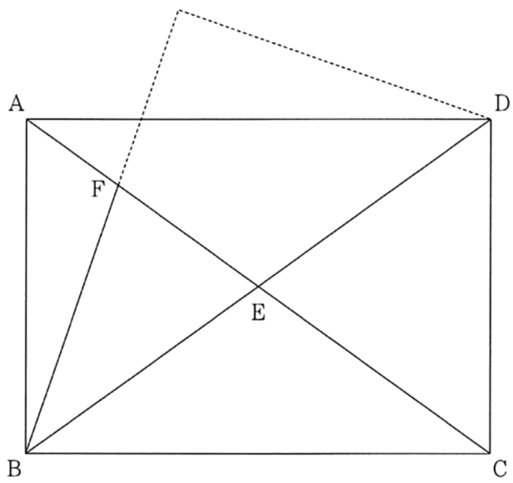
6.証明以外 平面図形の複合問題【2007 年度出題】

【問 1】

図のように，AB＜BC である長方形 ABCD の，対角線 AC と BD の交点を E とします。この長方形を線分 BD を折り目として折り返したとき，辺 BC が線分 AE と交わる点を F とします。折り返した長方形をもとにもどし，点 B と点 F を結びます。ただし，△ABE は正三角形ではないものとします。

あとの1～3の問いに答えなさい。

（宮城県 2007 年度）



問1．∠EBF と同じ大きさの角がいくつかあります。そのうちの１つの角を答えなさい。

問2．図の実線で囲まれた三角形のうち，△EBF と相似な三角形を答えなさい。

問3．BF＝4 cm，CF＝6 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 EF の長さを求めなさい。

(2) 長方形 ABCD の面積を求めなさい。

解答欄

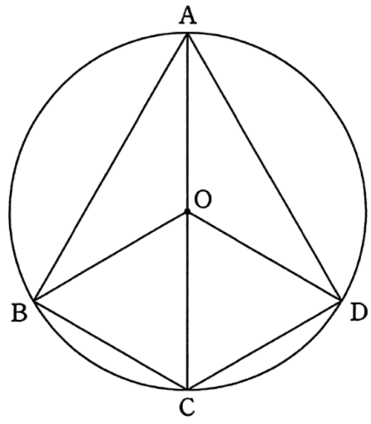
問1		
問2		
問3	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答
問1　$\angle$EBC
問2　$\triangle$BCF
問3
(1)　$\dfrac{8}{3}$ cm
(2)　$\dfrac{25\sqrt{7}}{3}$ cm^2
解説
問3
(2)
$\mathrm{EC}=6-\dfrac{8}{3}=\dfrac{10}{3}$
四角形 ABCD は長方形より対角線の長さは等しくそれぞれの中点で交わるから
$\mathrm{BE}=\mathrm{ED}=\mathrm{EC}=\dfrac{10}{3}$
$\triangle\mathrm{EBF}\backsim\triangle\mathrm{BCF}$ より
$\mathrm{BF}:\mathrm{CF}=\mathrm{BE}:\mathrm{CB}$
$4:6=\dfrac{10}{3}:\mathrm{CB}$
$4\mathrm{CB}=6\times\dfrac{10}{3}$
$\mathrm{CB}=5$
$\mathrm{BD}=\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{20}{3}$
$\triangle$BCD において三平方の定理より
$\mathrm{CD}=\sqrt{\left(\dfrac{20}{3}\right)^2-5^2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{3}$
よって長方形 ABCD の面積は
$\dfrac{5\sqrt{7}}{3}\times5=\dfrac{25\sqrt{7}}{3}$ cm^2

【問 2】

図のように，円Oの周上にある4点A，B，C，Dを頂点とする四角形ABCDがある。線分 AC は円 O の直径で，AB＝AD である。次の1～3の問いに答えなさい。

（秋田県 2007 年度）



問1．∠ABC の大きさを求めなさい。

問2．四角形 ABCD の面積は，三角形 ABO の面積の何倍か，求めなさい。

問3．OB＝BC，AB＝6 cm とする。

(1) ∠BAD の大きさを求めなさい。

(2) 四角形 ABCD と面積が等しい正三角形の１辺の長さを求めなさい。

解答欄

問1		°
問2		倍
問3	(1)	°
	(2)	cm

解答

問1　90°

問2　4 倍

問3

(1)　60°

(2)　$4\sqrt{3}$ cm

解説

問3

(2)

△ABC において

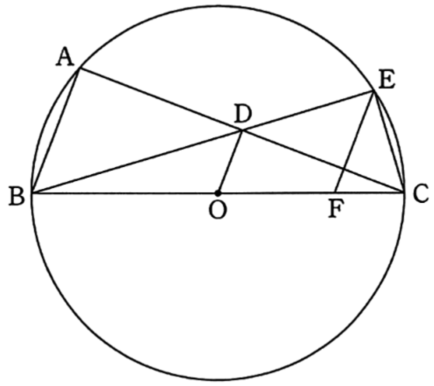
∠ABC＝90°，∠ACB＝60°，∠CAB＝30°　より四角形 ABCD と面積の等しい正三角形は

△ABC と△ADC を辺 AB と辺 AD が重なるように移動するとできその 1 辺の長さは AC と等しくなる。

よって AC＝$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$AB＝$\dfrac{12}{\sqrt{3}}$＝$4\sqrt{3}$ cm

【問 3】

図のように，点 A，B，C は円 O の周上の点で，線分 BC は円 O の直径である。線分 AC の中点を D，線分 BD を延長した直線と円 O との交点を E とし，点 E を通り線分 AB に平行な直線と線分 BC との交点を F とする。次の1～3の問いに答えなさい。



（秋田県　2007 年度）

問1．∠ABD の大きさを a°　とするとき，∠CDE の大きさを a を用いて表しなさい。

問2．AB＝AD のとき，線分 AB の長さは線分 EC の長さの何倍か，求めなさい。

問3．AB＝4 cm，BO＝6 cm とする。

(1)　三角形 BOD の面積を求めなさい。

(2)　線分 EF の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">°</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">倍</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答

問1　$(90-a)$°

問2　$\sqrt{2}$ 倍

問3

(1)　$4\sqrt{2}$ cm^2

(2)　$\dfrac{10}{3}$ cm

解説

問2

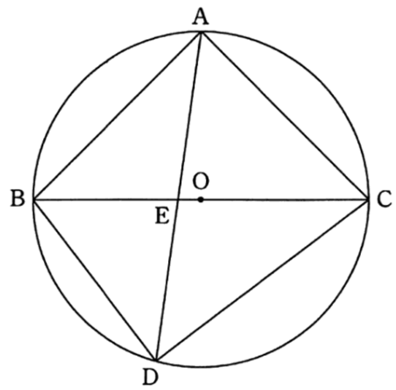
AB＝AD のとき△ABD において∠BAD＝90°　より∠ABD＝45°

このとき△EDC は∠ECD＝∠CDE＝45°　より

EC＝ED の直角二等辺三角形になるから AB＝AD＝DC＝$\sqrt{2}$ EC

【問 4】

図にように，半径 4 cm の円 O の周上にある 3 点 A，B，C を頂点とする三角形 ABC がある。線分 BC は円 O の直径で，AB＝AC である。円 O の周上の点 D は，線分 BC に対して点 A の反対側にあり，線分 AD と線分 BC との交点を E とする。次の1～3の問いに答えなさい。



（秋田県　2007 年度）

問1．AD＝CD のとき，∠BCD の大きさを求めなさい。

問2．BD＝4 cm のとき，線分 ED の長さは線分 BE の長さの何倍か，求めなさい。

問3．点 E が線分 BO の中点とするとき，三角形 ADC の面積を求めなさい。

解答欄

問1	°
問2	倍
問3	cm^2

解答

問1　$\dfrac{45}{2}$ °

問2　$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 倍

問3　$\dfrac{96}{5}$ cm^2

解説

問3

E が BO の中点のとき

△AOE で三平方の定理より

$AE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

△ABE と△CDE は 2 組の角が等しいので

相似になるから

$AE:CE=BE:DE$

$2\sqrt{5}:6=2:DE$

$DE=\dfrac{6\times 2}{2\sqrt{5}}$

$=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4=16$

$EC:BC=6:8=3:4$ より

$\triangle AEC=\dfrac{3}{4}\triangle ABC=\dfrac{3}{4}\times 16=12$

$AE:AD=2\sqrt{5}:\left(2\sqrt{5}+\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)=5:8$ より

$\triangle ADC=\dfrac{8}{5}\triangle AEC=\dfrac{8}{5}\times 12=\dfrac{96}{5}$ cm^2

【問 5】

図 1 のように長方形 ABCD 上に点 P と点 Q がある。図 2 は，図 1 に示した長方形 ABCD を，点 P と点 Q が重なるように 1 回だけ折りできた折り目を線分 RS としたものである。

解答欄に示した図をもとにして，線分 RS を，定規とコンパスを用いて作図し，点 R, S の位置を示す文字 R, S も書け。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

（東京都　2007 年度）

図 1

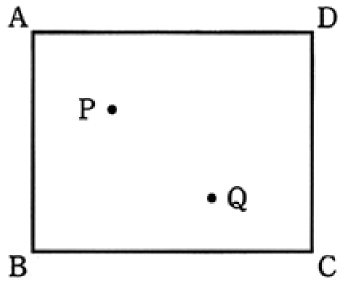
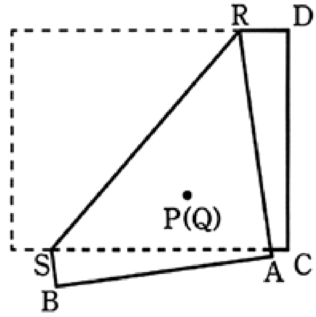
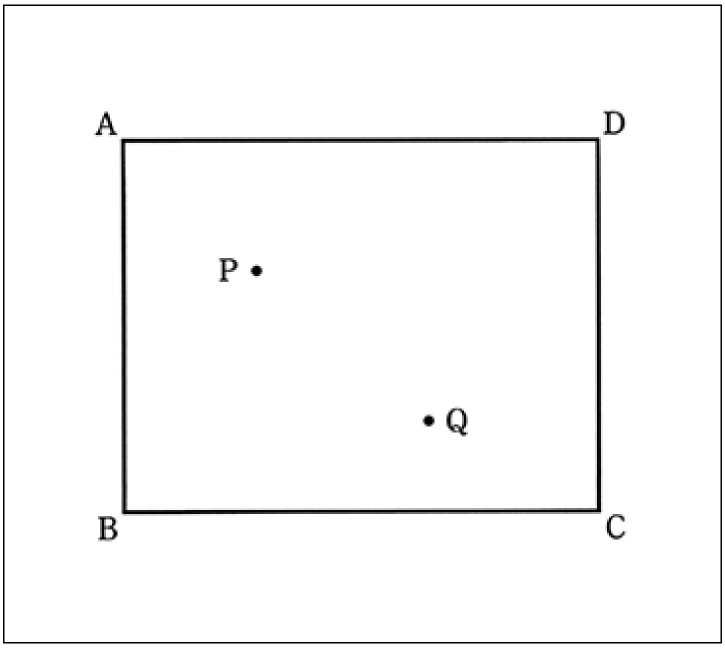


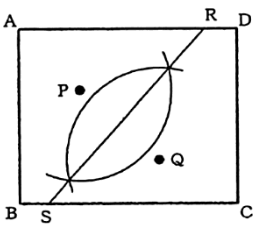
図 2



解答欄



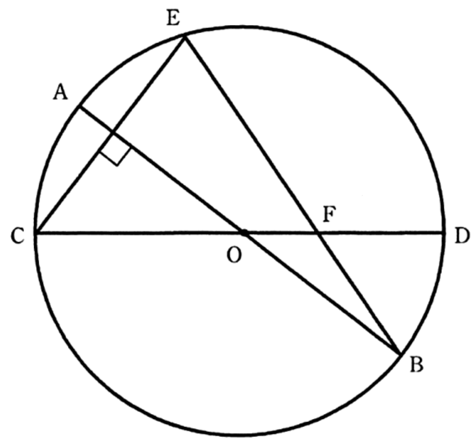
解答



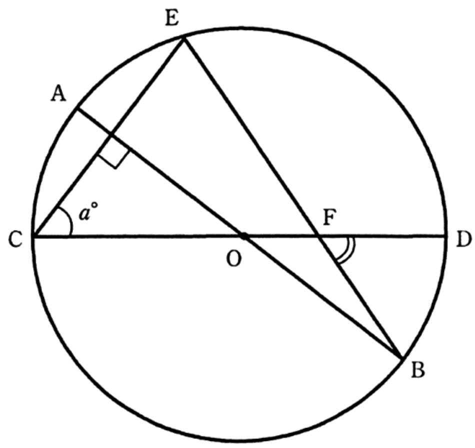
【問 6】

図のように，線分 AB，CD を直径とする円 O がある。点 C から線分 AB にひいた垂線と円 O との交点を E とし，線分 BE と CD の交点を F とする。円 O の半径が 5 cm，CE＝6 cm のとき，次の問いに答えなさい。

（富山県　2007 年度）



問1．BE の長さを求めなさい。



問2．∠ECD＝a°　とするとき，∠DFB の大きさを a を使って表しなさい。

問3．△OBF の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	（　　　　　　　）度
問3	cm^2

解答

問1　$3\sqrt{10}$ cm

問2　$\left(135-\dfrac{3}{2}a\right)$度

問3　$\dfrac{75}{26}$ cm^2

解説

問3

△CEDで

直径に対する円周角より∠CED＝90°

よって三平方の定理よりDE＝$\sqrt{10^2-6^2}$ ＝8

△CED＝$\dfrac{1}{2}$×6×8＝24

△OED＝$\dfrac{1}{2}$△CED＝$\dfrac{24}{2}$＝12

同位角が等しいのでAB∥ED

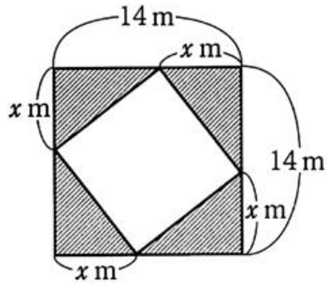
よってOF:FD＝BF:FE＝OB:ED＝5:8

△OEF＝$\dfrac{5}{13}$△OED＝$\dfrac{5}{13}$×12＝$\dfrac{60}{13}$

△OBF＝$\dfrac{5}{8}$△OEF＝$\dfrac{5}{8}$×$\dfrac{60}{13}$＝$\dfrac{75}{26}$

【問 7】

図 1 のような 1 辺の長さが 14 m の正方形の花だんがある。斜線部分の，4 つの合同な直角三角形の土地には赤い花を植え，残りの四角形の土地には黄色い花を植える。このとき，黄色い花を植える土地の面積を 100 m^2 にすることを，次郎さんとよし子さんはそれぞれ考えた。

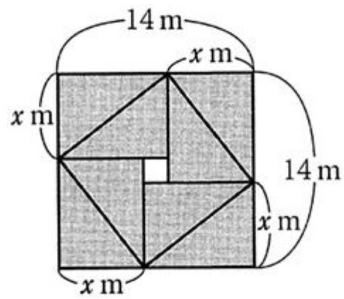


（岐阜県 2007 年度）

問1. 斜線部分の土地の面積を何 m^2 にすればよいかを求めなさい。

問2. 図 1 の直角三角形の土地の，直角をはさむ 2 辺のうち短い方の辺の長さを x m として，次郎さんとよし子さんは，斜線部分の土地の面積を使って，それぞれ次のように考えて方程式をつくった。ア，ウ，エ，カには x の 1 次式を，イ，オ，キには数をそれぞれあてはまるように書きなさい。

> 次郎さんの考え
>
> 図 1 の 1 つの直角三角形の面積を x を使った式で表すと，$\frac{1}{2}x(\boxed{\text{ア}})$ m^2 であるから，x についての 2 次方程式をつくると，$\frac{1}{2}x(\boxed{\text{ア}}) = \boxed{\text{イ}}$ となる。左辺を展開して，$x^2+bx+c=0$ の形にした 2 次方程式の左辺を因数分解することによって，$(\boxed{\text{ウ}})(\boxed{\text{エ}})=0$ となる。

> よし子さんの考え
>
> 1 辺の長さが 14 m の正方形の中に，図 1 の直角三角形と合同な直角三角形を，図 2 の黒く塗った部分のように 8 つしきつめる。この黒く塗った部分の面積は，図 1 の斜線部分の面積の 2 倍だから，図 2 のまん中の白い正方形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ m^2 である。
> また，この白い正方形の 1 辺の長さを x を使った式で表すと，$(\boxed{\text{カ}})$ m であるから，x についての 1 次方程式をつくると
>
> $\boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{キ}}$ となる。
>
> 
>

問3. 図 1 の直角三角形の土地の，直角をはさむ 2 辺のうち短い方の辺の長さを何 m にすればよいかを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">m^2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">問2</td><td>ア</td><td></td><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>ウ</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>エ</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>オ</td><td></td><td>カ</td><td></td></tr>
<tr><td>キ</td><td></td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">m</td></tr>
</table>

解答
問1　$96\mathrm{m}^2$
問2
ア　$14-x$
イ　24
ウ,エ　$x-6,\ x-8$　または　$x-8,\ x-6$
オ　4
カ　$14-2x$
キ　2
問3　6m
解説
問1
正方形の面積から白い土地の面積をひくとよいので $14\times14-100=96\mathrm{m}^2$
問2
(次郎さんの考え)
合同な直角三角形の直角をはさむ 2 辺は x m と $14-x$ m　だから
その面積は $\frac{1}{2}\times x\times(14-x)=\frac{1}{2}x(14-x)$ m^2
この 1 つ分の面積は $96\div4=24$
よって $\frac{1}{2}x(14-x)=24$
$x^2-14x+48=0$
$(x-6)(x-8)=0$
(よし子さんの考え)
まん中の白い正方形の面積は $100-96=4$ より
その正方形の 1 辺の長さは 2
x を用いると $14-2x$ m　と表せるので
$14-2x=2$

【問 8】

次のアからエまでの中から正しいものをすべて選んで，そのかな符号を書け。

（愛知県 2007 年度 A）

ア $\sqrt{4}$ は ± 2 である。

イ 面積 20 cm^2 の長方形で，縦の長さを x cm としたときの横の長さを y cm とすると，y は x に反比例する。

ウ 1 つの直線に平行な 2 つの平面は平行である。

エ a が負の整数ならば，$-a$ は正の整数である。

解答欄

解答
イ，エ
解説
ア $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ より正しくない。
イ $xy=20$ より $y=\dfrac{20}{x}$ だから y は x に反比例するので正しい。
ウ 1 つの直線に平行な 2 つの平面は交わることもあるので正しくない。
エ a が負の整数のとき $-a=(-1)\times a$ より a に -1 をかけると符号が逆になるので $-a$ は正の整数だから正しい。
したがって正しいのはイとエ

【問 9】

次の(1), (2)のことがらについて, その逆が正しいものにはアを, そうでないものにはイをそれぞれ書きなさい。

（大阪府 2007 年度 前期）

(1) 四角形 ABCD が長方形ならば四角形 ABCD の 2 本の対角線の長さが等しい。

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形ならば四角形 ABCD の 2 本の対角線がそれぞれの中点で交わる。

解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1) イ

(2) ア

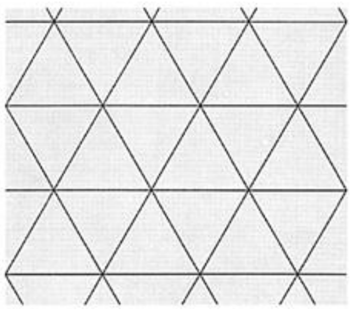
【問 10】

合同な多角形をすき間や重なりがないように並べ，平面を敷きつめることを考える。ただし，隣り合う多角形は，頂点を集めて並べるものとする。例えば，正三角形では図 1 のように平面を敷きつめることができる。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県 2007 年度）

図 1



問1. 合同な正多角形で，平面を敷きつめることができるものや，できないものについて，次のような表をつくって考えた。

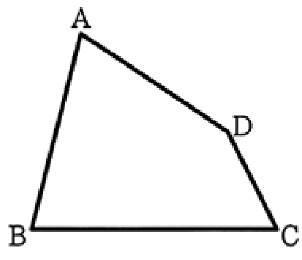
正多角形	正三角形	正方形	正五角形	正六角形
1 つの内角の大きさ	60°	90°	ア	イ

(1) 表の空欄ア，イにあてはまる角度を答えなさい。

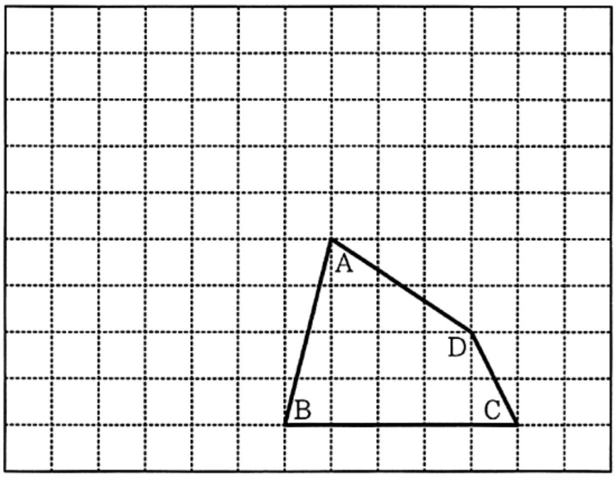
(2) 表の正多角形の中で，平面を敷きつめることができないものを選んで書き，そのように判断した理由を根拠を示して説明しなさい。

問2. 図 2 のような四角形 ABCD と合同な四角形で，平面を敷きつめることができる。解答欄の四角形 ABCD の頂点 A のまわりに，合同な四角形をどのように並べればよいか，頂点 A のまわりを合同な四角形で敷きつめた図を解答欄にかきなさい。ただし，長さの等しい辺をそろえて並べるものとする。

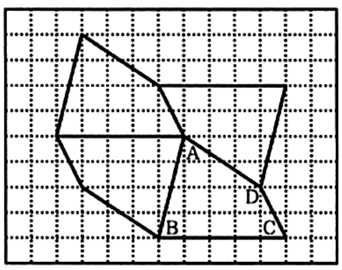
図 2



解答欄

問1	(1)	ア	度	イ	度
	(2)	正多角形			
		理由			
問2					

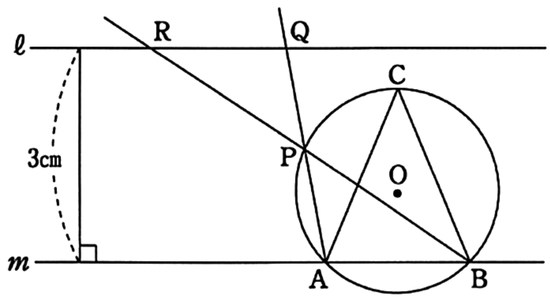
解答
問1
ア　108°
イ　120°
正五角形
理由
360°　を 1 つの内角の大きさで割るとその値が自然数になることが必要であが
正五角形の場合 108°　で割るとその値は自然数にならないから。
問2



解説
問1
(1)
正五角形の 1 つの内角の大きさは 180°×(5－2)÷5＝108°
正六角形の 1 つの内角の大きさは 180°×(6－2)÷6＝120°

【問 11】

図の 2 直線ℓ，m は平行で，その間隔は 3 cm である。円 O は半径$\sqrt{2}$ cm の円であり，2 点 A，B は直線 m と円 O との交点である。また，点 C は円 O の周上にあり，CA＝CB，∠ACB＝45°である。点 P を，点 B を含まない方の$\overset{\frown}{AC}$上を動く点とし，直線ℓ と直線 AP，BP との交点をそれぞれ Q，R とする。ただし，点 P は点 A と一致しないものとする。各問いに答えよ。



（奈良県 2007 年度）

問1．∠ABP＝25°のとき，∠PQR の大きさを求めよ。

問2．線分 BP が円 O の直径となるとき，点 B を含まない方の$\overset{\frown}{PC}$の長さを求めよ。ただし，円周率は π とする。

問3．QR＝AB となるとき，点 P を通り，直線 m に平行な直線をひく。この直線と円 O との交点のうち，点 P 以外の交点を S とする。線分 PS の長さを求めよ。

解答欄

問1		度
問2		cm
問3		cm

解答
問1　110°
問2　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$　cm
問3　$\sqrt{7}$ cm
解説
問2
線分 BP が円 O の直径となるとき$\angle BOP=180^\circ$　より
$\angle BAP=\dfrac{1}{2}\angle BOP=90^\circ$
よって$\angle ABP=45^\circ$
$\triangle ABC$ は $CA=CB$ の二等辺三角形だから
$\angle CBA=(180^\circ-45^\circ)\div 2=\dfrac{135}{2}^\circ$
　$\angle PBC=\angle CBA-\angle ABP=\dfrac{135}{2}^\circ-45^\circ=\dfrac{45}{2}^\circ$
円周角の定理より$\angle POC=2\angle PBC=2\times\dfrac{45}{2}^\circ=45^\circ$
よって$\overset{\frown}{PC}=2\pi\times\sqrt{2}\times\dfrac{45}{360}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$　cm
問3
OA, OB を結ぶ。
$\angle AOB=2\angle ACB=2\times 45^\circ=90^\circ$　より
$\triangle OAB=OA=OB=\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形
よって$\angle OAB=45^\circ$
O から AB に垂線 OH をひく。
$\angle OHA=90^\circ$　, $\angle OAH=45^\circ$　より$\triangle OAH$ も直角二等辺三角形になるから
$OH:OA=1:\sqrt{2}$
$OH:\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$
$\sqrt{2}\,OH=\sqrt{2}$
$OH=1$
$\triangle PAB$ と$\triangle PQR$ において
$AB=QR$…①
平行線の錯角より
$\angle PAB=\angle PQR$…②
同じく$\angle PBA=\angle PRQ$…③
①, ②, ③より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
$\triangle PAB\equiv\triangle PQR$
よって $PA=PQ$
O から PS, 直線ℓ にひいた垂線をそれぞれ OK, OT とすると
$PS\parallel$直線ℓ より $HK:KT=AP:PQ=1:1$
よって $HK=\dfrac{1}{2}\times 3=\dfrac{3}{2}$
$OK=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$
$\triangle OPK$ において
三平方の定理より $PK=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
$\triangle OPS$ は二等辺三角形より $PS=2PK=2\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$ cm