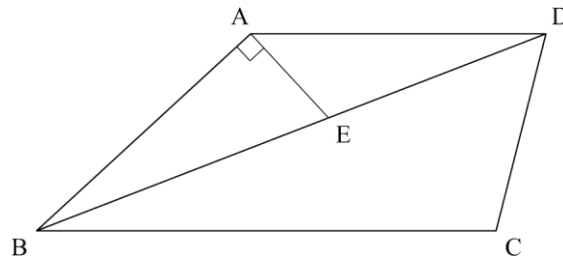


3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2019 年度出題】

【問 1】

下の図のように、 $AB=AD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC$ が鋭角である台形 $ABCD$ があります。対角線 BD 上に点 E を， $\angle BAE=90^\circ$ となるようにとります。



次の問いに答えなさい。

(北海道 2019 年度)

問 1 $\angle ADB=20^\circ$ ， $\angle BCD=100^\circ$ のとき， $\angle BDC$ の大きさを求めなさい。

問 2 頂点 A から辺 BC に垂線をひき，対角線 BD ，辺 BC との交点をそれぞれ F ， G とします。このとき， $\triangle ABF \equiv \triangle ADE$ を証明しなさい。

解答欄

問 1	度
問 2	〔証明〕

解答

問 1 60 度

問 2

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle ADE$ において

仮定より, $AB=AD$ …①

①より, $\triangle ABD$ は二等辺三角形なので

$\angle ABF = \angle ADE$ …②

また, $\angle AGB = \angle GAD = 90^\circ$ であり

$\angle BAF = 90^\circ - \angle EAF$, $\angle DAE = 90^\circ - \angle EAF$ …③

よって, $\angle BAF = \angle DAE$ …④

①, ②, ④より

一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle ABF \equiv \triangle ADE$

解説

問 1

$AD \parallel BC$ より, 平行線の錯角は等しいから, $\angle DBC = \angle ADB = 20^\circ$

$\triangle BCD$ の内角の和は 180° だから, $\angle BDC + 20^\circ + 100^\circ = 180^\circ$ $\angle$

$\angle BDC = 60^\circ$

問 2

$\triangle ABF$ と $\triangle ADE$ において, 仮定より, $AB=AD$ …①

①より $\triangle ABD$ は二等辺三角形なので, $\angle ABF = \angle ADE$ …②

また, 仮定より, $\angle AGB = 90^\circ$ で, 平行線の錯角は等しいから,

$\angle AGB = \angle GAD = 90^\circ$ がいえるので

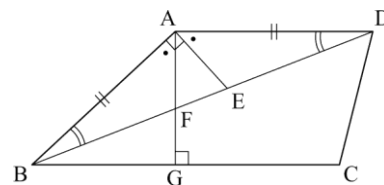
$\angle BAF = 90^\circ - \angle EAF$, $\angle DAE = 90^\circ - \angle EAF$ …③

よって, $\angle BAF = \angle DAE$ …④

①, ②, ④より

一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

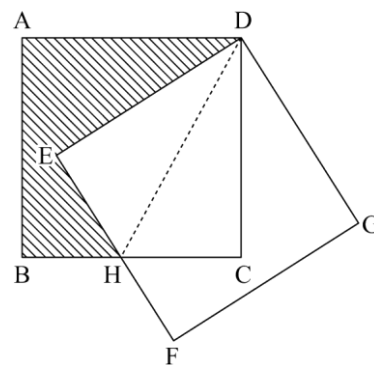
$\triangle ABF \equiv \triangle ADE$



【問 2】

右の図のように，正方形 $ABCD$ を点 D を中心として回転移動させ，正方形 $DEFG$ をつくる。 BC と EF との交点を H とするとき，次の (1)，(2) に答えなさい。

(青森県 2019 年度)



(1) $\triangle DEH$ と $\triangle DCH$ が合同になることを証明しなさい。

(2) $BH : HC = 2 : 3$ のとき，斜線部分の面積が 20 cm^2 であった。このとき，正方形 $ABCD$ の 1 辺の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔証明〕	
(2)	cm	

解答

(1)

〔証明〕

$\triangle DEH$ と $\triangle DCH$ について

DH が共通…①

四角形 ABCD, 四角形 DEFG は正方形だから

$\angle DEH = \angle DCH = 90^\circ$ …②

$DE = DC$ …③

①, ②, ③より

直角三角形で斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから

$\triangle DEH \equiv \triangle DCH$

(2) $5\sqrt{2}$ cm

解説

(1)

正方形はすべての辺が等しく, すべての角が 90° であることを利用して, 2つの三角形が直角三角形の合同条件をみたすことを示す。

(2)

BH : HC = 2 : 3 だから, $BH = 2x$ cm, $HC = 3x$ cm とおくと, 正方形 ABCD の1辺の長さは,

$2x + 3x = 5x$ (cm) $\triangle DCH$ の面積は, $\frac{1}{2} \times 3x \times 5x = \frac{15}{2}x^2$ (cm²)

(1)より $\triangle DEH \equiv \triangle DCH$ だから, 斜線部分の面積は, 正方形 ABCD の面積から $\triangle DCH$ の面積2つ分をひいた値になる。斜線部分の面積に着目して方程式をつくると,

$(5x)^2 - \frac{15}{2}x^2 \times 2 = 20$ $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$ $x > 0$ だから, $x = \sqrt{2}$

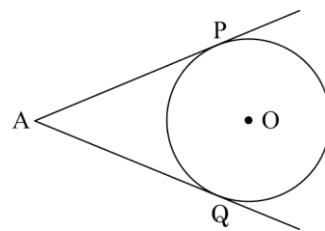
よって, 正方形 ABCD の1辺の長さは, $5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (cm)

【問 3】

図 1 のように、円 O の外部の点 A から、円 O に接線を 2 本ひき、接点を点 P , Q とする。次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(秋田県 2019 年度)

図 1



問 1 健太さんと詩織さんは、円 O の接線 AP , AQ について考えた。

- (1) 健太さんは、接点 P , Q を作図する手順を説明した。[健太さんの説明 1] が正しくなるように、㉑, ㉒, ㉓にあてはまるものを、下のア～ウからそれぞれ 1 つずつ選んで記号を書きなさい。

[健太さんの説明 1]

図 2

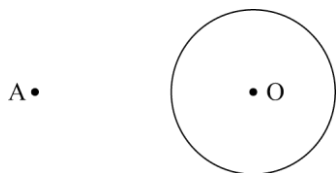


図 3

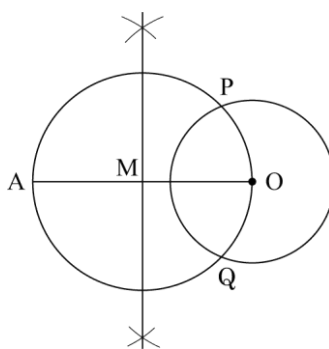


図 2 において、 → → の手順で作図すると、図 3 のように接点 P , Q を作図することができます。



ア 線分 AO の垂直二等分線をひき、線分 AO との交点を点 M とする。

イ 点 M を中心として、線分 AM を半径とする円をかき、円 O との交点をそれぞれ点 P , Q とする。

ウ 線分 AO をひく。

(2) [健太さんの説明 1] を聞いた詩織さんは、線分 AP , AQ の長さが等しい理由を説明した。

[詩織さんの説明] が正しくなるように、㉔に [証明] の続きを書き、完成させなさい。

[詩織さんの説明]

図 4 のように、図 1 の点 O と点 A , 点 O と点 P ,
点 O と点 Q をそれぞれ結ぶと, $\triangle APO \equiv \triangle AQO$ と
なることが証明できます。

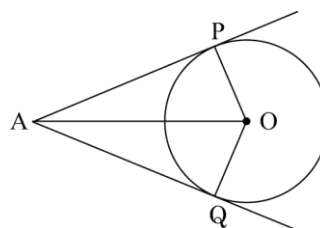
[証明]

$\triangle APO$ と $\triangle AQO$ において

㉔

合同な図形の対応する辺は等しいから
 $AP=AQ$ となります。

図 4



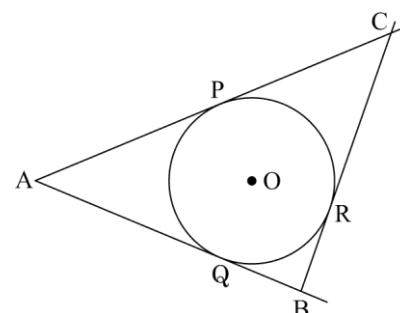
(3) [詩織さんの説明] を聞いた健太さんは、図 5 のように、

線分 AQ を Q の方向に延長した直線上に点 B をとり、点 B
から点 R を接点とする接線 BR をひいた。接線 AP と接線
 BR の交点を点 C とし、この図について考えたことを説明
した。[健太さんの説明 2] が正しくなるように、㉕にあ
てはまるものを下のア～エからすべて選んで記号を書きな
さい。

[健太さんの説明 2]

図 5 のように、線分 AQ を Q の方向に延長した直線上に点 B をとるとき、
必ず

㉕

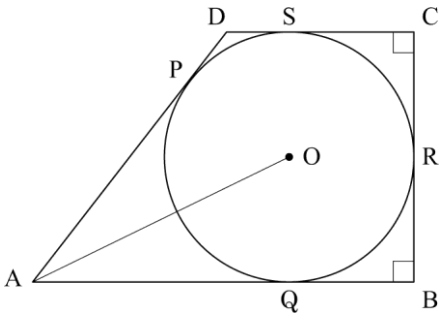


- ア $AB=BC$ となります。
- イ $BO \perp QR$ となります。
- ウ $AC \parallel QR$ となります。
- エ 4 点 C, P, O, R は、1 つの円周上にあります。

問2 図6のような、四角形 ABCD があり、辺 DA, AB, BC,

図6

CD は、それぞれ点 P, Q, R, S で円 O に接している。 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $BC = 12\text{ cm}$, $DS = 3\text{ cm}$ のとき、線分 AO の長さを求めなさい。



解答欄

問 1	(1)	㉑		㉒		㉓	
	(2)	㉔					
	(3)	㉕					
問 2							

解答

問 1

(1)

㉔ウ

㉔ア

㉔イ

(2) ㉔

AP, AQ は円 O の接線であるから,

$\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ \dots ①$

AO は共通…②

円 O の半径であるから

$OP = OQ \dots ③$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$\triangle APO \equiv \triangle AQO$

(3)

㉔イ, エ

問 2 $6\sqrt{5}$ cm

解説

問 1

(1)

図 3 より, 線分 AO の中点を中心とする半径 AM の円をかいていることがわかる。その手順になるように選択肢を選べばよい。まず, 線分 AO をひく。次に, 線分 AO の垂直二等分線をひき, 線分 AO との交点を M とする。最後に, 点 M を中心として, 線分 AM を半径とする円をかき, 円 O との 2 つの交点を点 P, Q とすればよい。よって, 手順はウ→ア→イである。

(2)

円の接線は, その接点を通る円の半径に垂直だから $\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ \dots ①$

$\triangle APO$ と $\triangle AQO$ において, 共通な辺だから $AO = AO \dots ②$

円 O の半径だから $OP = OQ \dots ③$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$\triangle APO \equiv \triangle AQO$

(3)

ア (2)と同様にして, $\triangle BQO \equiv \triangle BRO$, $\triangle CRO \equiv \triangle CPO$ となることがわかる。 $AB = AQ + BQ$, $BC = CR + BR$ で $BQ = BR$ であることはわかるが, $AQ = CR$ とは限らないので, 必ず $AB = BC$ とはならない。

イ 点 Q と点 R を結び, 線分 BO との交点を H とすると, $\triangle BRQ$ は $BQ = BR$ の二等辺三角形で, $\angle QBO = \angle RBO$ だから, 線分 BH は辺 QR と垂直に交わる。よって, 必ず $BO \perp QR$ となる。

ウ 必ずしも $\triangle BRQ \sim \triangle BCA$ であるとはいえないから $AC \parallel QR$ となるとは限らない。

エ $\angle CPO = 90^\circ$ より, 点 P は OC を直径とする円周上にある。同様に, 点 R も OC を直径とする円周上にある。よって, 必ず 4 点 C, P, O, R は, 1 つの円周上にある。

問 2

点 P, D, S, R, Q と点 O を結ぶ。四角形 ORCS は 4 つの角がすべて 90° で等しく, $CS = CR$ だから正方形である。同様に, 四角形 OQBR も正方形である。よって, $OS = RC = 12 \div 2 = 6(\text{cm})$ だから円 O は半径が 6cm である。 $\angle DPO = \angle OPA = 90^\circ$, 四角形 AQSD の内角の和は 360° だから, $\angle PDS + \angle PAQ = 180^\circ$, $\angle PDO + \angle PAO = 90^\circ$ $\triangle DOP$, $\triangle OAP$ の内角の和は 180° だから, $\angle PDO + \angle POD = 90^\circ$, $\angle PAO + \angle POA = 90^\circ$ より, $\angle POD = \angle PAO$ となり, 2 組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle DOP \sim \triangle OAP$ より, $DP : OP = OP : AP$, $DP = DS = 3\text{cm}$, $OP = 6\text{cm}$ だから,

$3 : 6 = 6 : AP$ $AP = 12\text{cm}$ $\triangle OAP$ において, 三平方の定理より $AO = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}(\text{cm})$

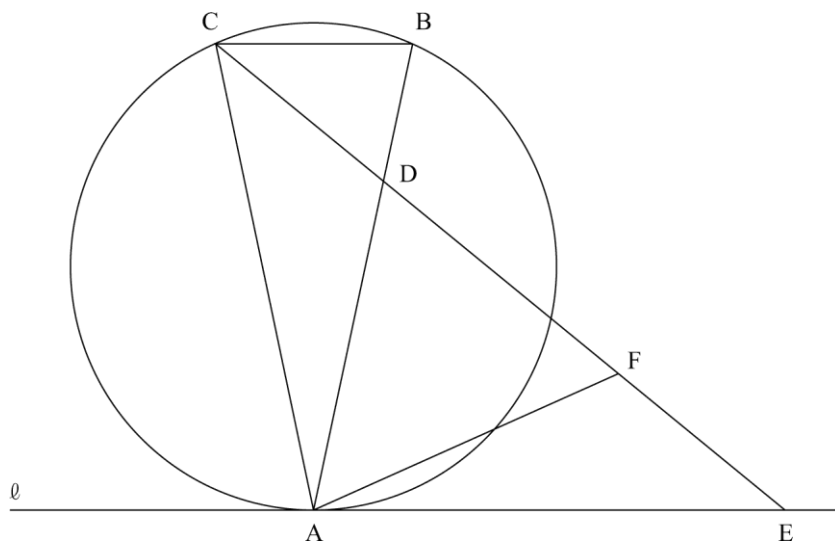
【問 4】

下の図 1 のように、円周上の 3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ があり A を通る接線 ℓ と辺 BC は平行である。ただし, $AB > BC$ である。また, $\angle ACB$ の二等分線と辺 AB, ℓ との交点をそれぞれ D, E とし, 線分 CE 上に $CD = EF$ となる点 F をとり A と結ぶ。

このとき, 次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(福島県 2019 年度)

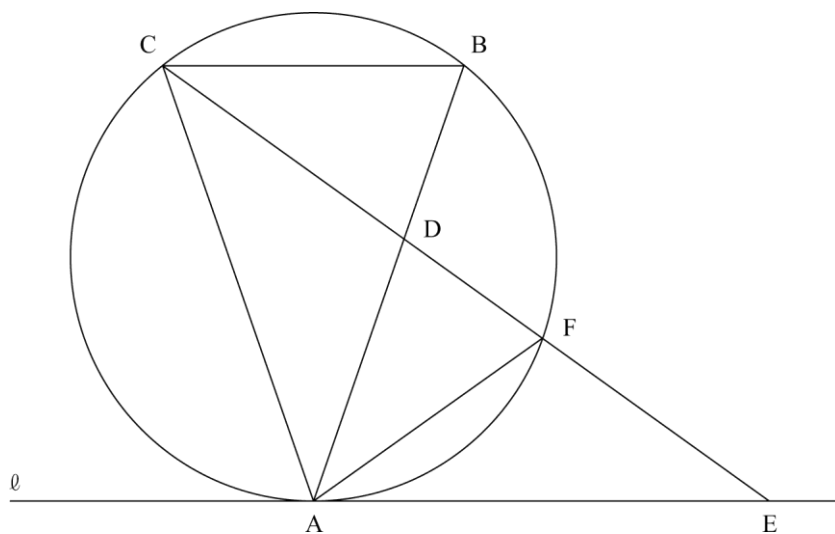
図 1



問 1 $\angle AFD = \angle ADF$ となることを証明しなさい。

問 2 2 点 B, C の位置によって, 点 F の位置が変わる。下の図 2 のように, F が円周上にあるとき, $\angle ABC$ の大きさを求めなさい。

図 2



解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	度	

解答

問 1

例 1

〔証明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle AED$ において

仮定から $CD=EF\cdots①$

また $FC=CD+DF\cdots②$

$DE=FE+DF\cdots③$

①, ②, ③より $FC=DE\cdots④$

仮定から $\angle ACF=\angle BCF\cdots⑤$

平行線の錯角は等しいから

$\angle BCF=\angle AED\cdots⑥$

⑤, ⑥より $\angle ACF=\angle AED\cdots⑦$

⑦より $\triangle AEC$ は 2 つの角が等しいので

二等辺三角形であるから $AC=AE\cdots⑧$

④, ⑦, ⑧より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACF\equiv\triangle AED$

したがって $\angle AFD=\angle ADF$

例 2

$\triangle ACD$ と $\triangle AEF$ において

仮定から $CD=EF\cdots①$

仮定から $\angle ACD=\angle BCD\cdots②$

平行線の錯角は等しいから

$\angle BCD=\angle AEF\cdots③$

②, ③より $\angle ACD=\angle AEF\cdots④$

④より $\triangle AEC$ は 2 つの角が等しいので

二等辺三角形であるから $AC=AE\cdots⑤$

①, ④, ⑤より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ACD\equiv\triangle AEF$

対応する辺は等しいので $AD=AF$

したがって $\triangle ADF$ は二等辺三角形であるから

$\angle AFD=\angle ADF$

問 2 72 度

解説

問 1

平行線の錯角が等しいことや二等辺三角形の性質を利用して, 2 つの三角形が合同であることを示し, $\angle AFD=\angle ADF$ が成り立つことを導く。

2 つの三角形の合同については, $\angle AFD$ と $\angle ADF$ をそれぞれ角にもつ $\triangle ACF$ と $\triangle AED$ に着目してもよいし, $\triangle ACD$ と $\triangle AEF$ の合同から導いてもよい。

問 2

点 A と円の中心とを結ぶ直線を延長し, BC との交点を G とする。円の接線は接点を通る半径に垂直だから, $\angle EAG=90^\circ$ CB//AE で, 平行線の錯角は等しいから, $\angle AGC=\angle EAG=90^\circ$

円の中心から弦にひいた垂線は弦を 2 等分するから, $CG=BG$

よって, $\triangle ACG$ と $\triangle ABG$ は, $CG=BG$, $\angle AGC=\angle AGB=90^\circ$, $AG=AG$ (共通)で, 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから, $\triangle ACG\equiv\triangle ABG$ よって, 対応する角は等しいから, $\angle ACG=\angle ABG$ となる。

ここで, $\angle BCD=x^\circ$ とすると, $\angle ACD=\angle BCD=x^\circ$

$\angle ABG=\angle ACG=\angle ACD+\angle BCD=x^\circ+x^\circ=2x^\circ$

また, $\widehat{AC}$ に対する円周角だから, $\angle AFC=\angle ABC=2x^\circ$

問 1 より, $\angle ADF=\angle AFD=2x^\circ$

さらに, 対頂角は等しいから, $\angle BDC=\angle ADF=2x^\circ$

ここで, $\triangle BCD$ の内角の和に着目すると, $\angle BCD+\angle DBC+\angle BDC=x^\circ+2x^\circ+2x^\circ=5x^\circ$

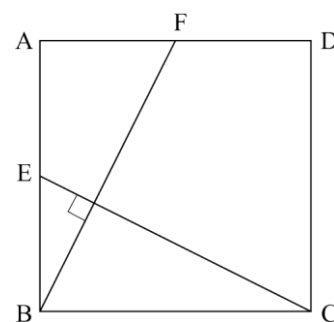
よって, $5x^\circ=180^\circ$ より, $x=36$

$\angle ABC=2x^\circ=2\times 36^\circ=72^\circ$

【問 5】

右の図のような正方形 $ABCD$ があり，辺 AB の中点を E とする。頂点 B から線分 EC に引いた垂線の延長と辺 AD との交点を F とする。このとき， $\triangle ABF \equiv \triangle BCE$ であることを証明しなさい。

(新潟県 2019 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABF$ と $\triangle BCE$ において

正方形 $ABCD$ だから

$AB=BC$ …①

$\angle BAF = \angle CBE = 90^\circ$ …②

また， $\angle ABF = \angle ABC - \angle FBC$

$= 90^\circ - \angle FBC$ …③

$BF \perp CE$ だから

$\angle BCE = 90^\circ - \angle FBC$ …④

③，④より， $\angle ABF = \angle BCE$ …⑤

よって，①，②，⑤より

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABF \equiv \triangle BCE$

解説

$\triangle ABF$ と $\triangle BCE$ において，正方形 $ABCD$ の 4 つの辺はすべて等しいから $AB=BC$ ……①

正方形 $ABCD$ の 4 つの角はすべて等しいから $\angle BAF = \angle CBE = 90^\circ$ ……②

$\angle ABF = \angle ABC - \angle FBC = 90^\circ - \angle FBC$ ……③

$BF \perp CE$ より， $\angle BCE = 90^\circ - \angle FBC$ ……④

③，④より， $\angle ABF = \angle BCE$ ……⑤

①，②，⑤より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABF \equiv \triangle BCE$

【問 6】

右の図 1 のように、円 O の周上に点 A, B, C, D があり、 $\triangle ABC$ は正三角形である。

また、線分 BD 上に、 $BE=CD$ となる点 E をとる。

このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2019 年度)

問 1 $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ を証明しなさい。

問 2 右の図 2 のように、線分 AE の延長と円 O との交点を F とし、 $AD=2\text{ cm}$ 、 $CD=4\text{ cm}$ とするとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\triangle BFE$ の面積を求めなさい。

(2) 線分 BC の長さを求めなさい。

図 1

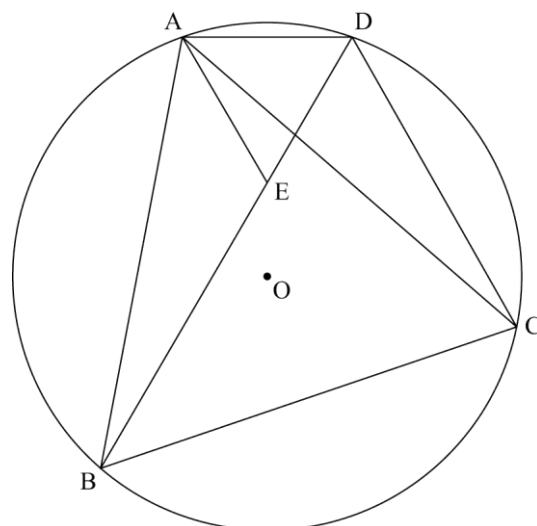
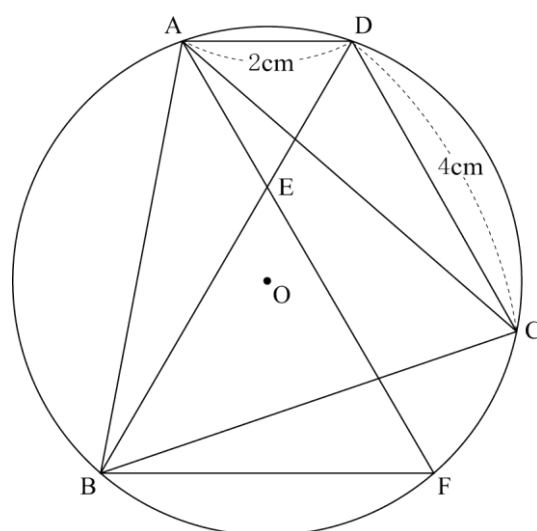


図 2



解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	(1)	cm ²
	(2)	cm

解答

問 1

〔証明〕

△ABE と△ACD において
正三角形の 3 つの辺は等しいから
AB＝AC…①
仮定より
BE＝CD…②
同じ弧に対する円周角は等しいから
∠ABE＝∠ACD…③
①，②，③より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABE≡△ACD

問 2

- (1) $4\sqrt{3}$ cm²
(2) $2\sqrt{7}$ cm

【問 7】

$AB=2\text{ cm}$, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle ACB=45^\circ$ である $\triangle ABC$ と、3 点 A , B , C を通り、点 O を中心とする円 O がある。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(山梨県 2019 年度)

問 1 3 点 A , B , O を頂点とする三角形において、 $\angle AOB$ の大きさを求めなさい。

問 2 図 1 のように、点 A から辺 BC に垂線をひき、その交点を H とするとき、線分 AH の長さを求めなさい。

問 3 円 O において、点 B を含まない $\widehat{AC}$ 上に、 $AB=DC$ となるように点 D をとる。

このとき、次の (1)～(3) に答えなさい。

(1) 図 2 のように、線分 AC と DB の交点を E とするとき、 $\triangle AEB \equiv \triangle DEC$ となることを証明しなさい。

(2) 4 点 A , B , C , D を頂点とする四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい。

(3) 点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}\text{cm}$ の球 O を考えるとき、4 点 A , B , C , D は、この球面上にある。

図 3 のように、球 O を平面 $ABCD$ と平行な平面で切ったとき、その切り口は円となり、その中心を P とする。

5 点 P , A , B , C , D を頂点とする四角錐の体積と球 O の体積の比が $1:4\pi$ であるとき、切り口の円 P の半径を求めなさい。

図 1

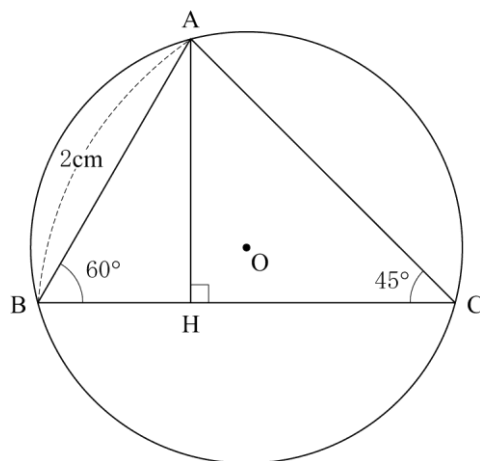


図 2

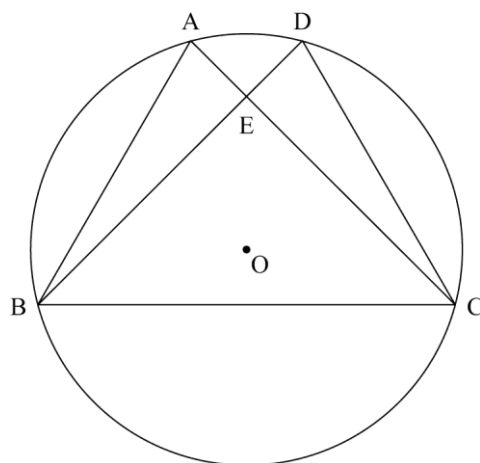
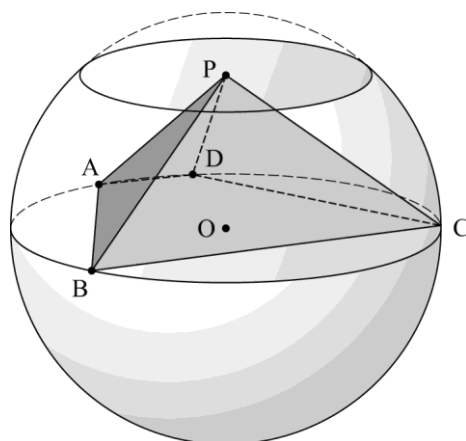


図 3



解答欄

問 1	度	
問 2	cm	
問 3	(1)	〔証明〕
	(2)	cm ²
	(3)	cm

解答

問 1 90 度

問 2 $\sqrt{3}$ cm

問 3

(1)

〔証明〕

$\triangle AEB$ と $\triangle DEC$ において

仮定より

$AB=DC \cdots \textcircled{1}$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$\angle BAE = \angle CDE \cdots \textcircled{2}$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$\angle ABE = \angle DCE \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AEB \equiv \triangle DEC$

(2) 3 cm²

(3) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ cm

解説

問 1

$\widehat{AB}$ について, 中心角は円周角の 2 倍だから, $\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

問 2

$\triangle ABH$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形だから, $AB : AH = 2 : \sqrt{3}$ $2 : AH = 2 : \sqrt{3}$ $AH = \sqrt{3}$ cm

問 3

(1)

仮定より $AB=DC$ が与えられているので, $\angle BAE = \angle CDE$, $\angle ABE = \angle DCE$ が言えればよく, これらは円周角の定理から導くことができる。

$\triangle AEB$ と $\triangle DEC$ において, 仮定より, $AB=DC \cdots \textcircled{1}$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから, $\angle BAE = \angle CDE \cdots \textcircled{2}$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから, $\angle ABE = \angle DCE \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AEB \equiv \triangle DEC$

(2)

(1) より, $\triangle AEB \equiv \triangle DEC$ だから $EB=EC$ で, $\angle ACB = 45^\circ$ だから, $\triangle EBC$ は $\angle BEC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。対頂角は等しいから, $\angle AED = \angle BEC = 90^\circ$, $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから, $\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$ なので, $\triangle AED$ も直角二等辺三角形である。

よって, $AC \perp DB$, $AE+EC=DE+EB$ より, $AC=DB$

$\triangle AHC$ は直角二等辺三角形だから, $AH : AC = 1 : \sqrt{2}$ 問 2 より $AH = \sqrt{3}$ cm だから,

$\sqrt{3} : AC = 1 : \sqrt{2}$ $AC = \sqrt{6}$ (cm)

したがって, 四角形 ABCD の面積は, $AC \times DB \div 2 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \div 2 = 3$ (cm²)

(3)

$OP = h$ cm とすると, (2) より, 四角形 ABCD の面積は 3cm² だから, 5 点 P, A, B, C, D を頂点

とする四角錐の体積は, $\frac{1}{3} \times 3 \times h = h$ (cm³) 球 O の体積は, $\frac{4}{3} \pi \times (\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi$ (cm³)

四角錐と球 O の体積の比は $1 : 4\pi$ だから, $h : \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi = 1 : 4\pi$ $h = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

円 P の周上の点を Q とすると, 線分 OQ は球 O の半径だから, $OQ = \sqrt{2}$ cm

$\triangle OPQ$ で三平方の定理より, $PQ^2 = OQ^2 - OP^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$

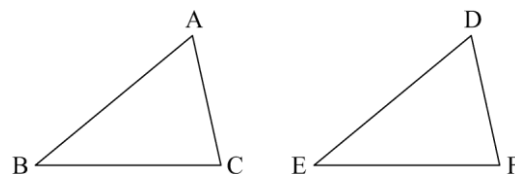
$PQ > 0$ より, $PQ = \frac{\sqrt{10}}{3}$ (cm)

【問 8】

図 1 の $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同であることを証明したい。

図 1

$AB=DE$, $BC=EF$ であることがわかっているとき, あと 1 つ, どのようなことをつけ加えれば合同であることが証明できるか。適切なものを次の **ア**～**エ** から 2 つ選び, 記号を書きなさい。



(長野県 2019 年度)

[**ア** $AC=DF$ **イ** $\angle A=\angle D$ **ウ** $\angle B=\angle E$ **エ** $\angle C=\angle F$]

解答欄

解答

ア, ウ

解説

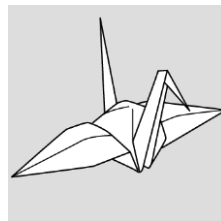
2 組の辺がそれぞれ等しいことがわかっているので

- ・ 残りの 1 組の辺が等しいと, 3 組の辺がそれぞれ等しくなる。→ つけ加えるのは $AC=DF$
 - ・ 辺 AB と BC のつくる角, 辺 DE と EF のつくる角が等しいと, 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しくなる。→ つけ加えるのは $\angle B=\angle E$
- よって, あてはまるのは **ア** と **ウ**

【問 9】

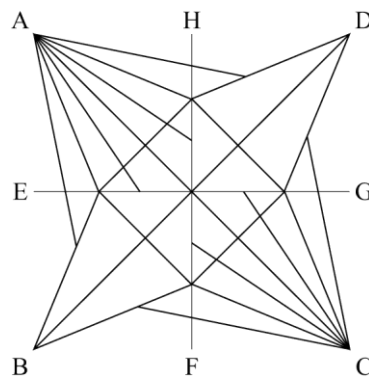
明さんは、正方形の紙で折った図 2 のような鶴を広げた。図 3 は、図 2 の鶴を広げた紙の折り目に線をかいたものである。ただし、一部の線を省略してある。また、点 A, B, C, D は正方形の頂点であり、点 E, F, G, H はそれぞれ線分 AB, BC, CD, DA の中点である。明さんは、図 3 を見て次のことに気がついた。

図 2



(長野県 2019 年度)

図 3



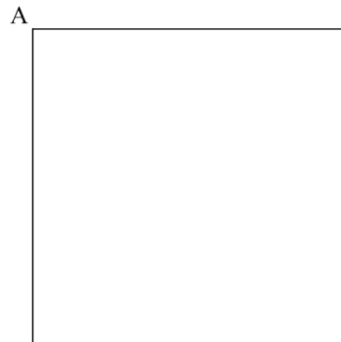
〔明さんが気づいたこと〕

紙の厚さを考えないとすると、点 A または点 C を通る線分で、 $\angle BAD$ と $\angle BCD$ がそれぞれ 8 等分され、点 B または点 D を通る線分で、 $\angle ABC$ と $\angle ADC$ がそれぞれ 4 等分されている。

- (1) 明さんが気づいたことをもとに考えると、図 3 のすべての線分でできた模様は、どのような模様とみることができるか、適切なものを次のア～エから 2 つ選び、記号を書きなさい。

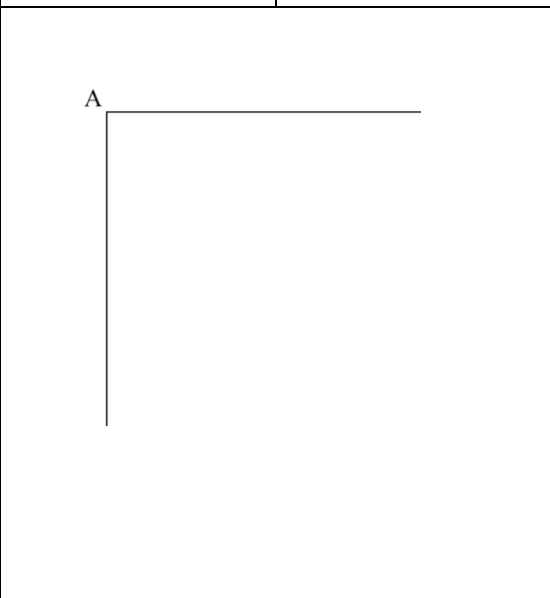
- ア HF を対称の軸とする線対称な模様
- イ BD を対称の軸とする線対称な模様
- ウ AC と BD の交点を回転の中心として時計回りに 90° 回転させるともとの模様にぴったり重なる模様
- エ AC と BD の交点を回転の中心として 180° 回転させるともとの模様にぴったり重なる模様

図 4



- (2) 図 4 は線分 AB と AD の一部を表したものである。図 4 に、半直線 AC を定規とコンパスを使って作図しなさい。ただし、点 C を示す必要はない。また、作図に用いた線は消さないこと。

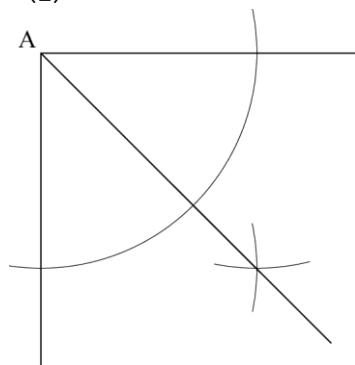
解答欄

(1)		
(2)		

解答

(1) イエ

(2)



解説

(1)

ア HF を折り目として折ったとき、模様はぴったり重ならない。よって、正しくない。

イ BD を折り目として折ったとき、模様はぴったり重なる。よって、正しい。

ウ AC と BD の交点を O とする。時計回りに 90° 回転させると、もとの正方形 OHAE の位置に正方形 OEBF がくるので、模様はぴったり重ならない。よって、正しくない。

エ 180° 回転させると、もとの正方形 OHAE の位置に正方形 OFCG がくるので、模様はぴったり重なる。よって、正しい。

(2)

半直線 AC は $\angle BAD$ の二等分線になる。

【問 10】

図で、四角形 ABCD は正方形であり、E は対角線 AC 上の点で、 $AE > EC$ である。また、F、G は四角形 DEFG が正方形となる点である。

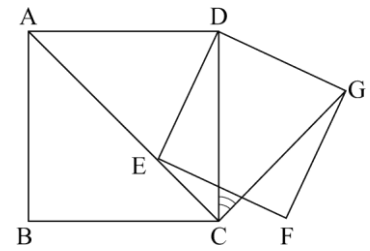
ただし、辺 EF と DC は交わるものとする。

このとき、 $\angle DCG$ の大きさを次のように求めた。

I , II にあてはまる数を書きなさい。

また、(a) にあてはまることばを書きなさい。

なお、2 か所の I には、同じ数があてはまる。



(愛知県 A 2019 年度)

$\triangle AED$ と $\triangle CGD$ で、

四角形 ABCD は正方形だから、 $AD = CD \cdots \textcircled{1}$

四角形 DEFG は正方形だから、 $ED = GD \cdots \textcircled{2}$

また、

$\angle ADE = \text{I}^\circ - \angle EDC$, $\angle CDG = \text{I}^\circ - \angle EDC$ より、

$\angle ADE = \angle CDG \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③から、(a) が、それぞれ等しいので、

$\triangle AED \equiv \triangle CGD$

合同な図形では、対応する角は、それぞれ等しいので、

$\angle DAE = \angle DCG$

したがって、 $\angle DCG = \text{II}^\circ$

解答欄

I (), a ()

II ()

解答

I (90), a (2 組の辺とその間の角)

II (45)

解説

$\triangle AED$ と $\triangle CGD$ で

正方形の定義より

$AD=CD$, $ED=GD$ がいえるので

あとは $AE=CG$ か $\angle ADE=\angle CDG$ のどちらかがいえればよい。

この場合, $\angle ADE$ と $\angle CDG$ はどちらも $90^\circ - \angle EDC$ で表される角だから, $\angle ADE=\angle CDG$ がいえる。

よって, 合同条件「2 組の辺とその間の角が, それぞれ等しい」がいえるので

$\triangle AED \equiv \triangle CGD$

合同な図形では, 対応する角は, それぞれ等しいので

$\angle DAE=\angle DCG$

$\triangle ACD$ は $AD=CD$ の直角二等辺三角形だから

$\angle DAE=(180^\circ - 90^\circ) \div 2=45^\circ$

よって $\angle DCG=45^\circ$

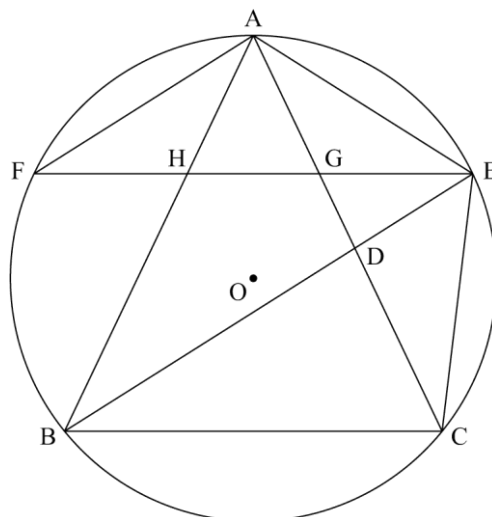
【問 11】

次の図のように、 $AB=AC$ となる $\triangle ABC$ と、3 点 A, B, C を通る円 O がある。 $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC 、円 O との交点をそれぞれ D, E とし、線分 AE と線分 CE をひく。点 A を通り線分 EB に平行な直線と円 O の交点を F とし、線分 FE と、辺 AB 、辺 AC との交点をそれぞれ H, G とする。

このとき、あとの各問いに答えなさい。

ただし、点 E は点 B と異なる点とする。

(三重県 2019 年度)



問 1 次の は、 $\triangle DBC \sim \triangle DEG$ であることを証明したものである。

(ア) ~ (ウ) に、それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

〔証明〕

$\triangle DBC$ と $\triangle DEG$ において、

対頂角は等しいから、 $\angle BDC =$ (ア) …①

線分 BE は $\angle ABC$ の二等分線だから、 $\angle DBC =$ (イ) …②

$EB \parallel AF$ より、錯角は等しいから、 (イ) $= \angle BAF$ …③

②、③より、 $\angle DBC = \angle BAF$ …④

弧 BF に対する円周角は等しいから、 $\angle BAF = \angle DEG$ …⑤

④、⑤より、 $\angle DBC = \angle DEG$ …⑥

①、⑥より、 (ウ) がそれぞれ等しいので、

$\triangle DBC \sim \triangle DEG$

問 2 $\triangle AEG \equiv \triangle AFH$ であることを証明しなさい。

問 3 $AB=3\text{ cm}$ 、 $BC=2\text{ cm}$ のとき、次の各問いに答えなさい。

(1) 線分 CD の長さを求めなさい。

(2) 線分 DG の長さを求めなさい。

(3) $\triangle AFH$ と $\triangle DBC$ の面積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問 1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問 2	〔証明〕	
問 3	(1)	cm
	(2)	cm
	(3)	$\triangle AFH : \triangle DBC =$:

解答

問 1

(ア) $\angle EDG$

(イ) $\angle DBA$

(ウ) 2 組の角

問 2

〔証明〕

$\triangle AEG$ と $\triangle AFH$ において

弧 CE に対する円周角は等しいから

$$\angle EAG = \angle CBD \cdots \textcircled{1}$$

線分 BE は $\angle ABC$ の二等分線だから

$$\angle CBD = \angle ABD \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \angle EAG = \angle ABD \cdots \textcircled{3}$$

$AF \parallel EB$ より, 錯角は等しいから,

$$\angle ABD = \angle FAH \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より}, \angle EAG = \angle FAH \cdots \textcircled{5}$$

$$\triangle DBC \sim \triangle DEG \text{ より}, \angle DBC = \angle DEG \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{6}$ より, 錯角が等しいから,

$$BC \parallel FE \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7} \text{より}, AG : AC = AH : AB \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \text{と } AB = AC \text{ より}, AG = AH \cdots \textcircled{9}$$

$\textcircled{9}$ より, $\triangle AHG$ は二等辺三角形だから,

$$\angle AGH = \angle AHG \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{10} \text{より}, \angle AGE = \angle AHF \cdots \textcircled{11}$$

$\textcircled{5}, \textcircled{9}, \textcircled{11}$ より,

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle AEG \cong \triangle AFH$$

問 3

$$(1) \frac{6}{5} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{27}{40} \text{ cm}$$

$$(3) \triangle AFH : \triangle DBC = 135 : 256$$

解説

問 1

あらかじめ根拠となることがらが書かれているので、それを参考にして空欄を埋めていけばよい。

(ア)は対頂角だから $\angle EDG$

(イ)は線分 BE が $\angle ABC$ の二等分線であることから、線分 BE が $\angle ABC$ を大きさの等しい 2 つの角にわけることができるから $\angle DBA$

(ウ)は①、⑥が角に関する情報だから、「2 組の角」があてはまる。

問 2

$\triangle AEG$ と $\triangle AFH$ において

弧 CE に対する円周角は等しいから

$$\angle EAG = \angle CBD \cdots \text{①}$$

線分 BE は $\angle ABC$ の二等分線だから

$$\angle CBD = \angle ABD \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ②より, } \angle EAG = \angle ABD \cdots \text{③}$$

$AF \parallel EB$ より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABD = \angle FAH \cdots \text{④}$$

$$\text{③, ④より}$$

$$\angle EAG = \angle FAH \cdots \text{⑤}$$

$\triangle DBC \sim \triangle DEG$ より

相似な三角形の対応する角は等しいから

$$\angle DBC = \angle DEG \cdots \text{⑥}$$

$$\text{⑥より, 錯角が等しいから, } BC \parallel FE \cdots \text{⑦}$$

$$\text{⑦より, 三角形と比の定理から, } AG : AC = AH : AB \cdots \text{⑧}$$

$$\text{⑧と } AB = AC \text{ より, } AG = AH \cdots \text{⑨}$$

$$\text{⑨より, } \triangle AHG \text{ は二等辺三角形だから, } \angle AGH = \angle AHG \cdots \text{⑩}$$

$$\text{⑩より, } \angle AGE = \angle AHF \cdots \text{⑪}$$

$$\text{⑤, ⑨, ⑪より, 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, } \triangle AEG \equiv \triangle AFH$$

問 3

(1) (2)

$$\text{弧 } FB \text{ に対する円周角は等しいから } \angle FAH = \angle FEB \cdots \text{①}$$

$$AF \parallel EB \text{ より, 平行線の錯角は等しいから } \angle FEB = \angle AFH \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ②より, } \angle FAH = \angle AFH \text{ だから } \triangle AFH \text{ は二等辺三角形である。}$$

$$\triangle AEG \equiv \triangle AFH \text{ より, } \triangle AEG \text{ も二等辺三角形である。}$$

$$\text{さらに, } \triangle AFH \sim \triangle EBH \text{ より, } \triangle BEH \text{ も二等辺三角形である。}$$

$$BC \parallel FE \text{ より, } AH : AB = HG : BC \quad AH : 3 = HG : 2 \quad AH : HG = 3 : 2$$

$$AH = GE \text{ より, } AH : HE = AH : (HG + GE) = 3 : (2 + 3) = 3 : 5 \text{ だから, } AH : HB = 3 : 5$$

$$\text{したがって, } AG : GC = 3 : 5 \text{ だから } AG = 3 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{8}(\text{cm}), \quad GC = 3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8}(\text{cm})$$

$$GE = AG = \frac{9}{8}\text{cm} \text{ であり, また, } \triangle DEG \sim \triangle DBC \text{ より, } DG : DC = GE : CB = \frac{9}{8} : 2 = 9 : 16$$

$$\text{よって, } CD = \frac{16}{25}GC = \frac{6}{5}(\text{cm}), \quad DG = \frac{9}{25}GC = \frac{27}{40}(\text{cm})$$

(3)

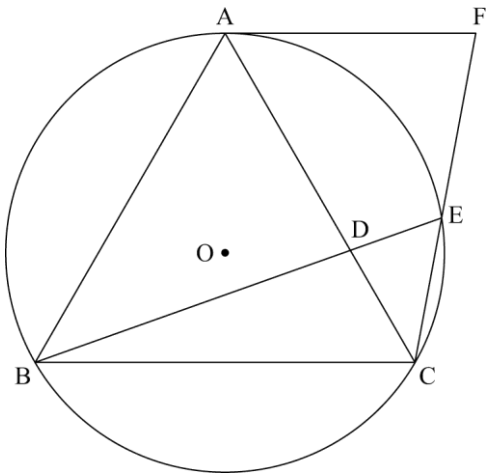
$$\triangle AFH : \triangle GDE = \triangle AEG : \triangle DEG = AG : GD = \frac{9}{8} : \frac{27}{40} = 45 : 27 = 5 : 3$$

$$\triangle DEG : \triangle DBC = \left(\frac{9}{8}\right)^2 : 2^2 = 81 : (4 \times 64) = 81 : 256$$

$$\text{したがって, } \triangle AFH : \triangle DBC = 81 \times \frac{5}{3} : 256 = 135 : 256$$

【問 12】

右の図のように、半径が $6\sqrt{3}\text{cm}$ の円 O がある。円 O の周上に 3 点 A, B, C を、 $\triangle ABC$ が正三角形となるようにとり。辺 AC 上に点 D を、 $AD=12\text{ cm}$ となるようにとり、2 点 B, D を通る直線と円 O との交点のうち、 B でないものを E とする。また、2 点 C, E を通る直線と、点 A を通り直線 BC に平行な直線との交点を F とする。



このとき、次の問 1～問 3 に答えよ。
(京都府 2019 年度 前期)

- 問 1 $\triangle ABD \equiv \triangle ACF$ であることを証明せよ。
- 問 2 線分 BD の長さを求めよ。
- 問 3 四角形 $ABEF$ と $\triangle BCE$ の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問 1		
問 2		cm
問 3	四角形 $ABEF$: $\triangle BCE$ = :	

解答

問 1

$\triangle ABD$ と $\triangle ACF$ で

仮定より, $AB=AC$ …①

$\angle DAB=\angle BCA$

$AF \parallel BC$ より, 平行線の錯角は等しいから

$\angle FAC=\angle BCA$

よって, $\angle DAB=\angle FAC$ …②

$\widehat{AE}$ に対する円周角は等しいから

$\angle ABD=\angle ACF$ …③

①, ②, ③から

1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABD \equiv \triangle ACF$

問 2 $6\sqrt{7}$ cm

問 3 四角形 $ABEF$: $\triangle BCE=26 : 9$

解説

問 1

図の等しい辺や角に印をつけながら考えるとよい。正三角形の性質, 平行線と角の性質, 円周角の定理などを利用し, $\triangle ABD$ と $\triangle ACF$ で, 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことを導く。

問 2

まず, 正三角形 ABC の 1 辺の長さを求める。右の図のように, 点 O と点 A , 点 B を結ぶと, OA , OB は円の半径だから, $OA=OB=6\sqrt{3}\text{cm}$ また, 点 O から辺 AB に垂線 OG を引くと, G は AB の中点になる。 $\triangle OAG$ は $\angle OAG=30^\circ$ の直角三角形だから, $OA : AG=2 : \sqrt{3}$

よって, $AG=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3}=9(\text{cm})$

したがって, $AB=2AG=2 \times 9=18(\text{cm})$ で, これが正三角形 ABC の 1 辺の長さである。

また, BO の延長と辺 AC との交点を H とすると, $BH \perp AC$ で,

$AH=\frac{1}{2}AC=9\text{cm}$

$\triangle ABH$ は $\angle BAH=60^\circ$ の直角三角形だから, $AH : BH=1 : \sqrt{3}$ よって, $BH=\sqrt{3}AH=9\sqrt{3}\text{cm}$

さらに, $HD=AD-AH=12-9=3(\text{cm})$

$\triangle BDH$ で三平方の定理より, $BD^2=BH^2+HD^2=(9\sqrt{3})^2+3^2=252$

$BD>0$ だから, $BD=\sqrt{252}=6\sqrt{7}(\text{cm})$

問 3

右上の図の $\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ において

$\widehat{AE}$ に対する円周角だから, $\angle ABD=\angle ECD$ …①

対頂角だから, $\angle ADB=\angle EDC$ …②

①, ②より, 2 組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle ABD \sim \triangle ECD$

問 2 より, $BD=6\sqrt{7}\text{cm}$ また, $CD=AC-AD=18-12=6(\text{cm})$

$\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ の相似比は $BD : CD=6\sqrt{7} : 6=\sqrt{7} : 1$ だから, 面積比は, $(\sqrt{7})^2 : 1^2=7 : 1$

したがって, $\triangle ABD$ の面積を $7S$ とすると, $\triangle ECD=S$

また, $AD : DC=12 : 6=2 : 1$ だから, $\triangle BCD=\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{7}{2}S$

さらに, 問 1 より $\triangle ABD \equiv \triangle ACF$ だから, $\triangle ACF=7S$

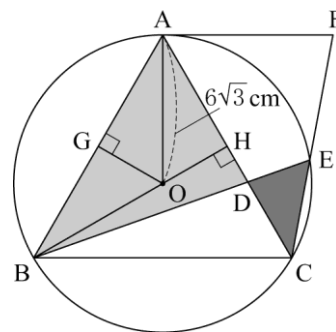
よって, 四角形 $ADEF=\triangle ACF-\triangle ECD=7S-S=6S$

以上より, 四角形 $ABEF : \triangle BCE=(\triangle ABD+\text{四角形 } ADEF) : (\triangle BCD+\triangle ECD)$

$= (7S+6S) : \left(\frac{7}{2}S+S\right)$

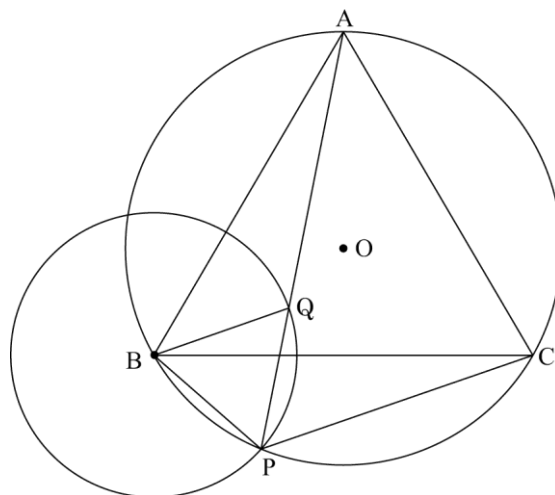
$= 13 : \frac{9}{2}$

$= 26 : 9$



【問 13】

図のように、 $\triangle ABC$ は 1 辺の長さが 6 cm の正三角形で、頂点 A, B, C は円 O の周上にあり、点 A を含まない弧 BC 上に点 P がある。さらに、点 B を中心として点 P を通る円と直線 AP の交点のうち、P と異なる点を Q とする。



次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(兵庫県 2019 年度)

問 1 $\angle AOB$ の大きさは何度か、求めなさい。ただし、180 度より小さい角度で答えること。

問 2 円 O の半径は何 cm か、求めなさい。

問 3 $\triangle ABQ \equiv \triangle CBP$ を次のように証明した。

(i) と (ii) にあてはまるものを、あとのア～カからそれぞれ 1 つ選んでその符号を書き、この証明を完成させなさい。

<証明>

$\triangle ABQ$ と $\triangle CBP$ において、

$\triangle ABC$ は正三角形なので、 $AB = CB$ ……①

2 点 P, Q は、点 B を中心とする同じ円周上にあるので、

$BQ = BP$ ……②

また、弧 AB に対する円周角は等しいので、

$\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$ ……③

②, ③より、 $\angle BPQ = \angle BQP = 60^\circ$ なので、

$\angle$ (i) $= 60^\circ$ となり、 $\angle CBP = 60^\circ - \angle$ (ii) ……④

また、 $\angle ABC = 60^\circ$ より、 $\angle ABQ = 60^\circ - \angle$ (ii) ……⑤

④, ⑤より、 $\angle ABQ = \angle CBP$ ……⑥

①, ②, ⑥より、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle ABQ \equiv \triangle CBP$

ア BAC

イ APC

ウ PBQ

エ CBQ

オ OAP

カ OBQ

問 4 点 P は点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。 $\triangle ABQ$ の面積が最大となるとき、2 つの円の重なった部分の面積は何 cm^2 か、求めなさい。

解答欄

問 1	度	
問 2	cm	
問 3	(i)	
	(ii)	
問 4	cm ²	

解答

問 1 120 (度)

問 2 $2\sqrt{3}$ (cm)

問 3

(i) ウ

(ii) エ

問 4 $8\pi - 6\sqrt{3}$ (cm²)

解説

問 1

△ABC は正三角形だから $\angle ACB = 60^\circ$ 弧 AB に対する中心角 $\angle AOB$ は円周角の定理より, 円周角 $\angle ACB$ の 2 倍であるから $\angle AOB = 120^\circ$

問 2

点 A と点 O を結ぶ。点 O から辺 AB に垂線をひき, その交点を H とする。△AOH は 3 つの角が 30° , 60° , 90° の直角三角形だから各辺の比が $AO : OH : AH = 2 : 1 : \sqrt{3}$ となる。AH = 3cm だから,

$AO = \frac{2}{\sqrt{3}}AH = 2\sqrt{3}(\text{cm})$ よって, 円 O の半径は $2\sqrt{3}\text{cm}$ である。

問 3

(i) △BQP において, $\angle BPQ = \angle BQP = 60^\circ$ であるから, $\angle PBQ = 60^\circ$ ……ウ

(ii) $\angle CBP = \angle PBQ - \angle CBQ = 60^\circ - \angle CBQ$, $\angle ABQ = \angle ABC - \angle CBQ = 60^\circ - \angle CBQ$ ……エ

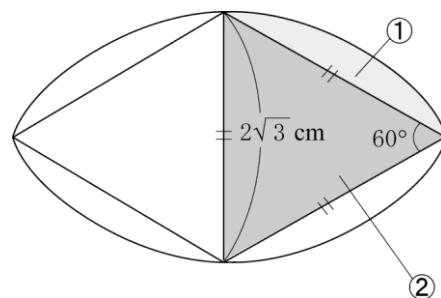
問 4

問 3 より, $\triangle ABQ \equiv \triangle CBP$ であるから, △ABQ の面積が最大になるのは△CBP の面積が最大になるときである。△CBP の面積が最大になるのは直線 AO と円 O の交点のうち点 A でない方の点が P であるときである。このとき, 点 B を中心として点 P を通る円は点 O も通る。よって, 求める面積は右の図の部分①4 つ分の面積と部分②2 つ分の面積の和である。

ここで, 部分①の面積

$$= \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 2\pi - 3\sqrt{3}(\text{cm}^2),$$

部分②の面積 $= 3\sqrt{3}\text{cm}^2$ だから, 求める面積は $(2\pi - 3\sqrt{3}) \times 4 + 3\sqrt{3} \times 2 = 8\pi - 6\sqrt{3}(\text{cm}^2)$



【問 14】

図 1 のように、一辺が 6 cm の正方形 ABCD の辺 BC 上に点 E がある。AE と BD の交点を F とする。

次の問 1，問 2 に答えなさい。

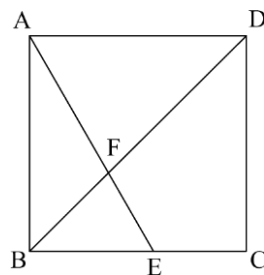
(和歌山県 2019 年度)

問 1 次の (1)，(2) に答えなさい。

(1) $BE : EC = 3 : 2$ のとき， $AF : FE$ を求めなさい。

(2) $\angle BFE = \angle BEF$ のとき，BF の長さを求めなさい。

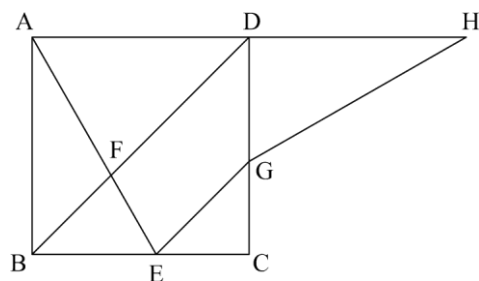
図 1



問 2 図 2 のように，E を通り BD に平行な直線と辺 DC との交点を G とする。また，辺 AD の延長上に $AD = DH$ となる点 H をとり，H と G を結ぶ。次の (1)，(2) に答えなさい。

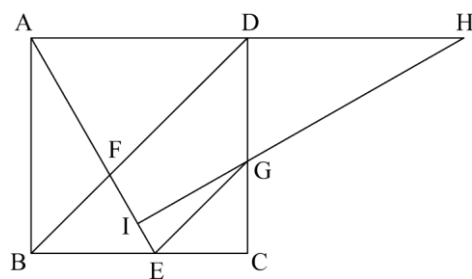
(1) $\triangle ABE \equiv \triangle HDG$ を証明しなさい。

図 2



(2) 図 3 のように，HG の延長と AE との交点を I とする。 $\angle BAE = 30^\circ$ のとき，四角形 IECG の面積を求めなさい。

図 3



解答欄

問 1	(1)	AF : FE =	
	(2)	BF = cm	
問 2	(1)	〔証明〕	
	(2)	cm ²	

解答

問 1

(1) $AF : FE = 5 : 3$

(2) $BF = 6\sqrt{2} - 6$ (cm)

問 2

(1)

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle HDG$ で, $AB = AD = DH$ より

$AB = HD \cdots \textcircled{1}$

$\angle ABE = \angle HDG = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\triangle BCD$ が $BC = DC$ の直角二等辺三角形で,

$BD \parallel EG$ より, 同位角が等しいから,

$\angle CEG = \angle CGE = 45^\circ$

$\triangle CEG$ は直角二等辺三角形だから, $EC = GC$

また, $BE = BC - EC$, $DG = DC - GC$ から,

$BE = DG \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③から, 2組の辺とその間の角が, それぞれ等しいので,

$\triangle ABE \equiv \triangle HDG$

(2) $36 - 18\sqrt{3}$ (cm^2)

解説

問 1

(1)

$BE : EC = 3 : 2$ より, $BE : BC = 3 : 5$ また, $BC = AD$ より, $BE : DA = 3 : 5$

よって, $\triangle ADF \sim \triangle EBF$ より, $AF : EF = DA : BE = 5 : 3$ だから $AF : FE = 5 : 3$

(2)

対頂角は等しいから $\angle DFA = \angle BFE \cdots \textcircled{1}$ 平行線の錯角は等しいから $\angle DAF = \angle BEF \cdots \textcircled{2}$

①, ②と $\angle BFE = \angle BEF$ より, $\angle DFA = \angle DAF$ よって, $\triangle DAF$ は二等辺三角形だから

$DF = DA = 6\text{cm}$

三平方の定理より, $BD = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$ だから, $BF = BD - DF = 6\sqrt{2} - 6(\text{cm})$

問 2

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle HDG$ において, $\angle ABE = \angle HDG = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

仮定より $AD = DH$ であり, また $AD = BA$ だから $BA = DH \cdots \textcircled{2}$

$\triangle BCD$ は直角二等辺三角形で $EG \parallel BD$ より, $\triangle ECG \sim \triangle BCD$ であるから $\triangle ECG$ も直角二等辺三角形である。よって, $CE = CG$ より, $BE = BC - CE = DC - CG = DG$ だから $BE = DG \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より, 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABE \equiv \triangle HDG$

(2)

$\angle BAE = 30^\circ$ より, $\triangle ABE$ は辺の比が $AE : BE : AB = 2 : 1 : \sqrt{3}$ となる。

よって, $BE = \frac{1}{\sqrt{3}}AB = 2\sqrt{3}\text{cm}$, $AE = 2BE = 4\sqrt{3}\text{cm}$ だから, $EC = BC - BE = 6 - 2\sqrt{3}(\text{cm})$

$\triangle ABE \equiv \triangle HDG$ より, $\angle GHD = \angle EAB = 30^\circ$ であり, また $\angle HAI = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ だから $\triangle HAI$ は辺の比が $HA : AI : HI = 2 : 1 : \sqrt{3}$ となる。 $HA = 12\text{cm}$ より, $AI = 6\text{cm}$, $HI = 6\sqrt{3}\text{cm}$ だから, $IE = AE - AI = 4\sqrt{3} - 6(\text{cm})$ $HG = AE = 4\sqrt{3}\text{cm}$ だから, $GI = HI - HG = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$

よって

四角形 $IECG = \triangle IEG + \triangle CGE$

$= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} - 6) \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times (6 - 2\sqrt{3})^2 = 12 - 6\sqrt{3} + 24 - 12\sqrt{3} = 36 - 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

【問 15】

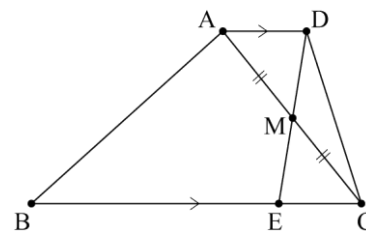
右の図 2 のように、 $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ がある。線分 AC の中点を M とし、直線 DM と辺 BC との交点を E とする。

このとき、 $AD=CE$ であることを次のように証明した。

に証明の続きを書き、証明を完成しなさい。

(鳥取県 2019 年度)

図 2



〔証明〕

$\triangle AMD$ と $\triangle CME$ で、

$\triangle AMD \equiv \triangle CME$

合同な図形では、対応する辺の長さは等しいので、

$AD=CE$

(証明終)

解答欄

〔証明〕

$\triangle AMD$ と $\triangle CME$ で、

$\triangle AMD \equiv \triangle CME$

合同な図形では、対応する辺の長さは等しいので、

$AD=CE$

(証明終)

解答

〔証明〕

$\triangle AMD$ と $\triangle CME$ で、

仮定より、

$$AM = CM \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいので、

$$\angle AMD = \angle CME \cdots \textcircled{2}$$

$AD \parallel BC$ から、錯角は等しいので、

$$\angle MAD = \angle MCE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から、

1組の辺とその両端の角が、それぞれ等しいので、

$$\triangle AMD \equiv \triangle CME$$

合同な図形では、対応する辺の長さは等しいので、

$$AD = CE$$

(証明終)

解説

$\triangle AMD$ と $\triangle CME$ で

仮定より、 $AM = CM \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいので、 $\angle AMD = \angle CME \cdots \textcircled{2}$

$AD \parallel BC$ から、平行線の錯角は等しいので

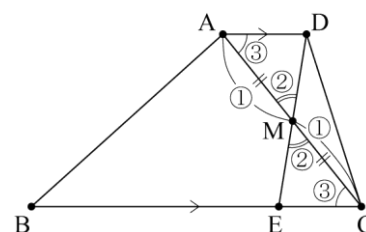
$$\angle MAD = \angle MCE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AMD \equiv \triangle CME$$

合同な図形では、対応する辺の長さは等しいので

$$AD = CE$$



【問 16】

社会の授業で検地について学習した太郎さんは、昔の土地の＜測量方法＞に興味をもち、江戸時代の土地の測量の様子を表した図 1 をもとに、台形の土地を図 2 のように模式化して考えた。問 1 ～問 3 に答えなさい。

(岡山県 2019 年度 一般)

＜測量方法＞

図 1 (「徳川幕府県治要略」から)

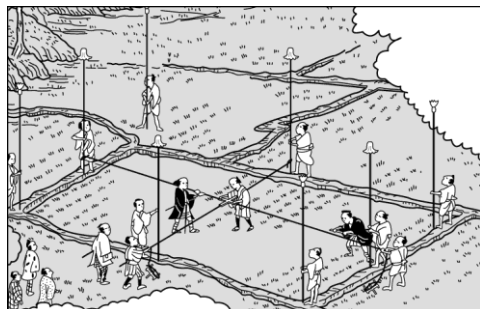
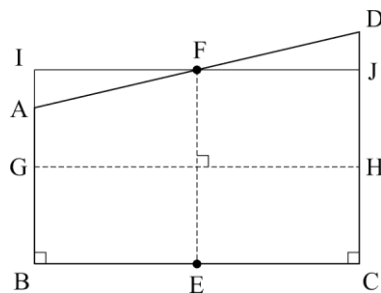


図 2



- ・ $AB < CD$, $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$ である台形 $ABCD$ について, (あ) 線分 BC の中点 E と線分 AD の中点 F をとり, 線分 EF の位置に縄を張る。
- ・ 線分 AB , CD 上にそれぞれ点 G , H を, $EF \perp GH$ となるようにとり, 線分 GH の位置に縄を張る。
- ・ (い) 張った 2 本の縄の長さの積 ($EF \times GH$) が, その土地 (台形 $ABCD$) の面積となる。

問 1 下線部(あ)の点 E を, 定規とコンパスを使って作図しなさい。作図に使った線は残しておきなさい。

問 2 下線部(い)について, 太郎さんは＜測量方法＞で図 2 の台形 $ABCD$ の面積を求めることができる理由を, 次のように説明した。□□□□ に $\triangle AFI \equiv \triangle DFJ$ の証明の過程を書き, ＜説明＞を完成させなさい。

＜説明＞

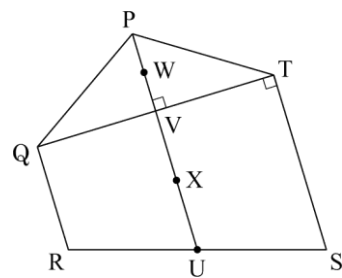
点 F を通り, 線分 BC に平行な直線と直線 AB , CD との交点をそれぞれ I , J とする。
 $\triangle AFI$ と $\triangle DFJ$ において,



$\triangle AFI \equiv \triangle DFJ$ である。したがって, $\triangle AFI = \triangle DFJ$ であり, 台形 $ABCD$ の面積は長方形 $IB CJ$ の面積と等しくなるから, 張った 2 本の縄の長さの積 ($EF \times GH$) が, その土地 (台形 $ABCD$) の面積となる。

図3のような五角形PQRSTがある。線分RSの中点をU、線分PUと線分QTとの交点をV、線分PV、VUの中点をそれぞれW、Xとする。PV<VU、QV=VT、 $\angle PVT = \angle STV = 90^\circ$ であるとき、線分の長さや面積の関係について、正しくないものは、ア～エのうちではどれですか。一つ答えなさい。

図3



ア $QR + TS = 2VU$

イ (四角形 QRST の面積) $= QT \times VU$

ウ (五角形 PQRST の面積) $= QT \times PX$

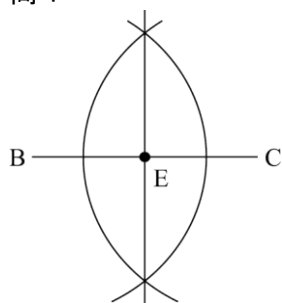
エ (五角形 PQRST の面積) $= QT \times WU$

解答欄

問1	B ————— C
問2	
問3	

解答

問 1



問 2

$\angle IBC = \angle DCB = 90^\circ$, $BC \parallel IJ$ だから

$BI \perp IJ$, $CD \perp IJ$

よって, $\angle AIF = \angle DJF = 90^\circ \cdots (i)$

点 F は線分 AD の中点だから

$AF = DF \cdots (ii)$

対頂角は等しいから

$\angle AFI = \angle DFJ \cdots (iii)$

(i), (ii), (iii) から, 直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

問 3 ウ

解説

問 1

線分 BC の垂直二等分線を作図し, 線分 BC との交点を E とする。

問 2

対頂角が等しいことなどを利用して, 直角三角形の合同条件を導く。

問 3

$\angle PVT = \angle STV = 90^\circ$ より, 錯角が等しいから $PU \parallel TS$

点 Q と点 S を結び, 線分 QS と線分 PU との交点を Y とする。

$\triangle QST$ で, $VY \parallel TS$ より, $QY : YS = QV : VT = 1 : 1$

よって, $\triangle SQR$ で, $QY : YS = RU : US = 1 : 1$ となるから, 中点連結定理より, $QR \parallel YU$

したがって, $QR \parallel TS$ で, 四角形 QRST は $\angle RQT = \angle STQ = 90^\circ$ の台形である。

ア 中点連結定理より, $\triangle SQR$ で, $YU = \frac{1}{2}QR$ $QR = 2YU$ 同様に, $\triangle QST$ で, $VY = \frac{1}{2}TS$ $TS = 2VY$

よって, $QR + TS = 2YU + 2VY = 2(YU + VY) = 2VU$ だから, 正しい。

イ 問 2 で, 台形 ABCD の面積を $EF \times GH$ で求めたのと同じ考え方だから, 正しい。

ウとエ どちらも五角形 PQRST の面積を求める式で, QT に何をかけるのかが異なっている。

ウは $PX = PU - XU = PU - \frac{1}{2}VU$, エは $WU = PU - PW = PU - \frac{1}{2}PV$ をかけるが, 仮定より $PV < VU$ だ

から, $PX < WU$ したがって, ウとエのどちらかが正しくないことになる。

エの $QT \times WU$ は, $QT \times (WV + VU) = QT \times WV + QT \times VU$ と変形することができる。

$QT \times VU$ はイで示したように四角形 QRST の面積を表す式だから, $QT \times WV$ が $\triangle PQT$ の面積を表す式であれば, $\triangle PQT +$ 四角形 QRST = 五角形 PQRST だから, エは正しいことになる。

ここで, $\triangle PQT = \frac{1}{2} \times QT \times PV = QT \times \frac{1}{2}PV = QT \times WV$ と変形することができるから, エは正しい。

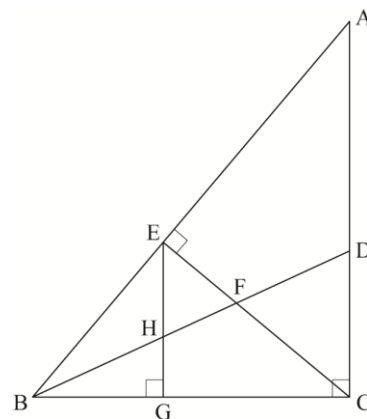
よって, 正しくないのはウ

【問 17】

右の図のような、 $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。 $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC との交点を D とする。点 C から辺 AB に垂線をひき、その交点を E とし、線分 CE と線分 BD との交点を F とする。また、点 E から辺 BC に垂線をひき、その交点を G とし、線分 EG と線分 BD との交点を H とする。

このとき、次の問 1，問 2 に答えなさい。

(香川県 2019 年度)



問 1 $\triangle BEH \sim \triangle BAD$ であることを証明せよ。

問 2 点 E から線分 HF に垂線をひき、その交点を I とし、直線 EI と辺 BC との交点を J とする。このとき、 $EH=FJ$ であることを証明せよ。

解答欄

問 1	〔証明〕
問 2	〔証明〕

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle BEH$ と $\triangle BAD$ において, $\angle B$ は共通……①

$\angle EGB = \angle ACB = 90^\circ$ より, 同位角が等しいから,

$EG \parallel AC$

同位角は等しいから,

$\angle BEH = \angle BAD$ ……②

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BEH \sim \triangle BAD$

問 2

〔証明〕

$\triangle BHG$ と $\triangle BFE$ において

仮定より, $\angle BGH = \angle BEF = 90^\circ$

線分 BD は $\angle ABC$ の二等分線だから,

$\angle HBG = \angle FBE$ ……①

2組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle BHG \sim \triangle BFE$

よって, $\angle BHG = \angle BFE$ $\angle BFE = \angle HFE$ だから,

$\angle BHG = \angle HFE$

対頂角は等しいから, $\angle BHG = \angle FHE$

したがって, $\angle FHE = \angle HFE$

2つの角が等しいから, $\triangle EHF$ は二等辺三角形

よって, $EH = EF$ ……②

$\triangle BEI$ と $\triangle BJI$ において, 仮定より,

$\angle BIE = \angle BIJ = 90^\circ$ ……③ BI は共通……④

①, ③, ④より, 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle BEI \equiv \triangle BJI$ よって, $BE = BJ$ ……⑤

$\triangle BFE$ と $\triangle BFJ$ において, BF は共通……⑥

①, ⑤, ⑥より, 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle BFE \equiv \triangle BFJ$ よって, $FE = FJ$ ……⑦

②, ⑦より, $EH = FJ$

解説

問 1

$\triangle BEH$ と $\triangle BAD$ において, 共通な角より $\angle EBH = \angle ABD$ ……①

$EG \parallel AC$ より, 平行線の同位角は等しいから $\angle BEH = \angle BAD$ ……②

①, ②より, 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle BEH \sim \triangle BAD$

問 2

$\triangle BHG$ と $\triangle BFE$ において, 仮定より $\angle BGH = \angle BEF = 90^\circ$ ……③

線分 BD は $\angle ABC$ の二等分線だから $\angle HBG = \angle FBE$ ……④

③, ④より, 2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle BHG \sim \triangle BFE$

相似な図形の対応する角は等しいから $\angle BHG = \angle BFE$

対頂角は等しいから $\angle BHG = \angle FHE$

よって, $\angle FHE = \angle BFE = \angle HFE$ だから $\triangle EHF$ は二等辺三角形である。

したがって, $EH = EF$ ……⑤

$\triangle BEI$ と $\triangle BJI$ において, 仮定より $\angle BIE = \angle BIJ = 90^\circ$ ……⑥

共通な辺より $BI = BI$ ……⑦

④, ⑥, ⑦より, 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから $\triangle BEI \equiv \triangle BJI$

合同な図形の対応する辺は等しいから $BE = BJ$ ……⑧

$\triangle BFE$ と $\triangle BFJ$ において, 共通な辺より $BF = BF$ ……⑨

④, ⑧, ⑨より, 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle BFE \equiv \triangle BFJ$

合同な図形の対応する辺は等しいから $FE = FJ$ ……⑩

⑤, ⑩より $EH = FJ$

【問 18】

下の図 1 のような、正方形 ABCD と正方形 EFGH がある。頂点 E は、正方形 ABCD の 2 つの対角線の交点と同じ位置にある。辺 BC と辺 EF、辺 CD と辺 EH の交点をそれぞれ I、J とする。正方形 ABCD と正方形 EFGH の相似比は、3 : 4 である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2019 年度)

問 1 $\triangle EIC \equiv \triangle EJD$ であることを証明せよ。

問 2 下の図 2 は、図 1 に色をつけたものである。色をつけた部分 ( の部分) の面積が 182 cm^2 であるとき、正方形 ABCD の 1 辺の長さを求めよ。

問 3 下の図 3 のように、直線 AC と対角線 FH との交点を K とする。AB = 6 cm、BI = 1 cm であるとき、四角形 IFKC の面積を求めよ。

図 1

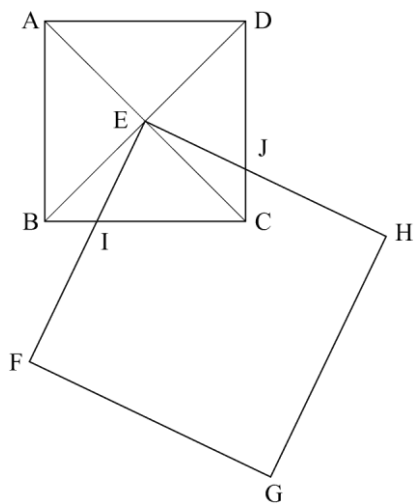


図 2

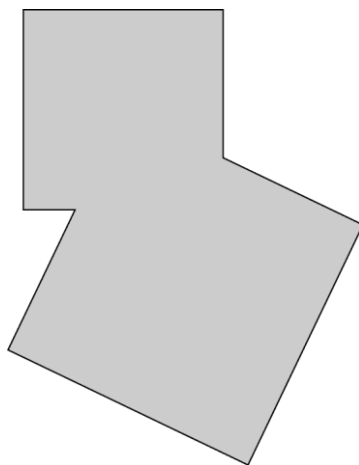
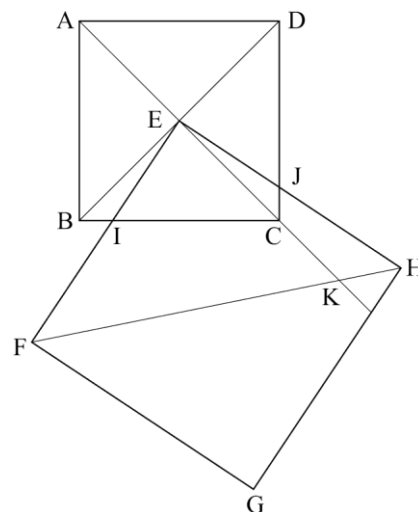


図 3



解答欄

問 1	〔証明〕	
問 2	cm	
問 3	cm ²	

解答

問 1

〔証明〕

$\triangle EIC$ と $\triangle EJD$ において

点 E が正方形 $ABCD$ の対角線の交点だから

$$EC=ED\cdots\textcircled{1}$$

$$\angle ECI=\angle EDJ=45^\circ\cdots\textcircled{2}$$

$$\text{また, } \angle IEC=90^\circ-\angle CEJ\cdots\textcircled{3}$$

$$\angle JED=90^\circ-\angle CEJ\cdots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}\text{から, } \angle IEC=\angle JED\cdots\textcircled{5}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{5}$ で

2つの三角形は

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことがいえたから,

$$\triangle EIC\equiv\triangle EJD$$

$$\text{問 2 } 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{問 3 } \frac{115}{6} \text{ (cm}^2\text{)}$$

解説

問 1

正方形の対角線は等しく、それぞれの中点で交わることを利用して、2つの三角形で1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことを導く。

問 2

図2の面積は、2つの正方形の面積の和から、重なっている部分(四角形 $EICJ$)の面積をひいた値になる。

$$\text{また, 四角形 } EICJ=\triangle EIC+\triangle ECJ=\triangle EJD+\triangle ECJ=\triangle ECD=\frac{1}{4}\times\text{正方形 } ABCD$$

したがって、正方形 $ABCD$ の面積を P 、正方形 $EFGH$ の面積を Q とすると、図2の面積は、

$$P+Q-\frac{1}{4}P=\frac{3}{4}P+Q \text{ となる。正方形 } ABCD \text{ と正方形 } EFGH \text{ の相似比は } 3:4 \text{ だから, 正方形 } ABCD$$

の1辺の長さを $3x\text{cm}$ とすると、正方形 $EFGH$ の1辺の長さは $4x\text{cm}$

よって、 $P=(3x)^2=9x^2(\text{cm}^2)$ 、 $Q=(4x)^2=16x^2(\text{cm}^2)$ だから、図2の面積に着目して方程式をつくると、

$$\frac{3}{4}\times 9x^2+16x^2=182 \quad 91x^2=728 \quad x^2=8 \quad x>0 \text{ だから, } x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\text{正方形 } ABCD \text{ の1辺の長さは, } 3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}(\text{cm})$$

問 3

$\triangle EIC$ と $\triangle EKF$ において、 $\angle ECI=\angle EFK=45^\circ$ また、 $\angle IEC=\angle KEF$ (共通)

よって、2組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle EIC\sim\triangle EKF$

$$\text{相似比は, } EC:EF=\frac{1}{2}AC:\frac{4}{3}AB=\left(\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\right):\left(\frac{4}{3}\times 6\right)=3\sqrt{2}:8 \text{ だから,}$$

$$\text{面積比は, } (3\sqrt{2})^2:8^2=18:64=9:32$$

$$\text{四角形 } IFKC=\triangle EKF-\triangle EIC=\frac{32}{9}\triangle EIC-\triangle EIC=\frac{23}{9}\triangle EIC$$

$$\text{ここで, } \triangle EIC \text{ の底辺を } IC=BC-BI=6-1=5(\text{cm}) \text{ とすると, 高さは, } \frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 6=3(\text{cm})$$

$$\text{よって, 四角形 } IFKC=\frac{23}{9}\triangle EIC=\frac{23}{9}\times\left(\frac{1}{2}\times 5\times 3\right)=\frac{115}{6}(\text{cm}^2)$$

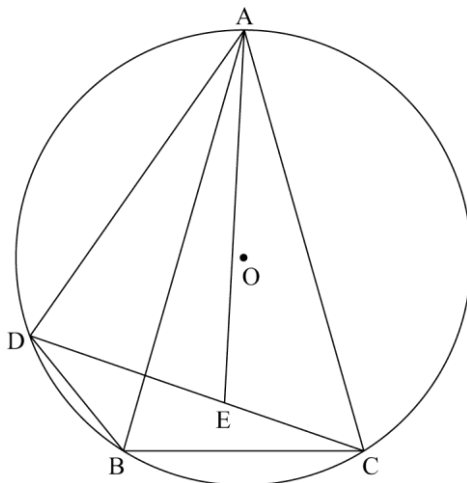
【問 19】

香さんと孝さんは、次の問題を解いている。

問題

図1のように、円Oの円周上に3点A, B, Cを、 $AB=AC$ となるようにとり、 $\triangle ABC$ をつくる。点Cをふくまない $\widehat{AB}$ 上に点Dを $\angle DAB < \angle BAC$ となるようにとり、点Bと点Dを線分で結ぶ。線分CD上に点Eを $\angle EAC = \angle DAB$ となるようにとる。
このとき、 $AD=AE$ となることを証明しなさい。

図 1



次の会話文は、香さんと孝さんが、問題の解き方について会話した内容の一部である。



香さん

AD=AEとなることを証明したいので、線分ADを1辺とする三角形と線分AEを1辺とする三角形が合同であることを示せないかな。

それなら、①() $\equiv$ ()を示せそうだよ。



孝さん



なるほどね。①() $\equiv$ ()を示すことで、AD=AEとなることを証明できるね。

他にAD=AEとなることを証明する方法はないかな。



AB=ACだから、② $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ を示すことで、AD=AEとなることを証明できるよ。

次の問1～問3に答えよ。

(福岡県 2019 年度)

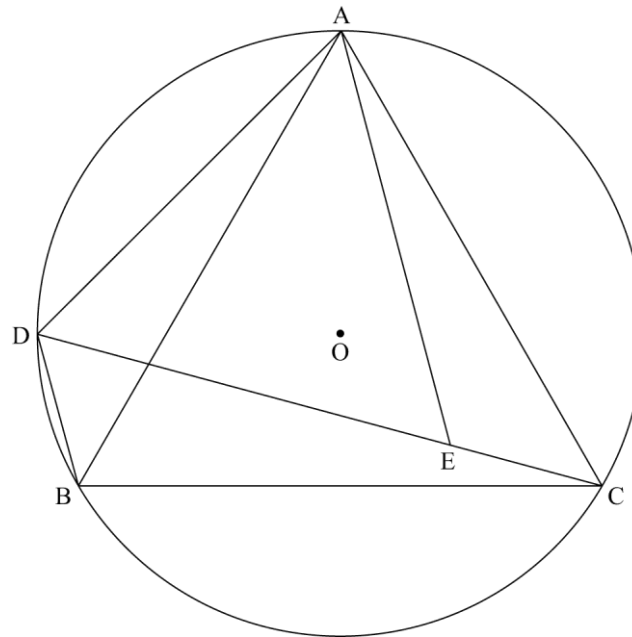
問 1 下線部①の 2 つの () には、図 1 において、 $AD=AE$ となることを証明するための合同な 2 つの三角形があてはまる。それぞれの () にあてはまる三角形を答えよ。

問2 図1において、下線部②であることを証明せよ。

問3 図2は、図1において、 $\angle BAC=60^\circ$ 、点Cをふくまない $\widehat{AD}$ と $\widehat{DB}$ の長さの比が3:1となる場合を表している。

図2において、円Oの半径が4 cm のとき、 $\triangle ADC$ の面積を求めよ。

图 2



解答欄

問 1	() ≡ ()	
問 2	〔証明〕	
問 3	cm ²	

解答

問 1 $(\triangle ADB) \equiv (\triangle AEC)$

問 2

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ において

仮定から

$$\angle EAC = \angle DAB \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } \angle DAE = \angle DAB + \angle BAE \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle BAC = \angle EAC + \angle BAE \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$\angle DAE = \angle BAC \cdots \textcircled{4}$$

$\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ADE = \angle ABC \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より, 2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

問 3 $12 + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問 1

$\triangle ADB$ と $\triangle AEC$ において、仮定から $AB=AC$ …①, $\angle DAB=\angle EAC$ …②, $\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから, $\angle ABD=\angle ACE$ …③ ①, ②, ③より 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$ がいえる。

問 2

$\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ において

仮定から, $\angle EAC=\angle DAB$ …①

また, $\angle DAE=\angle DAB+\angle BAE$ …②

$\angle BAC=\angle EAC+\angle BAE$ …③

①, ②, ③より, $\angle DAE=\angle BAC$ …④

$\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから $\angle ADE=\angle ABC$ …⑤

④, ⑤より, 2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

問 3

(図 1 を参照) $AB=AC$, $\angle BAC=60^\circ$ だから

$\triangle ABC$ は正三角形で, $\angle ABC=60^\circ$

$\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから, $\angle ADC=\angle ABC=60^\circ$

円周角の大きさの比は対応する弧の長さの比と等しいので

$\angle BAD=a$ とすると, $\angle ABD=3a$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから,

$\angle ACD=\angle ABD=3a$

$\triangle ADC$ の内角の和は 180° だから, $60^\circ + 3a + (60^\circ + a) = 180^\circ$

$a=15^\circ$

よって, $\angle ACD=15^\circ \times 3=45^\circ$

(図 2 を参照) 半径 OA , OD をひくと

円周角の定理より $\angle AOD=2\angle ACD=90^\circ$ だから

$\triangle OAD$ は $OA=OD=4\text{cm}$ の直角二等辺三角形で

$OA:AD=1:\sqrt{2}$ なので $AD=4\sqrt{2}\text{cm}$

(図 3 を参照) 点 A から線分 CD にひいた垂線と線分 CD との交点を H とすると

$\triangle ADH$ は 30° , 60° , 90° の直角三角形だから

$DH:AD:AH=1:2:\sqrt{3}$ なので

$DH=2\sqrt{2}\text{cm}$, $AH=2\sqrt{2} \times \sqrt{3}=2\sqrt{6}(\text{cm})$

$\triangle AHC$ は $\angle ACH=45^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$CH=AH=2\sqrt{6}\text{cm}$

したがって $\triangle ADC = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \times 2\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

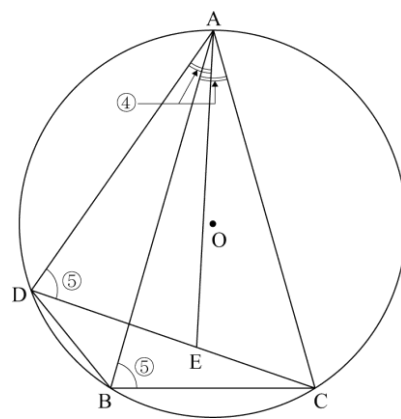


図 1

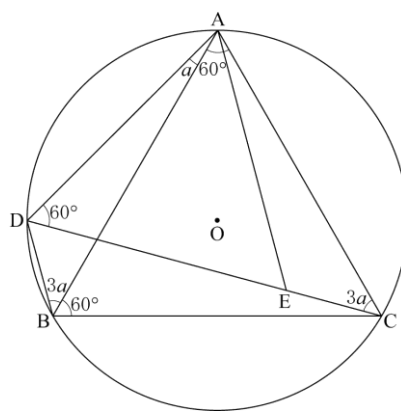


図 2

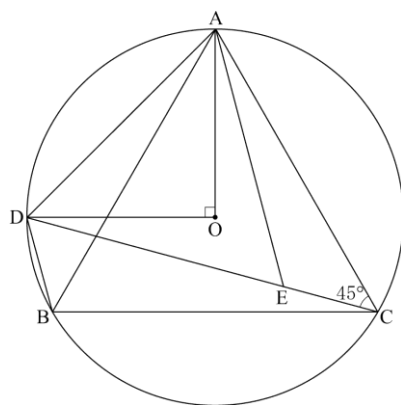
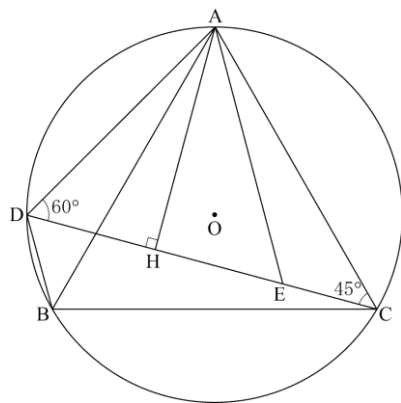


図 3



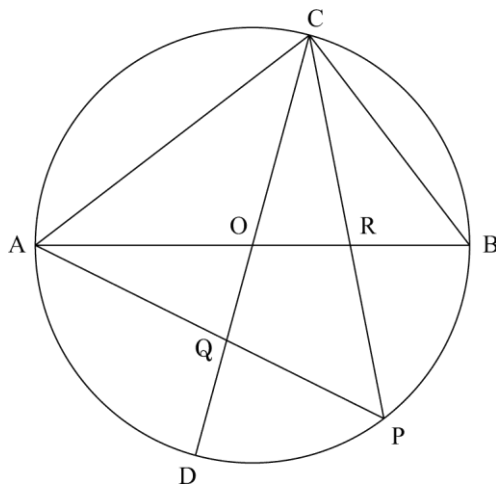
【問 20】

下の図のように、線分 AB 、線分 CD を直径とする円 O がある。

点 A を含まない $\widehat{BD}$ 上に、 $\widehat{DP} = \widehat{PB}$ となるように点 P をとり、線分 AP と線分 CD の交点を Q 、線分 CP と線分 AB の交点を R とする。ただし、 $AB = 10$ cm、 $BC = 6$ cm、 $CA = 8$ cm である。

このとき、次の問 1～問 6 に答えなさい。

(佐賀県 2019 年度 特色)



問 1 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

問 2 $\triangle AOQ \equiv \triangle COR$ であることを証明しなさい。

問 3 線分の比 $OR : RB$ と等しいものを、次のア～エの中から 1 つ選び、記号を書きなさい。

ア $CR : RP$

イ $OB : OC$

ウ $CO : CB$

エ $CB : OP$

問 4 $\triangle CRB$ の面積を求めなさい。

問 5 四角形 $OQPR$ の面積を求めなさい。

問 6 線分 QR の長さを求めなさい。

解答欄

問 1	cm ²	
問 2		
問 3		
問 4	cm ²	
問 5	cm ²	
問 6	cm	

解答

問 1 24 cm^2

問 2

$\triangle AOQ$ と $\triangle COR$ において

OA と OC は円 O の半径だから

$OA=OC$ …①

対頂角は等しいから

$\angle AOQ=\angle COR$ …②

$\widehat{DP}=\widehat{PB}$ より, $\widehat{BP}$ と $\widehat{DP}$ に対する円周角は等しいから

$\angle BAP=\angle DCP$

つまり $\angle OAQ=\angle OCR$ …③

①, ②, ③から

1組の辺とその両端の角が, それぞれ等しいので

$\triangle AOQ \equiv \triangle COR$

問 3 ウ

問 4 $\frac{72}{11} \text{ cm}^2$

問 5 $\frac{100}{11} \text{ cm}^2$

問 6 $\frac{40}{11} \text{ cm}$

解説

問 1

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 (\text{cm}^2)$

問 2

$\triangle AOQ$ と $\triangle COR$ において, OA と OC はともに円 O の半径だから, $OA=OC$ ……①

対頂角は等しいから, $\angle AOQ=\angle COR$ ……②

$\widehat{DP}=\widehat{PB}$ より, $\widehat{BP}$ と $\widehat{DP}$ に対する円周角は等しいから, $\angle OAQ=\angle OCR$ ……③

①, ②, ③より, 1組の辺とその両端の角が, それぞれ等しいから, $\triangle AOQ \equiv \triangle COR$

問 3

$\widehat{PB}=\widehat{DP}$ より, $\widehat{PB}$ と $\widehat{DP}$ に対する円周角は等しいから, $\angle BCR=\angle OCR$ ……④

よって, 直線 CR は $\angle OCB$ の二等分線だから, $OR:RB=CO:CB=5:6$

ア 点 O と点 P を線分で結ぶ。 $\triangle OPC$ は二等辺三角形だから, $\angle OPR=\angle OCR$ ……⑤

④, ⑤より, $\angle BCR=\angle OPR$ ……⑥

対頂角は等しいから, $\angle BRC=\angle ORP$ ……⑦

⑥, ⑦より, 2組の角がそれぞれ等しいので $\triangle BCR \sim \triangle OPR$ よって, $CR:PR=CB:PO=6:5$

イ 辺 OB , 辺 OC はともに円 O の半径だから, $OB:OC=1:1$

ウ $CO:CB=5:6$ よって, $CO:CB=OR:RB$

エ $CB:OP=6:5$

問 4

$\triangle CRB = \frac{6}{11} \times \triangle COB = \frac{6}{11} \times \frac{1}{2} \times \triangle ABC = \frac{3}{11} \times 24 = \frac{72}{11} (\text{cm}^2)$

問 5

$\triangle OQP$ と $\triangle ORP$ において, 等しい弧に対する中心角は等しいから, $\angle QOP=\angle ROP$ ……⑧

問 2 より, $OQ=OR$ ……⑨ 共通な辺だから $OP=OP$ ……⑩

⑧, ⑨, ⑩より, 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから, $\triangle OQP \equiv \triangle ORP$

$\triangle CRB : \triangle PRO = 6^2 : 5^2 = 36 : 25$ で, $\triangle CRB = \frac{72}{11} \text{ cm}^2$ だから, $\triangle PRO = \frac{72}{11} \times \frac{25}{36} = \frac{50}{11} (\text{cm}^2)$

よって, $\triangle OQP \equiv \triangle ORP$ より, 四角形 $OQPR$ の面積は $2 \times \triangle PRO = \frac{100}{11} (\text{cm}^2)$

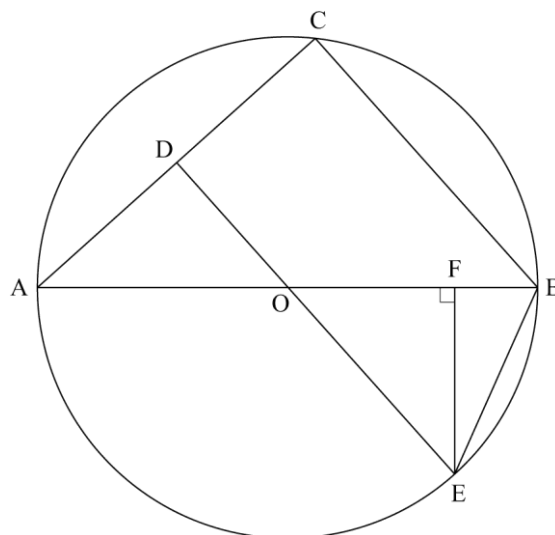
問 6

$\triangle PRQ \sim \triangle PCA$ より, $QR:AC=PR:PC=5:11$ $QR:8=5:11$ $QR=\frac{40}{11} (\text{cm})$

【問 21】

【問題 A】

右の図は、点 O を中心とする円で、線分 AB は円の直径である。点 C は $\widehat{AB}$ 上にあり、点 D は線分 AC 上にあって、 $AD=CD$ である。点 E は線分 DO の延長と、 C を含まない $\widehat{AB}$ との交点であり、点 F は AB 上にあって、 $EF \perp AB$ である。



このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2019 年度)

問 1 美咲さんは、 $\triangle AOD \equiv \triangle EOF$ であることを証明

するため、次のように、最初に $\triangle AOD \sim \triangle ABC$

を示し、それをもとにして証明した。ア には当てはまる相似条件を入れ、イ には証明の続きを書いて、証明を完成しなさい。

証明

$\triangle AOD$ と $\triangle ABC$ において、

2 つの三角形に共通な角だから

$$\angle OAD = \angle BAC \cdots \text{①}$$

点 O 、点 D はそれぞれ線分 AB 、 AC の中点だから

$$AO : AB = AD : AC = 1 : 2 \cdots \text{②}$$

①、②より、ア から

$$\triangle AOD \sim \triangle ABC \cdots \text{③}$$

また、 AB は円の直径だから $\angle ACB = 90^\circ$ であり、③から

$$\angle ADO = \angle ACB = 90^\circ \cdots \text{④}$$

ここで、 $\triangle AOD$ と $\triangle EOF$ において

イ

よって、 $\triangle AOD \equiv \triangle EOF$

問 2 $AB=6$ cm、 $BC=4$ cm のとき、線分 BE の長さを求めなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

解答欄

問 1	ア		
	イ		
問 2	cm		

解答

問 1

ア

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

イ

$EF \perp AB$ だから

$$\angle EFO = 90^\circ \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

$$\angle ADO = \angle EFO \cdots \textcircled{6}$$

対頂角は等しいから

$$\angle AOD = \angle EOF \cdots \textcircled{7}$$

また, AO , EO はともに円の半径だから

$$AO = EO \cdots \textcircled{8}$$

⑥より, $\triangle AOD$ と $\triangle EOF$ はともに直角三角形であり

⑦, ⑧より

斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい。

$$\text{問 } 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

解説

問 1

ア ②で 2組の辺の比がそれぞれ等しいこと, ①でその間の角が等しいことを示している。

イ 対頂角が等しいことと円の半径が等しいことを用いて, 直角三角形の合同条件にあてはまることを示す。

問 2

$$\triangle ABC \text{ で, 三平方の定理より, } AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

$$AC > 0 \text{ だから, } AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\text{cm}) \quad AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}(\text{cm})$$

また, $\triangle ABC$ で, 2点 O , D はそれぞれ辺 AB , AC の中点だから, 中点連結定理より,

$$OD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2(\text{cm})$$

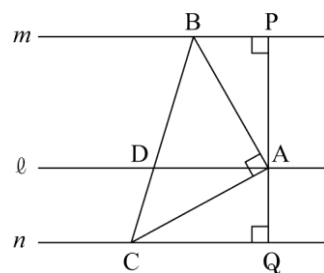
$$\triangle AOD \equiv \triangle EOF \text{ より, } EF = AD = \sqrt{5}\text{cm} \quad OF = OD = 2\text{cm} \quad \text{よって, } BF = OB - OF = 3 - 2 = 1(\text{cm})$$

$$\triangle BEF \text{ で, 三平方の定理より, } BE^2 = EF^2 + BF^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = 6 \quad BE > 0 \text{ だから, } BE = \sqrt{6}\text{cm}$$

【問 22】

右の図のように、 $\angle BAC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC と、頂点 A, B, C をそれぞれ通る 3 本の平行な直線 ℓ, m, n がある。線分 BC と直線 ℓ との交点を D とし、頂点 A から 2 直線 m, n にそれぞれ垂線 AP, AQ をひく。このとき、 $\triangle ABP \equiv \triangle CAQ$ であることを証明せよ。

(鹿児島県 2019 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABP$ と $\triangle CAQ$ において

仮定から $\angle APB = \angle CQA = 90^\circ \dots \textcircled{1}$

$\triangle ABC$ は、 $\angle BAC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$AB = CA \dots \textcircled{2}$

$\angle CAD + \angle DAB = 90^\circ$, $\angle DAB + \angle BAP = 90^\circ$ だから

$\angle CAD = \angle BAP \dots \textcircled{3}$

$\ell \parallel n$ より、平行線の錯角は等しいから

$\angle CAD = \angle ACQ \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から $\angle BAP = \angle ACQ \dots \textcircled{5}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ より

直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABP \equiv \triangle CAQ$

解説

平行線と角の性質などを利用して、2 つの直角三角形で斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいことを示す。