

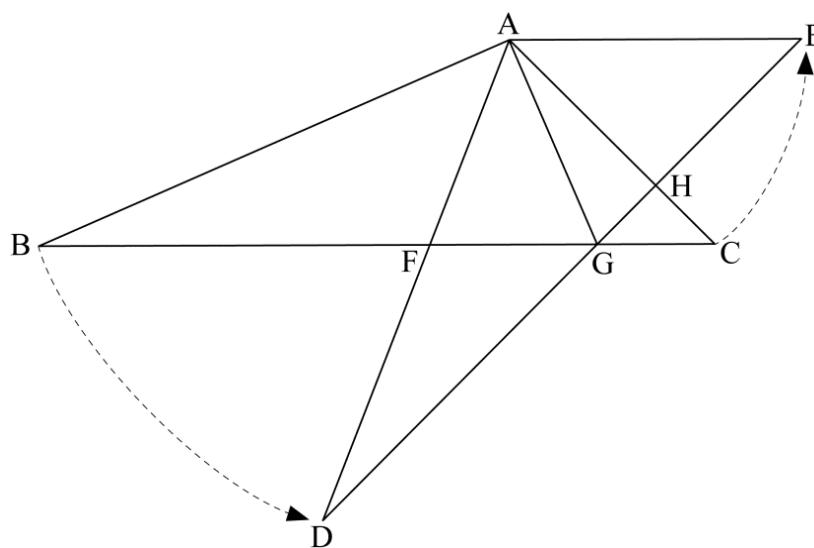
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2015 年度出題】

【問 1】

$AB=7$ cm, $BC=9$ cm, $AC=4$ cm の $\triangle ABC$ と, $\triangle ABC \equiv \triangle ADE$ となる $\triangle ADE$ があり, 下の図は, $\triangle ADE$ を, $\triangle ABC$ に重ね合わせた状態から, 点 A を中心として反時計まわりに, $AE \parallel BC$ となるまで回転移動させたものです。このとき, 辺 AD と辺 BC との交点を F , 辺 DE と辺 BC , AC との交点をそれぞれ G , H とし, 点 A と点 G を結びます。

あとの問1～問4に答えなさい。

(宮城県 2015 年度 前期)



問1 $\triangle ABC$ と相似な三角形を, 次のア～ウから 1 つ選び, 記号で答えなさい。

ア $\triangle ABG$ イ $\triangle HEA$ ウ $\triangle FBA$

問2 $\triangle HGC$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。

問3 線分 DG の長さを求めなさい。

問4 $\triangle AGH$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕
問3	cm
問4	cm ²

解答

問1 ウ

問2

〔証明〕

$\triangle ABC \equiv \triangle ADE$ より

合同な三角形の対応する角は等しいから

$$\angle BCA = \angle DEA \cdots \textcircled{1}$$

$AE \parallel BC$ より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle CGH = \angle DEA \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle CGH = \angle BCA \text{ となるから}$$

$$\angle CGH = \angle GCH$$

2つの角が等しいから

$\triangle HGC$ は二等辺三角形である。

問3 5 cm

問4 $\frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

角が等しいところを探す。

まず $AE \parallel BC$ より錯角は等しいので $\angle HAE = \angle HCG$

次に $\triangle ADE$ は $\triangle ABC$ を点 A を中心に回転させたものだから

$\angle BAC = \angle DAE$, $\angle HCG = \angle AEH$

よって $\angle BAF = \angle BAC - \angle FAC$, $\angle HAE = \angle DAE - \angle FAC$ となるから

$\angle BAF = \angle HAE$

したがって $\angle BAF = \angle HCG = \angle ACB \cdots \textcircled{1}$

さらに共通な角だから $\angle ABC = \angle FBA \cdots \textcircled{2}$ がいえる。

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

$\triangle ABC$ と $\triangle FBA$ は

2 角が等しくなるので相似であるといえる。

したがって正しいのはウ

問2

$\triangle HGC$ において

2 つの角が等しいことから二等辺三角形であることを導く。

問3

$\triangle HGC$ において

$HG = HC$

同様に $\triangle HEA$ も二等辺三角形なので $HE = HA$

よって $GE = HG + HE = HC + HA = AC = 4\text{cm}$

$DE = BC = 9\text{cm}$ より $DG = 9 - 4 = 5\text{cm}$

問4

$\triangle ABC$ において

A から BC に垂線をひき交点を K とする。

$BK = x\text{cm}$ として

三平方の定理を利用すると $7^2 - x^2 = 4^2 - (9 - x)^2$

これを解いて $x = \frac{19}{3}$ $AK = \sqrt{7^2 - \left(\frac{19}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\text{cm}$

$\triangle AGE = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{8\sqrt{5}}{3}\text{cm}^2$

$\triangle FBA \sim \triangle ABC$ より

$FB : 7 = 7 : 9$ $FB = \frac{49}{9}\text{cm}$

また $\triangle DAE$ において

$FG \parallel AE$ より

$FG : 4 = 5 : 9$

$FG = \frac{20}{9}\text{cm}$

よって $GC = 9 - \frac{49}{9} - \frac{20}{9} = \frac{4}{3}\text{cm}$

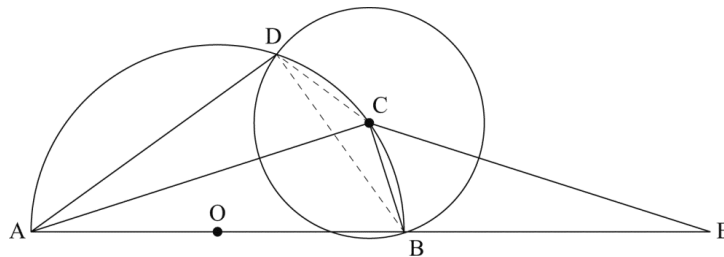
$GC \parallel AE$ より

$HG : HE = GC : EA = \frac{4}{3} : 4 = 1 : 3$

よって $\triangle AGH = \frac{1}{4} \triangle AGE = \frac{1}{4} \times \frac{8\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\text{cm}^2$

【問 2】

図のように、線分 AB を直径とする半円 O があり、 $\widehat{AB}$ 上に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。ただし、辺 AC は辺 BC より長いものとする。点 C を中心とし、線分 CB を半径とする円 C をかき、 $\widehat{AC}$ との交点を D とする。また、線分 AB を点 B の方向に延長した直線上に $AD=BE$ となる点 E をとる。このとき、 $\triangle CAE$ は二等辺三角形であることを次のように証明した。



(証明)

点 B と点 D 、点 C と点 D をそれぞれ結ぶ。

$\triangle ACD$ と $\triangle ECB$ で、

ア に対する円周角は等しいから、

$$\angle BAC = \angle BDC \quad \cdots \textcircled{1}$$

線分 AB は直径だから、 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{2}$

$\angle CBE$ は $\triangle ABC$ で頂点 B における イ だから、

$$\angle CBE = \angle BAC + \angle ACB \quad \cdots \textcircled{3}$$

①、②、③から、 $\angle CBE = \angle BAC + \angle ACB$

$$= \angle BDC + \angle ADB$$

$$= \angle CDA \quad \cdots \textcircled{4}$$

ウ

次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2015 年度)

問1 ア には当てはまる弧を、イ には当てはまることばをそれぞれ書きなさい。

問2 ウ には証明の続きを書き、 $\triangle CAE$ は二等辺三角形であることの証明を完成させなさい。

ただし、(証明) の中の①～④で示されている関係を使う場合は、①～④の番号を用いてもよい。また、新たな関係に番号をつける場合は、⑤以降の番号を用いなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	ウ	

解答

問1

ア $\widehat{BC}$

イ 外角

問2

ウ

仮定より

$$AD=EB\cdots\textcircled{5}$$

円 C の半径だから

$$CD=CB\cdots\textcircled{6}$$

④, ⑤, ⑥から

2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACD \equiv \triangle ECB$$

合同な三角形の対応する辺だから

$$CA=CE$$

よって $\triangle CAE$ は二等辺三角形である。

解説

問1

$\angle BAC$ と $\angle BDC$ は $\widehat{BC}$ の円周角である。

また $\angle CBE$ は $\triangle ABC$ の頂点 B における外角である。

問2

$\triangle ACD$ と $\triangle ECB$ が合同になることを示し

$\triangle CAE$ の2辺 CA と CE が等しいことを導く。

【問 3】

AD=12 cm で、縦と横の長さの比が $\sqrt{2} : 1$ の長方形 ABCD があります。図1のように、線分 AC を折り目として折ったとき、点 B の移った点を E とします。また、線分 AE と辺 DC との交点を F とします。このとき、次の各問に答えなさい。

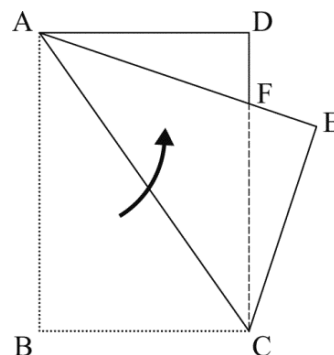
なお、考えるときに、別紙を利用してもさしつかえありません。別紙の辺の比は、 $\sqrt{2} : 1$ です。

(埼玉県 2015 年度)

問1 $\triangle ACF$ が二等辺三角形であることを証明しなさい。

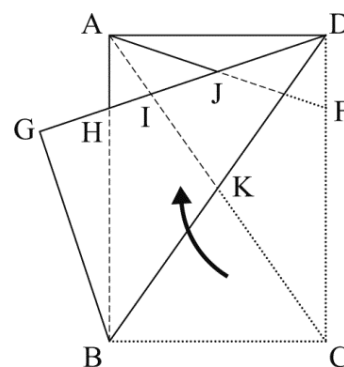
問2 線分 EF の長さを求めなさい。

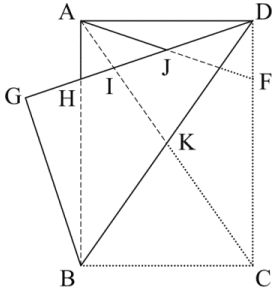
図1

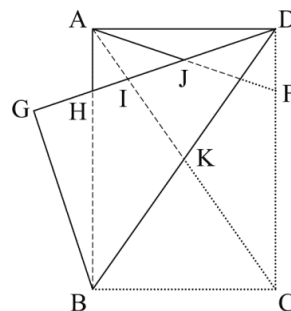


問3 図1において、線分 AF をかき、もとに戻します。次に、図2のように、線分 DB を折り目として折ったとき、点 C の移った点を G とします。また、線分 GD と線分 AB, AC, AF との交点をそれぞれ H, I, J とし、線分 AC と線分 DB との交点を K とします。このとき、 $\triangle AIJ$ の面積を求めます。途中の説明も書いて答えを求めなさい。その際、解答用紙の図に数や記号をかいて、それをういて説明してもよいものとします。

図2



問1	〔証明〕	
問2	cm	
問3	〔説明〕  答え cm²	



解説

問1

$\triangle ACE$ を折り返した角より

$$\angle CAF = \angle BAC \cdots \textcircled{1}$$

$AB \parallel DC$ より, 錯角は等しいので

$$\angle BAC = \angle ACF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

$$\angle CAF = \angle ACF$$

よって底角が等しくなるので $\triangle ACF$ は二等辺三角形とわかる。

問2

$$AD = 12 \text{ cm}, AB:AD = \sqrt{2}:1 \text{ より}$$

$$AB = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$EF = x \text{ cm とすると}$$

$$DF = CD - CF = AE - AF = EF = x \text{ cm}$$

$$CF = 12\sqrt{2} - x \text{ cm}$$

$\triangle CEF$ において

$\angle CEF = 90^\circ$ より三平方の定理を利用して

$$CF^2 = EF^2 + CE^2$$

$$(12\sqrt{2} - x)^2 = x^2 + 12^2$$

$$288 - 24\sqrt{2}x + x^2 = x^2 + 144$$

$$-24\sqrt{2}x = -144$$

$$x = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

問3

$$AH = DF = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AH:CD = 3\sqrt{2}:12\sqrt{2} = 1:4$$

よって $AH \parallel DC$ より $HI:DI = 1:4$

$$\triangle AHI = \frac{1}{5} \triangle ADH = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 12 \times 3\sqrt{2} = \frac{18\sqrt{2}}{5} \text{ cm}^2$$

$AH \parallel DF$ より

$$HJ:DJ = AH:FD = 1:1$$

$$\triangle AHJ = \frac{1}{2} \triangle ADH = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 12 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

よって $\triangle AIJ = \triangle AHJ - \triangle AHI = 9\sqrt{2} - \frac{18\sqrt{2}}{5} = \frac{27\sqrt{2}}{5} \text{ cm}^2$ のようにも導ける。

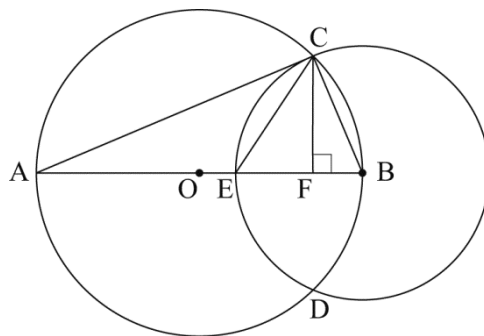
【問 4】

図のように、点 O を中心とし、線分 AB を直径とする円 O がある。
線分 OB 上に、2 点 O, B と異なる点 E をとり、点 B を中心とし、線分 BE を半径とする円 B をかく。

2 つの円の交点を C, D とし、点 C から線分 AB に垂線 CF をひく。また、点 C と、点 A , 点 B , 点 E をそれぞれ結ぶ。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2015 年度 前期)



問1 線分 CE が $\angle ACF$ を二等分することの証明を、次の の中に途中まで示してある。

(a) , (b) に入る最も適当なものを、あとの選択肢のア～カのうちから、それぞれ 1 つずつ選び、符号で答えなさい。また、(c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。ただし、 中の①～③に示されている関係を使う場合、番号の①～③を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle CFB$ と $\triangle ACB$ において、

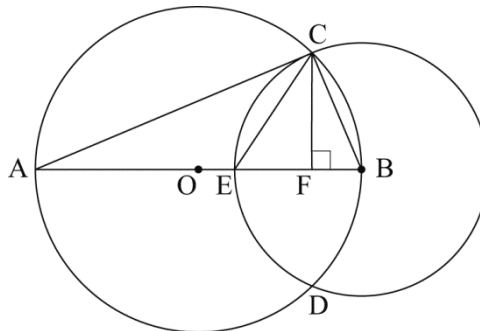
共通な角だから、 $\angle CBF =$ (a) $\cdots$ ①

仮定と、線分 AB は円 O の直径であることから、

$\angle CFB =$ (b) $= 90^\circ \cdots$ ②

①、②より、2 組の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle CFB \sim \triangle ACB \cdots$ ③



(c)

したがって、線分 CE は $\angle ACF$ を二等分する。

— 選択肢 —

ア $\angle AEC$

イ $\angle ACB$

ウ $\angle BAC$

エ $\angle ABC$

オ $\angle BCF$

カ $\angle BCE$

問2 円 B の半径が 1 cm で、 $\triangle CFB$ と $\triangle ACB$ の面積比が $1:16$ のとき、線分 CE の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm	

解答

問1

(a) エ

(b) イ

(c)

③より $\angle BCF = \angle BAC \cdots ④$

円の半径から $BC = BE \cdots ⑤$

⑤より $\triangle BCE$ は, $BC = BE$ の二等辺三角形なので

$\angle BCE = \angle BEC \cdots ⑥$

$\triangle CAE$ において

1つの外角はこれととなり合わない2つの内角の和に等しいので

$\angle BEC = \angle CAE + \angle ACE$

よって $\angle ACE = \angle BEC - \angle CAE = \angle BEC - \angle BAC \cdots ⑦$

また $\angle ECF = \angle BCE - \angle BCF \cdots ⑧$

④, ⑥, ⑦, ⑧より

$\angle ACE = \angle ECF$

問2 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm

解説

問1

(証明の続き)

$\triangle CFB \sim \triangle ACB$ より

$\angle BCF = \angle BAC \cdots ㉞$

$\triangle BCE$ に注目して

$BC = BE$ より

$\angle BCE = \angle BEC \cdots ㉟$

$\triangle CAE$ に注目して

$\angle ACE = \angle BEC - \angle BAC \cdots ㊱$

また $\angle ECF = \angle BCE - \angle BCF \cdots ㊲$

㉞, ㉟, ㊱, ㊲より

$\angle ACE = \angle ECF$

問2

$\triangle CFB \sim \triangle ACB$ で

面積比が $1:16$ より

相似比は $1:4$

よって $BC:BA = 1:4$ $BC = 1$ cm より

$BA = 4$ cm

$BF:1 = 1:4$

$BF = \frac{1}{4}$ cm

$\triangle ABC$ において

三平方の定理より $AC = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ cm

$\triangle AFC \sim \triangle ACB$ より

$CF:1 = \sqrt{15}:4$

$CF = \frac{\sqrt{15}}{4}$ cm

$\triangle CEF$ において

三平方の定理より $CE^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}$

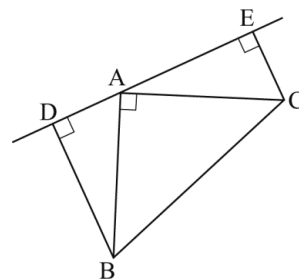
$CE > 0$ より

$CE = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm

【問 5】

図のように、 $AB=AC$ である直角二等辺三角形 ABC の頂点 A を通る直線に、頂点 B, C からそれぞれ垂線 BD, CE をひく。

このとき、 $BD+CE=DE$ であることを次のように証明したい。 $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ にあてはまる数をそれぞれ書きなさい。また、 $\boxed{\text{I}}$, $\boxed{\text{II}}$, $\boxed{\text{III}}$ にあてはまるものの組み合わせとして最も適当なものを、下のアからエまでのの中から選んで、そのかな符号を書きなさい。



なお、2 か所の $\boxed{a}$ には同じ数、3 か所の $\boxed{\text{I}}$ と 2 か所の $\boxed{\text{II}}$, $\boxed{\text{III}}$ にはそれぞれ同じものがあてはまる。

(愛知県 2015 年度 B)

(証明) $\triangle ADB$ と $\triangle CEA$ で、

仮定より、 $\angle ADB = \angle CEA = 90^\circ \cdots \text{①}$

$AB = CA \cdots \text{②}$

また、 $\angle ABD = \boxed{a}^\circ - \angle \boxed{\text{I}} \cdots \text{③}$

$\angle CAE = \boxed{b}^\circ - \angle BAC - \angle \boxed{\text{I}}$

$= \boxed{a}^\circ - \angle \boxed{\text{I}} \cdots \text{④}$

③, ④より、 $\angle ABD = \angle CAE \cdots \text{⑤}$

①, ②, ⑤から、直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が、それぞれ等しいので、

$\triangle ADB \equiv \triangle CEA$

合同な図形では、対応する辺の長さは等しいので、

$BD = \boxed{\text{II}}$, $\boxed{\text{III}} = CE$

よって、 $BD + CE = \boxed{\text{II}} + \boxed{\text{III}}$

$= DE$

ア I $\angle BAD$, II AD , III AE

イ I $\angle ADB$, II AE , III AD

ウ I $\angle BAD$, II AE , III AD

エ I $\angle ADB$, II AD , III AE

解答欄

a () $^\circ$, b () $^\circ$, I II III ()

解答

a 90°

b 180°

I II III ウ

解説

まず $\triangle ADB$ と $\triangle CEA$ の合同を証明する。

それから合同な図形の対応する辺の長さは等しいことを利用して導く。

【問 6】

図1, 図2において, A, B, C, D は, 円 O の周上の異なる 4 点であり, この順に左回りに並んでいる。四角形 $ABCD$ は, $AD \parallel BC$, $AD = 2 \text{ cm}$ の台形である。 E, F, G は, それぞれ辺 AB, AD, BC の中点である。 E と F , E と G とをそれぞれ結ぶ。 H は直線 AD と直線 EG との交点であり, I は直線 BC と直線 EF との交点である。 $BC = x \text{ cm}$ とする。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2015 年度 後期)

問1 線分 HD の長さを x を用いて表しなさい。

問2 $EI = EG$ であることを証明しなさい。

問3 図2は, $x = 5$ であって点 O が台形 $ABCD$ の外部にあるときの状態を示している。

図2において, $AB = AD$ である。このとき, 五角形 $FEGCD$ の面積を求めなさい。

図1

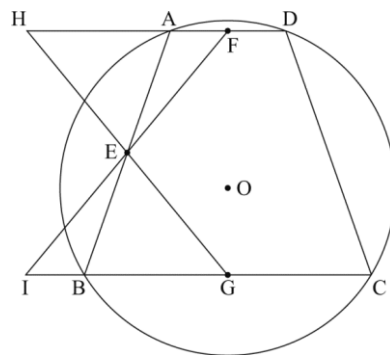
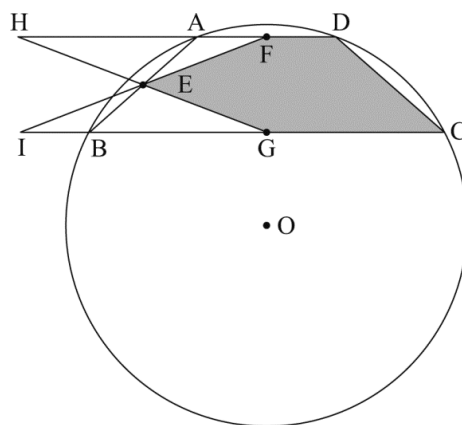


図2



解答欄

問1	cm	
問2	〔証明〕	
問3	cm ²	

解答

問1 $\frac{1}{2}x + 2 \text{ cm}$

問2

〔証明〕

AとC, BとDとをそれぞれ結ぶ。

△ABD において

E, Fはそれぞれ辺 AB, AD の中点だから EF // BD

よって∠AFE=∠ADB (同位角)…⑦

△BAC において

E, Gはそれぞれ辺 BA, BC の中点だから EG // AC

よって∠BGE=∠BCA (同位角)…⑧

同じ弧に対する円周角は等しいから

∠ADB=∠BCA…⑨

⑦, ⑧, ⑨より

∠AFE=∠BGE…⑩

AD // IC だから

∠AFE=∠BIE (錯角)…⑪

⑩, ⑪より

∠BIE=∠BGE

よって△EIG は二等辺三角形だから

EI=EG

問3 $\frac{21\sqrt{7}}{16} \text{ cm}^2$

解説

問1

HA // BG より

HA:GB=AE:BE=1:1 となるから

$$\text{HA} : \frac{1}{2}x = 1 : 1$$

$$\text{HA} = \frac{1}{2}x \text{ cm}$$

$$\text{よって HD} = \text{HA} + \text{AD} = \frac{1}{2}x + 2 \text{ cm}$$

問2

△EIG において

∠EIG=∠EGIを示す。

AとC, BとDを結び中点連結定理から平行線を見つける。

平行線の同位角や錯角, 円周角が等しいことを利用する。

問3

EI=EG=y cm とおく。

△BEI ∽ △EIG なので

BI:EG=EI:IG より

$$1:y=y:\frac{7}{2} \quad y^2=\frac{7}{2}$$

y>0 だから

$$y=\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ cm}$$

二等辺三角形 EIG で E から IG に垂線をひきその交点を K とすると

$$\text{EK} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ cm}$$

五角形 FEGCD の面積は

$$\text{台形 FICD} - \triangle \text{EIG} = \frac{1}{2} \times (1+6) \times \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{21\sqrt{7}}{16} \text{ cm}^2$$

【問 7】

四角形 ABCD において、必ず平行四辺形になるものを、次のア～エから 2 つ選び、記号で答えなさい。

(島根県 2015 年度)

ア $AD \parallel BC, AB=CD$

イ $AD \parallel BC, \angle A = \angle B$

ウ $AD \parallel BC, \angle A = \angle C$

エ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$

解答欄

と

解答

ウとエ

解説

平行四辺形になる条件に合うものを選ぶ。

2 組の辺が平行になるのでウと、2 組の向かい合う角が等しいのでエ