

9. 式の証明の問題（2007 年度出題）

【問 1】

自然数 $1, 2, 3, \dots$ を 1 から 1 つずつ、左から順番に、どの行も同じ個数となるように、縦と横の位置をそろえながら書き並べていきます。下の図は、 1 つの行に 8 個ずつ自然数を書き並べたもので、 $\cdot$ は数字を省略したものです。

このように自然数を書き並べたとき、図の太線で囲まれたような、縦に並ぶ 3 つの数について、あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

（宮城県 2007 年度）

1 行目	1	2	3	4	5	6	7	8
2 行目	9	10	11	12	13	14	15	16
3 行目	17	18	19	20	21	22	23	24
$\vdots$	25	26	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

(1) 1 つの行に 8 個ずつ自然数を書き並べたとき、縦に並ぶ 3 つの数で、最も小さい数の平方と真ん中の数の平方との和が、最も大きい数の平方と等しくなりました。このときの真ん中の数を求めなさい。

(2) 1 つの行に n 個ずつ自然数を書き並べたとき、どの縦に並ぶ 3 つの数についても、最も小さい数と真ん中の数の積と、最も大きい数と真ん中の数の積との平均は、真ん中の数の平方になります。そのわけを文字式を使って説明しなさい。ただし、 n は自然数とします。

解答欄

(1)	
(2)	[わけ]

解答

(1) 32

(2)

真ん中の数を x とすると

最も小さな数は $x-n$

最も大きな数は $x+n$ と表されるので

$$\frac{(x-n)x+(x+n)x}{2} = \frac{x^2-nx+x^2+nx}{2}$$
$$= \frac{2x^2}{2} = x^2$$

したがってこのときの平均は真ん中の数の平方になる。

解説

(1)

真ん中の数を n とおくと 3 つの数は小さい順に $n-8$, n , $n+8$ と表せる。

$$(n-8)^2 + n^2 = (n+8)^2$$

$$n^2 - 16n + 64 + n^2 = n^2 + 16n + 64$$

$$n^2 - 32n = 0$$

$$n(n-32) = 0$$

$$n = 0, 32$$

$$n > 8 \text{ より}$$

$$n = 32$$

【問 2】

春美さんのクラスでは、右の表のような、1 から 36 までの自然数を、上から下へ 6 つずつ、左から右へ、順に書き並べた表をもとにして、この表の中に並んでいる数について、どんなきまりがあるか調べる学習をした。

次は、その学習をしたときの、授業の場面である。あとの問いに答えなさい。

(山形県 2007 年度)

＜授業の場面＞

先生: 例 1 の 1, 7, 13 や 9, 15, 21 のように、表で、横に並んでいる 3 つの自然数に着目するとき、この 3 つの自然数の間で常に成り立つこととして、どんなことがありますか。

春美: はい。横に並んでいる 3 つの数の和は、常に真ん中の数の ア 倍になります。

先生: そうですね。では、例 2 の 1, 2, 7, 8 や 4, 5, 10, 11 のように、縦、横 2 つずつ正方形の形に並んでいる 4 つの自然数に着目すると、4 つの自然数の間で常に成り立つこととして、どんなことがありますか。

明子: はい。右上と左下の数の和と左上と右下の数の和は、常に等しくなります。

先生: そうですね。そのほかに何かありますか。

一郎: 右上と左下の数の積から、左上と右下の数の積を引くと、常に一定の数 6 になります。

先生: なるほど。それでは、一郎さんの述べたことが常に成り立つかどうか、文字式を使って確かめてみましょう。……

(1) ア にあてはまる数を、書きなさい。

(2) 春美さんは、一郎さんの述べた、下線部のことが常に成り立つことを、文字式を使って下のように証明した。

イ ～ エ にはあてはまる文字式をそれぞれ書き、オ には証明のつづきを書いて、証明を完成させなさい。

表

1	7	13	19	25	31
2	8	14	20	26	32
3	9	15	21	27	33
4	10	16	22	28	34
5	11	17	23	29	35
6	12	18	24	30	36

例 1

1	7	13
---	---	----

9	15	21
---	----	----

例 2

1	7	4	10
2	8	5	11

＜証明＞

正方形の形に並んだ 4 つの自然数のうち、左上の数を n とすると、
左下の数は イ，右上の数は ウ，右下の数は エ と表される。

このとき、右上と左下の数の積から、左上と右下の数の積を引くと、

オ

したがって、常に一定の数 6 になる。

解答欄

(1)	ア					
(2)	イ		ウ		エ	
	オ					

解答

(1)

ア 3

(2)

イ $n+1$

ウ $n+6$

エ $n+7$

オ

$$\begin{aligned} & (n+6)(n+1)-n(n+7) \\ &= (n^2+7n+6)-(n^2+7n) \\ &= n^2+7n+6-n^2-7n \\ &= 6 \end{aligned}$$

【問 3】

A さん、B さん、C さんの 3 人は、自然数の計算について次のように考えました。

A さんは連続する 2 つの自然数の計算から、次のことに気づきました。

連続する 2 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 1 をひくと、

$$1^2 + 2^2 - 1 = 4 = 1 \times 2 \times 2$$

$$2^2 + 3^2 - 1 = 12 = 2 \times 3 \times 2$$

$$3^2 + 4^2 - 1 = 24 = 3 \times 4 \times 2$$

⋮

となり、連続する 2 つの自然数の積を 2 倍した数になるんじゃないかな。

B さんは、A さんが気づいたことを次のように証明しました。

(証明)

連続する 2 つの自然数を $n, n+1$ とすると、

$$n^2 + (n+1)^2 - 1 = n^2 + n^2 + 2n + 1 - 1$$

$$= 2n^2 + 2n$$

$$= 2n(n+1)$$

となり、連続する 2 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 1 をひくと、連続する 2 つの自然数の積を 2 倍した数になる。

さらに、C さんは連続する 3 つの自然数の計算から、次のことに気づきました。

連続する 3 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 2 をひくと、

$$1^2 + 2^2 + 3^2 - 2 = 12 = 2^2 \times 3$$

$$2^2 + 3^2 + 4^2 - 2 = 27 = 3^2 \times 3$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 - 2 = 48 = 4^2 \times 3$$

⋮

となり、連続する 3 つの自然数のまん中の数を 2 乗して 3 倍した数になりそうだ。

このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(茨城県 2007 年度)

1 A さんや B さんが考えたことを使って、連続する 2 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 1 をひくと 420 になる 2 つの自然数を求めなさい。

2 C さんが気づいたことについて証明を完成させなさい。

解答欄

1	と
2	(証明) となり, 連続する 3 つの自然数のそれぞれの 2 乗の和から 2 をひくと, 連続する 3 つの自然数のまん中の数を 2 乗して 3 倍した数になる。

解答

1 14 と 15

2

連続する 3 つの自然数を $n-1, n, n+1$ とすると

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 - 2$$

$$= n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 - 2$$

$$= 3n^2$$

解説

1

自然数を $n, n+1$ とすると

$$2n(n+1) = 420$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$(n+15)(n-14) = 0$$

n は自然数より

$$n = 14$$

$$n+1 = 15$$

【問 4】

3, 4, 5 や 5, 6, 7 のような, 奇数から始まる連続する 3 つの整数の和は 6 の倍数になる。このことを文字を使った式を用いて説明しなさい。

(栃木県 2007 年度)

解答欄

説明

解答

説明

最も小さい奇数を $2n+1$ (n は整数) とすると

他の 2 つの整数はそれぞれ $2n+2$, $2n+3$ と表せる。

これらの和は

$$(2n+1) + (2n+2) + (2n+3)$$

$$= 6n+6$$

$$= 6(n+1)$$

$n+1$ は整数だから $6(n+1)$ は 6 の倍数である。

したがって奇数から始まる連続する 3 つの整数の和は 6 の倍数になる。

【問 5】

ある中学校の数学の授業で、次の問題を皆で考えた。次の各問に答えよ。

(東京都 2007 年度)

皆で考えた問題

連続する 4 つの整数を、小さい方から順に、 a, b, c, d とする。

$b \times d - a \times c$ の値と $a + b + c + d$ の値の関係を調べてみよう。

皆で考えた問題で Sさんは、 $b \times d - a \times c$ の値を x 、 $a + b + c + d$ の値を y として、連続する 4 つの整数 a, b, c, d が、0, 1, 2, 3 の場合、3, 4, 5, 6 の場合、6, 7, 8, 9 の場合について、 x の値と y の値をそれぞれ計算した。

その結果、Sさんは、 y は x に比例すると考え、 x と y の関係を次の式で表した。Sさんの比例するという考えと、表した式は正しかった。

〈Sさんの表した式〉

$$y = \boxed{}$$

問1 〈Sさんの表した式〉の $\boxed{}$ に当てはまる式を書け。

Tさんは、[皆で考えた問題]をもとにして、次の問題をつくった。

Tさんがつくった問題

連続する 4 つの整数を、小さい方から順に、 a, b, c, d とする。

$$P = c \times d - a \times b$$

$$Q = a + b + c + d$$

とするとき、 $P=Q$ となることを確かめなさい。

問2 [Tさんがつくった問題]で、 b, c, d をそれぞれもつとも小さい整数 a を使って表し、 $P=Q$ となることを証明せよ。

解答欄

問1	
問2	証明 $b, c, d \text{ をそれぞれもつとも小さい整数 } a \text{ を使って表すと,}$$P=Q$

解答

問1 $2x$

問2

証明

b, c, d をそれぞれもつとも小さい整数 a を使って表すと

$$b=a+1, c=a+2, d=a+3$$

よって

$$\begin{aligned} P &= c \times d - a \times b \\ &= (a+2)(a+3) - a(a+1) \\ &= a^2 + 5a + 6 - a^2 - a \\ &= 4a + 6 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} Q &= a + b + c + d \\ &= a + (a+1) + (a+2) + (a+3) \\ &= 4a + 6 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①②より

$$P=Q$$

解説

問1

$$a, b, c, d \text{ が } 0, 1, 2, 3 \text{ のとき } x=1 \times 3 - 0 \times 2=3, y=0+1+2+3=6$$

$$a, b, c, d \text{ が } 3, 4, 5, 6 \text{ のとき } x=4 \times 6 - 3 \times 5=9, y=3+4+5+6=18$$

$$a, b, c, d \text{ が } 6, 7, 8, 9 \text{ のとき } x=7 \times 9 - 6 \times 8=15, y=6+7+8+9=30$$

$$\text{よって } y=2x$$

【問 6】

右のように，自然数が次の規則にしたがって並んでいる表がある。

規 則

1 行目には 1 から始まる奇数が順に並んでいる。

2 行目以降は，前の行に並んだ数に 1 を加えた数が順に並んでいる。

この表について，次の問いに答えなさい。

(富山県 2007 年度)

問1 9 行目の 5 列目の数を求めなさい。

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	5 列 目	6 列 目	7 列 目	...
1 行 目	1	3	5	7	9	11	13	...
2 行 目	2	4	6	8	10	12	14	...
3 行 目	3	5	7	9	11	13	15	...
4 行 目	4	6	8	10	12	14	16	...
5 行 目	5	7	9	11	13	15	17	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

問2 31 は何個あるか求めなさい。

問3 m 行目の n 列目の数を m, n を使って表しなさい。

問4 表の中の

5	7
6	8

 のような，4 つの自然数の

組

a	b
c	d

 について考える。

このとき， $bc - ad$ の値が常に 2 となることを， b, c, d をそれぞれ a を使って表して証明しなさい。

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	5 列 目	6 列 目	7 列 目	...
1 行 目	1	3	5	7	9	11	13	...
2 行 目	2	4	6	8	10	12	14	...
3 行 目	3	5	7	9	11	13	15	...
4 行 目	4	6	8	10	12	14	16	...
5 行 目	5	7	9	11	13	15	17	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

解答欄

問1	
問2	個
問3	
問4	したがって、$bc-ad$ の値は常に 2 となる。

解答

問1 17

問2 16 個

問3 $m+2n-2$

問4

$b=a+2$, $c=a+1$, $d=a+3$ から

$bc-ad$

$$=(a+2)(a+1)-a(a+3)$$

$$=(a^2+3a+2)-(a^2+3a)$$

$$=a^2+3a+2-a^2-3a$$

$$=2$$

したがって $bc-ad$ の値は常に 2 となる。

解説

問2

31 が 1 行目に出てくるのは $(31+1) \div 2 = 16$ 列目

よって 1 列から 16 列に 1 個ずつあるので 16 個

問3

m 行目の 1 列目は m

1 列右へ行くと 2 ずつ増えるので

n 列目は 1 列目の m より $2(n-1)$ 増えるから

$$m+2(n-1)$$

$$=m+2n-2$$

【問 7】

正の奇数 N を N 個加えた和を M とするとき、 $M-1$ は 4 の倍数であることを、文字式を使って説明せよ。

(香川県 2007 年度)

解答欄

説明

解答

説明

正の奇数 N は整数 n を用いて $N=2n+1$ と表すことができる。

また M は奇数 N を N 個加えた和だから $M=N^2$ である。

したがって

$$M-1=(2n+1)^2-1$$

$$=4n^2+4n$$

$$=4(n^2+n)$$

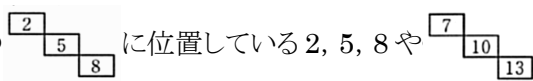
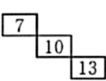
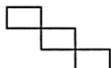
n^2+n は整数だから

$M-1$ は 4 の倍数である。

【問 8】

表は、1 行目に左から順に 1, 2, 3, 4, 5, 6 を記入し、1～6 列目のそれぞれの列に上から順に 2 ずつ大きくなる整数を記入していくものであり、5 行目まで記入されている。6 行目以降も続けていくものとする。

	1 列目	2 列目	3 列目	4 列目	5 列目	6 列目
1 行目	1	2	3	4	5	6
2 行目	3	4	5	6	7	8
3 行目	5	6	7	8	9	10
4 行目	7	8	9	10	11	12
5 行目	9	10	11	12	13	14
6 行目						

右の  に位置している 2, 5, 8 や  に位置している 7, 10, 13 のように、「表の  に位置している 3 つの整数において最も大きい整数

と真ん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数は、9 でわり切れる」ことの証明を、文字を使っての中に完成せよ。

(福岡県 2007 年度)

(証明)

だから、3 つの整数において、最も大きい整数と真ん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数は、9 でわり切れる。

解答欄

解答は上記点線枠に書きなさい。

解答

3 つの整数の真ん中の整数を n とすると最も小さい整数は $n-3$ 、最も大きい整数は $n+3$ である。

最も大きい整数と真ん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひいた数は

$$\begin{aligned} & n(n+3) - (n-3)^2 \\ &= n^2 + 3n - (n^2 - 6n + 9) \\ &= 9n - 9 \\ &= 9(n-1) \end{aligned}$$

であり $9 \times (\text{整数})$ となる。

解説

3 つの整数の真ん中の整数を n とすると最も大きい整数は $n+3$ 、最も小さい整数は $n-3$ と表せる。

最も大きい整数と真ん中の整数の積から最も小さい整数の 2 乗をひくと

$$(n+3) \times n - (n-3)^2 = n^2 + 3n - n^2 + 6n - 9 = 9n - 9 = 9(n-1)$$

$n \geq 2$ の整数だから $n-1$ は整数。

よって $9 \times (\text{整数})$ となるので 9 の倍数である。