

9. 式の証明の問題（2002 年度出題）

【問 1】

図1のように自然数を並べた表があります。

図2のように、この表で縦3つ横3つの9つの数を□で囲むと、「4すみにある数の和は、中央にある数の4倍に等しい。」という関係が成り立ちます。

このとき、どの9つの数を囲んでもこの関係が成り立つわけを、文字の式を使って説明しなさい。

(埼玉県 2002 年度)

図1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	・	・	・	・	・		

図2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	・	・	・	・	・		

$$6+8+26+28=17\times 4$$

解答欄

証明

解答

証明

9つの数のうち最も小さい自然数を n とすると

4すみにある数はそれぞれ $n, n+2, n+20, n+22$ となる。

また中央にある数は $n+11$ となるので

$$n + (n+2) + (n+20) + (n+22)$$

$$= 4n + 44$$

$$= 4(n+11)$$

したがってどの9つの数を囲んでもこの関係が成り立つ。

解説

9つの数のうち最も小さい自然数を n とすると

4すみにある数はそれぞれ $n, n+2, n+20, n+22$ となる。

また中央にある数は $n+11$ となるので

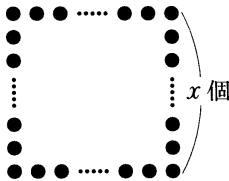
$$n + (n+2) + (n+20) + (n+22) = 4n + 44 = 4(n+11)$$

したがってどの9つの数を囲んでもこの関係が成り立つ。

【問 2】

Aさん、Bさん、Cさんの3人は、授業で次の問題について考えた。

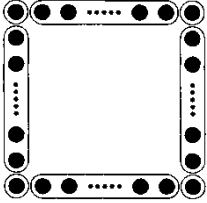
(山梨県 2002 年度)

〔問題〕 右の図のように、各辺に同じ数のボールを並べて、正方形の形をつくる。 1辺に並べるボールの個数を x 個とすると、ボール全部の個数を x の式で表しなさい。	
---	---

(1) この問題に対して、3人は、それぞれ次のような式を立てた。

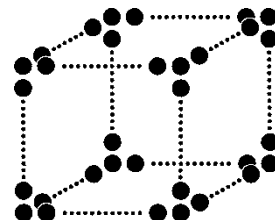
[Aさん]	[Bさん]	[Cさん]
$4(x-2)+4$	$2x+2(x-2)$	$4(x-1)$

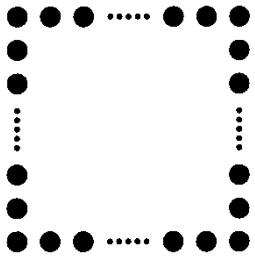
Aさんは、式を立てるのに、次のように考えた。

<Aさんの考え> ボールを図のように線で囲むと、細長い  で囲んだ部分には、$(x-2)$個のボールが並び、それが4つある。それに、すみの4個を足せばよい。	
--	--

Bさん、Cさんのどちらか一方を選び、その人がどのように考えて式を立てたのかが分かるように、解答らんの図をAさんにならって  で囲みなさい。解答らんの[]には、選んだ方を書きなさい。

(2) 最初の問題の「正方形の形」を「立方体の形」に変え、右の図のように、各辺にボールを並べたところ、ボール全部の個数が 92 個になった。このとき、立方体の1辺に並ぶボールの個数を求めなさい。ただし求める過程も書くこと。

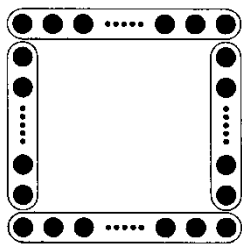


(1)	[さん]	
(2)	求める過程 答 個	

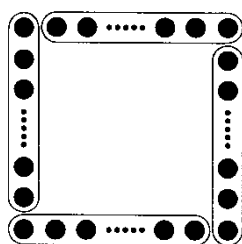
解答

(1)

B さん



C さん



(2)

求める過程

1辺に並べるボールの個数を x 個とすると

ボール全部の個数は $2(4x-4)+4(x-2)$ と表せる。

$$2(4x-4)+4(x-2)=92$$

$$8x-8+4x-8=92$$

$$12x-16=92$$

$$12x=108$$

$$x=9$$

答 9 個

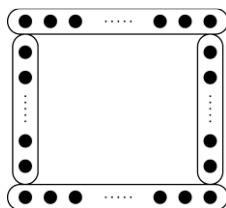
解説

(1)

一例を示すと以下のようになる。

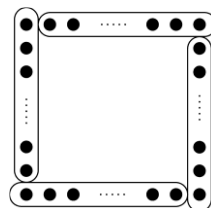
〔B さん〕

4すみのボールをふくんで囲む部分が2つと、ふくまない部分が2つある。



〔C さん〕

4すみのボールの片側をふくむ $(x-1)$ 個のボールを囲んだ部分が4つある。



(2)

1辺に並べるボールの個数を x 個とするとボール全部の個数は $2(4x-4)+4(x-2)$ と表せる。

これが 92 個であることより

$$2(4x-4)+4(x-2)=92$$

$$8x-8+4x-8=92$$

$$12x-16=92$$

$$12x=108$$

$$x=9$$

よって立方体の1辺に並ぶボールの個数は9個である。

【問 3】

直前の2つの数をたしたものが、次の数になるという規則で、数を並べる。例えば、 $-1, 2$ から始めると次のようになる。

$-1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$

(長野県 2002 年度)

- ① この規則を用いて、 $5, -2$ から始めたとき先頭から6番目の数を求めなさい。
- ② ある2つの数からはじめたところ、6番目の数が 17 となった。このとき、8番目の数から5番目の数をひいた差を求めなさい。また、どのように求めたか、説明しなさい。

解答欄

①	
②	差
	説明

解答

① 5

②

差 34

説明

5番目を x とすると

7番目は $x+17$

8番目は $17+x+17=x+34$

よって求める差は

$(x+34)-x=34$

解説

①

$5, -2, 3, 1, 4, 5 \dots$ より先頭から6番目の数は 5 である。

②

5番目を x とすると

7番目は $x+17$

8番目は $17+x+17=x+34$ となる。

よって求める差は $(x+34)-x=34$

【問 4】

メモりのついた3つの容器 A, B, C(いずれも容積は 1000 cm^3)がある。A には 230 cm^3 , B には 270 cm^3 , C には 400 cm^3 の水が入っている。これら3つの容器から1つを選び, その容器の水を他の2つの容器に残さず入れ, 一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方を, 太郎さんと花子さんはそれぞれ考えた。

次の(1)~(4)の問いに答えなさい。

(岐阜県 2002 年度)

(1) A の水をすべて B に入れると, B の水の量は C の水の量の何倍になるかを求めなさい。

(2) 太郎さんは A の水を B と C に残さず入れ一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方を次のように考えた。アには文字を使った式を, イには方程式を, ウ, エには数を, それぞれあてはまるように書きなさい。

A から B に入れる水の量を $x \text{ cm}^3$ とすると A から C に入れる水の量は x を用いて ア cm^3 と表せる。

A の水をすべて B に入れても, B の水の量は C の水の量の2倍にはならない。

よって, C の水の量が B の水の量の2倍になる分け方を考えて, x についての方程式

イ をつくった。

この方程式を解いて, B に ウ cm^3 の水を, C に エ cm^3 の水をそれぞれ入れればよいことがわかった。

(3) 花子さんは, B の水を A と C に残さず入れ, 一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方を次のように考えた。オ〜クにそれぞれあてはまる数を書きなさい。

A, B, C の水の量を合計すると 900 cm^3 になるので, B の水を残さず入れたとき, B 以外の2つの容器の水の量は オ cm^3 と カ cm^3 になればよい。

よって, 最初の A と C の水の量を考えると, A に キ cm^3 の水を, C に ク cm^3 の水をそれぞれ入れればよいことがわかった。

(4) C の水を A と B に残さず入れ, 一方の水の量が他方の水の量の2倍になる分け方をすべて書きなさい。

解答欄

(1)	倍	
(2)	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
(3)	オ	
	カ	
	キ	
	ク	
(4)		

解答

(1) $\frac{5}{4}$ 倍

(2)

ア $(230-x)$

イ $400+(230-x)=2(270+x)$

ウ 30

エ 200

(3)

オ, カ 300, 600 または 600, 300

キ 70

ク 200

(4)

A に 70cm^3 の水を B に 330cm^3 の水をそれぞれ入れる分け方と

A に 370cm^3 の水を B に 30cm^3 の水をそれぞれ入れる分け方

解説

(1)

$$\{(A \text{ の水の量}) + (B \text{ の水の量})\} \div (C \text{ の水の量}) = (230 + 270) \div 400 = \frac{5}{4}$$

(2)

ア

A の水の量は 230 cm^3 だから $230-x$

イ

$$(C \text{ の水の量}) + (230-x) = 2 \times \{(B \text{ の水の量}) + x\} \text{ だから } 400 + (230-x) = 2(270+x)$$

ウ, エ

イの方程式を解くと

$$x=30$$

よって B に 30 cm^3 の水を入れる。

したがって C に入れる水の量は $230-30=200\text{cm}^3$

(3)

オ, カ

900 cm^3 を 1:2 に分けると 300 cm^3 と 600 cm^3 となる。

キ, ク

B の水をすべて A に入れても A の水の量は C の水の量の2倍にはならないから

C の水の量が A の水の量の2倍になることを考えて

A に $300-230=70\text{cm}^3$ を

C に $600-400=200\text{cm}^3$ をそれぞれ入れるとよい。

(4)

(3)と同様の考え方で 900 cm^3 の水を 300 cm^3 と 600 cm^3 に分けると考える。

A を 300 cm^3 , B を 600 cm^3 にすると考えると

A には 70 cm^3 , B には 330 cm^3 の水をそれぞれ入れ

A を 600 cm^3 , B を 300 cm^3 にすると考えると

A には 370 cm^3 , B には 30 cm^3 の水をそれぞれ入れる2通りの分け方がある。

【問 5】

図のように、奇数を 1 から順に6個ずつ並べる。縦、横2個ずつの数を線で囲み、わくの中の4つの数を小さい方から順に a, b, c, d とする。

たとえば

15	17
27	29

のわくでは $a=15, b=17, c=27, d=29$ である。

次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(岐阜県 2002 年度)

(1) $a=19$ のとき、 $a+b+c+d$ の値を求めなさい。

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	・	・
・	・	・	・	・	・
・	・	・	・	・	・

(2) a, b, c, d について調べてみると、次のような関係があることがわかった。

わくをどこにとっても、 $a+b-c-d$ の値は -24 になる。

さらに、 $+$ 、 $-$ の符号のいくつかをかえて調べてみると、次のような関係は2通りあることがわかった。

わくをどこにとっても、 $a-b$ ア c イ d の値は ウ になる。

この関係が成り立つようにア、イにはそれぞれ $+$ か $-$ を、ウには数を、2通り書きなさい。

(3) わくをどこにとっても、 $a+b+c+d$ は 8 の倍数になることを説明しなさい。

解答欄

(1)							
(2)	ア	イ	ウ	または	ア	イ	ウ
(3)							

解答

(1) 104

(2) $a - b + c + d = 0$ または $a + b - c - d = 4$

(3)

$b = a + 2, c = a + 12, d = a + 14$ と表せるので

$$a + b + c + d$$

$$= a + (a + 2) + (a + 12) + (a + 14)$$

$$= 4a + 28 = 4(a + 7)$$

a は奇数だから

$a + 7$ は2の倍数である。

よって $a + b + c + d$ は8の倍数である。

解説

(1)

$a = 19$ のとき $b = 21, c = 31, d = 33$

したがって $a + b + c + d = 19 + 21 + 31 + 33 = 104$

(2)

b, c, d を a で表すと $b = a + 2, c = a + 12, d = a + 14$ となる。

$a - b$ c d の値が でありウが数であるということは、イには異符号がはいるということがわかる。

よって次の2通りとなる。

(i)

$$a - b \text{ } c \text{ } d = a - (a + 2) - (a + 12) + (a + 14) = a - a - 2 - a - 12 + a + 14 = 0$$

$a - b + c + d = 0$

(ii)

$$a - b \text{ } c \text{ } d = a - (a + 2) + (a + 12) - (a + 14) = a - a - 2 + a + 12 - a - 14 = -4$$

$a + b - c - d = 4$

(3)

$b = a + 2, c = a + 12, d = a + 14$ と表せるので

$$a + b + c + d = a + (a + 2) + (a + 12) + (a + 14) = 4a + 28 = 4(a + 7)$$

a は奇数だから

$a + 7$ は2の倍数である。

よって $a + b + c + d$ は8の倍数である。

【問 6】

Mさんは、図1のような「かけ算九九の表」をながめているうち、次のことに気がついた。

「図2のア～エのように、図1の表の81個の数字が並んでいる部分を、1がそれぞれ左上、右上、左下、右下になるように置くと、図2の(例)のように、同じ位置にある4つの数の和は、すべて100になる。」

このことを証明したい。の中に、証明の続きを書きなさい。

(静岡県 2002 年度)

図1

☆かけ算九九の表☆

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図2

ア (1が左上になるとき)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

イ (1が右上になるとき)

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	24	21	18	15	12	9	6	3
36	32	28	24	20	16	12	8	4
45	40	36	30	25	20	15	10	5
54	48	42	36	30	24	18	12	6
63	56	49	42	35	28	21	14	7
72	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

ウ (1が左下になるとき)

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	24	21	18	15	12	9	6	3
36	32	28	24	20	16	12	8	4
45	40	36	30	25	20	15	10	5
54	48	42	36	30	24	18	12	6
63	56	49	42	35	28	21	14	7
72	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

エ (1が右下になるとき)

9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	16	14	12	10	8	6	4	2
27	24	21	18	15	12	9	6	3
36	32	28	24	20	16	12	8	4
45	40	36	30	25	20	15	10	5
54	48	42	36	30	24	18	12	6
63	56	49	42	35	28	21	14	7
72	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

(例)

ア～エで、上から3番目、左から2番目の、で囲まれた4つの数の和は、 $6 + 24 + 14 + 56 = 100$

(証明)

ア～エで、上から m 番目、左から n 番目の数を m と

n で表すと、

アは mn ,

イは $m(10-n)$,

ウは

解答欄

証明の続きは上の枠に書きなさい。

解答

$$n(10-m)$$

エは $(10-m)(10-n)$ となる。

この4つの数の和は

$$\begin{aligned} & mn+m(10-n)+n(10-m)+(10-m)(10-n) \\ &= mn+10m-mn+10n-mn+100-10n-10m+mn \\ &= 100 \end{aligned}$$

したがって同じ位置にある4つの数の和はすべて 100 である。

解説

ア～エで、上から m 番目、左から n 番目の数を m, n で表すと

アは mn

イは $m(10-n)$

ウは $n(10-m)$

エは $(10-m)(10-n)$ となる。

この4つの数の和は

$$\begin{aligned} & mn+m(10-n)+n(10-m)+(10-m)(10-n) \\ &= mn+10m-mn+10n-mn+100-10n-10m+mn \\ &= 100 \end{aligned}$$

したがって同じ位置にある4つの数の和はすべて 100 である。

【問 7】

表は、上の段には 1 から 100 までの整数を、下の段には 100 から 1 までの整数を左から順に並べたものである。

1	2	3	4	5	…	97	98	99	100
100	99	98	97	96	…	4	3	2	1

このとき、次の問い(1)・(2)に答えよ。

(京都府 2002 年度)

(1) 1 から 100 までの整数の和は上の表を利用して次のように求めることができる。

縦に並ぶ2つの数を1組とすると、どの組もその2つの数の和は 101 である。

この表には、これが 100 組あるから、

$$101 \times 100 = 10100$$

これは、1 から 100 までの整数の和の2倍であるから、1 から 100 までの整数の和は、

$$10100 \div 2 = 5050$$

答 5050

この考え方をを用いて、1から 1000 までの整数の和を求めたい。次の

--

 の中にある空欄

㉔

㉓

㉕

 に当てはまる数をそれぞれ答えよ。

1 から 1000 までの整数を、前の表のように2段に並べたとする。このとき、縦に並ぶ2つの数の和は

㉔

 であり、これが 1000 組あるから、1 から 1000 までの整数の和は、

$$\text{㉔} \times 1000 \div \text{㉓} = \text{㉕}$$

答

㉕

(2) 表のように、横、縦に2つずつ隣り合う4つの数を、

--

 で囲み、この 4 つの数を、

a	b
c	d

とする。

1	2	3	4	5	…	97	98	99	100
100	99	98	97	96	…	4	3	2	1

いま、表の中のある部分を、

--

 で囲むと、 $ac - bd = 50$ となった。このときの a に当てはまる数を求めよ。

解答欄

(1)	㉞	
	㉟	
	㊱	
(2)	$a=$	

解答

(1)

㉞ 1001

㉟ 2

㊱ 500500

(2) $a=75$

解説

(1)

1	2	3	...	998	999	1000
1000	999	998	...	3	2	1

表より縦に並ぶ2つの数の和は 1001 となり

1 から 1000 までの整数の和は

$$1001 \times 1000 \div 2 = 500500$$

(2)

b, c, d を a で表すと

$$b = a + 1$$

$$c = 101 - a$$

$$d = 101 - (a + 1) = 100 - a \text{ となり}$$

$ac - bd = 50$ に代入すると

$$a(101 - a) - (a + 1)(100 - a) = 50$$

よって $a = 75$

【問 8】

1 から 9 までの整数を書いたカードが1枚ずつある。この9枚のカードをよくきって、同時に3枚を取り出し、書かれている数を、大きい方から順に a, b, c とする。記号 $\langle a, b, c \rangle$ は、その3つの数を並べてつくることのできる3けたの整数のうち、一番大きな数と一番小さな数の差を表すものとする。

例えば、3つの数が大きい方から順に 8, 5, 2 であったとき、 $\langle 8, 5, 2 \rangle$ は、 $\langle 8, 5, 2 \rangle = 852 - 258 = 594$ となる。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(鳥取県 2002 年度)

問1 $\langle 9, 6, 4 \rangle$ を計算しなさい。

問2 $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えのうち、最大の数はいくらになるか求めなさい。

問3 $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えは 99 の倍数になることを、次のように証明した。

ア ～ ウ にあてはまる式を書きなさい。

証明

3つの整数 a, b, c ($a > b > c$) において、

$$\langle a, b, c \rangle = (100a + 10b + c) - (\text{ア})$$

$$= \text{イ} - 99c$$

$$= 99(\text{ウ}) \text{ となる。}$$

ここで、ウ は整数なので、 $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えは 99 の倍数である。

問4 $\langle a, b, c \rangle$ を計算した答えが 297 となった。このようになる3つの整数 a, b, c ($a > b > c$) の組は、全部で何組あるか求めなさい。

解答欄

問1		
問2		
問3	ア	
	イ	
	ウ	
問4	組	

解答

問1 495

問2 792

問3

ア $100c + 10b + a$

イ $99a$

ウ $a - c$

問4 12組

解説

問1

$$\langle\langle 9, 6, 4 \rangle\rangle = 964 - 469 = 495$$

問2

a をできるだけ大きく c をできるだけ小さくすればよいので $a=9$, $c=1$ となる。

b はどのような数でもよいので

$$\text{たとえば } b=5 \text{ とすると } \langle\langle 9, 5, 1 \rangle\rangle = 951 - 159 = 792$$

問3

$$\langle\langle a, b, c \rangle\rangle = (100a + 10b + c) - \underline{(100c + 10b + a_{\text{ア}})}$$

$$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$

$$= \underline{99a_{\text{イ}}} - 99c$$

$$= 99(\underline{a - c}_{\text{ウ}})$$

問4

$$99(a - c) = 297 \text{ より}$$

$$a - c = 3$$

よって a, c の組み合わせは

$(a, c) = (4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4), (8, 5), (9, 6)$ の6通り。

そのそれぞれについて b の選び方が2通りずつあるから

a, b, c の組は全部で $6 \times 2 = 12$ 組

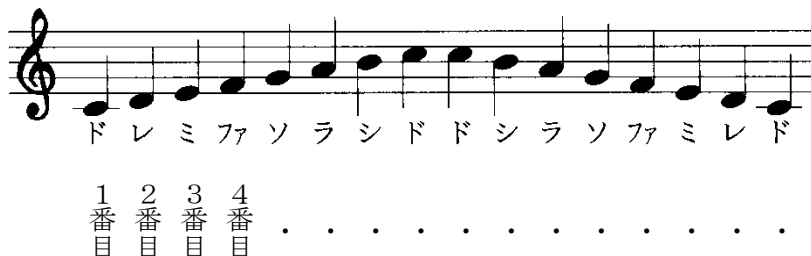
【問 9】

図をみてピアノを弾き、それを3回繰り返した。このとき、ド、レ、ミ、ファ、ソ、ラ、シ、ドのそれぞれの音を弾いた順番をあとの表にまとめた。

次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2002 年度)

図



表

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41

- (1) 上の表で、ある自然数 n を使って表される4つの数 $n, n+1, n+10, n+11$ が、

$n+1$	$n+1$
$n+10$	$n+11$

 のように並んでいる部分がある。このような部分を1つ見つけ、そのときの n の値を求めなさい。

- (2) 上の表で、自然数 a, b, c, d が、

a
b
c
d

 のように縦に並んだ4つの数の組について考えると、すべての組について、 $(a+d)-(b+c)=0$ という関係がある。このことを、 c は a を使った式で表し、 d は b を使った式で表して説明しなさい。

解答欄

(1)	$n =$
(2)	説明

解答

(1) $n=11$ 又は $n=27$

(2)

c, d は $c=a+16, d=b+16$ と表されるので

$$(a+d)-(b+c)=(a+b+16)-(b+a+16)=0$$

したがって $(a+d)-(b+c)=0$ という関係がある。

解説

(1)

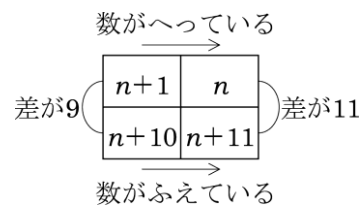
右のような状況のところを探すと $n=11$ か 27 とわかる。

(2)

c, d は $c=a+16, d=b+16$ と表されるので

$$(a+d)-(b+c)=(a+b+16)-(b+a+16)=0$$

したがって $(a+d)-(b+c)=0$ という関係がある。

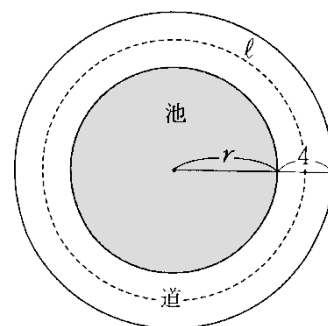


【問 10】

図のように、半径 r m の円形の池の周囲に、幅 4 m の道がついている。この道の面積を S m²、道のまん中を通る円周の長さを ℓ m とすると、 $S = 4\ell$ となる。

下の の中にあてはまる式を記入し、 $S = 4\ell$ となることの証明を、 の中に完成せよ。

ただし、円周率は π のまま用いること。



(福岡県 2002 年度)

(証明)

道の面積 S を、 r を使った式で表すと、

$$S = \pi (\text{ })^2 - \pi r^2 \text{ である。}$$

この式の右辺を計算すると、

解答欄

問題中の解答欄に記載

解答

$r+4$ または $4+r$

$$S = \pi (r^2 + 8r + 16) - \pi r^2$$

$$= 8\pi r + 16\pi$$

$$= 8\pi (r+2)$$

道のまん中を通る円の半径は $r+2$ だから

その円周の長さ ℓ は

$$\ell = 2\pi (r+2)$$

$$4\ell = 8\pi (r+2)$$

よって $S = 4\ell$ になる。

解説

道の面積 S は

半径 $r+4$ の大きな円の面積から半径 r の小さな円の面積をひいたものであるから

$$S = \pi (r+4)^2 - \pi r^2 \text{ である。}$$

この右辺を計算すると

$$S = \pi (r^2 + 8r + 16) - \pi r^2 = 8\pi r + 16\pi = 8\pi (r+2)$$

道のまん中を通る円の半径は

$r+2$ だから

その円周の長さ ℓ は

$$\ell = 2\pi (r+2)$$

$$4\ell = 8\pi (r+2)$$

よって $S = 4\ell$ となる。