9. 式の証明の問題（2021 年度出題）

【問 1】

次の文章は，異なる 2 つの自然数が，ともに偶数であるときの和と積について考えているレンさんとメイさんの会話である。$\boxed{ア}$ には式，$\boxed{イ}$ には語，$\boxed{ウ}$ ～ $\boxed{オ}$ には自然数をそれぞれ入れなさい。

（青森県 2021 年度）

レン：たとえば，和は

2＋4＝6，4＋10＝14，12＋18＝30

となるので，必ず偶数になると予想できるよ。

メイ：その予想は正しいといえるのかな。

レン：では，そのことを証明してみるよ。

m，n を異なる自然数とすると，

異なる 2 つの偶数は $2m$，$2n$ と表すことができるから，

$2m+2n=2(\boxed{ア})$ となる。

$\boxed{ア}$ は自然数だから，$2(\boxed{ア})$ は必ず $\boxed{イ}$ になる。

したがって，異なる 2 つの偶数の和は，$\boxed{イ}$ であるといえるよ。

メイ：予想が正しいことを証明できたね。今度は，積はどうなるか，同じように考えてみるよ。

たとえば，積は

2×4＝8，　4×10＝40，　12×18＝216

となるので，必ず 8 の倍数になると予想できそうだね。

レン：その予想も正しいといえるのかな。

たとえば，$\boxed{ウ}$ と $\boxed{エ}$ の積は $\boxed{オ}$ となり，8 の倍数ではないから，

必ずいえることにはならないよ。

メイ：なるほど。成り立たない場合があるから，予想は正しくないんだね。

解答欄

ア	
イ	
ウ	
エ	
オ	

解答
ア $m+n$
イ 偶数
ウ 2
エ 6
オ 12

【問 2】

「3 けたの自然数から，その数の各位の数の和をひくと，9 の倍数になる」ことを，次のように説明した。［説明］が正しくなるように，**ア**に説明の続きを書き，完成させなさい。

（秋田県 2021 年度）

［説明］

3 けたの自然数の百の位の数を a，十の位の数を b，一の位の数を c とすると，3 けたの自然数は，$100a+10b+c$ と表すことができる。各位の数の和をひくと，
ア
したがって，3 けたの自然数から，その数の各位の数の和をひくと，9 の倍数になる。

解答欄

ア	

解答

ア

$100a+10b+c-(a+b+c)$

$=99a+9b$

$=9(11a+b)$

$11a+b$ は整数だから，

$9(11a+b)$ は 9 の倍数となる。

解説

「9 の倍数になる」ことを証明するので，「9×整数」の形を目指して式変形を行う。

【問 3】

「連続する 3 つの整数の和は，3 の倍数である」

このことを次のように説明した。

（説明）

連続する 3 つの整数のうち，もっとも小さい整数を n とすると，連続する 3 つの整数は小さい順に n， ア ， イ と表すことができる。

ここで，

n＋(ア)＋(イ)＝3(ウ)

ウ は整数だから，3(ウ) は 3 の倍数である。

したがって，連続する 3 つの整数の和は，3 の倍数である。

このとき，上の ア ～ ウ に当てはまる式を，それぞれ書きなさい。

（茨城県 2021 年度）

解答欄

ア	
イ	
ウ	

解答

ア $n+1$

イ $n+2$

ウ $n+1$

解説

連続する整数(自然数)の表し方

・連続する 2 つの整数(自然数)は，小さい方の整数(自然数)を n とすると，n，$n+1$ と表せる。

・連続する 3 つの整数(自然数)は，最も小さい整数(自然数)を n とすると，n，$n+1$，$n+2$ と表せる。

・連続する 3 つの整数(自然数)は，中央の整数(自然数)を n とすると，$n-1$，n，$n+1$ と表せる。

【問 4】

次は，先生と A さんの会話です。これを読んで，下の各問に答えなさい。

(埼玉県 2021 年度)

先　生　「次の表は，式 $3x+5$ について，x に 1 から順に自然数を代入したときの $3x+5$ の値を表したものです。表をみて気づいたことはありますか。」

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$3x+5$	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	…

A さん　「表をみると，x に 1，5，9 を代入したときの $3x+5$ の値が，すべて 4 の倍数になっています。」

先　生　「1，5，9 の共通点はありますか。」

A さん　「1 も 5 も 9 も，4 で割ると 1 余る数です。」

先　生　「4 で割ると 1 余る自然数は他にありますか。」

A さん　「あります。1，5，9 の次の数は $\boxed{\text{ア}}$ です。」

先　生　「x に $\boxed{\text{ア}}$ を代入したときの $3x+5$ の値は 4 の倍数になるでしょうか。」

A さん　「$\boxed{\text{ア}}$ を代入したときの $3x+5$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ なので，これも 4 の倍数になっています。」

先　生　「そうですね。これらのことから，どのような予想ができますか。」

A さん　「<u>$3x+5$ の x に，4 で割ると 1 余る自然数を代入すると，$3x+5$ の値は 4 の倍数になる</u>と予想できます。」

問 1　$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる自然数を書きなさい。

問 2　下線部の予想が正しいことを，次のように証明しました。$\boxed{①}$ にあてはまる式を書きなさい。また，$\boxed{②}$ に証明の続きを書いて，証明を完成させなさい。

(証明)

n を 0 以上の整数とすると，4 で割ると 1 余る自然数は $\boxed{①}$ と表される。

$\boxed{\qquad\qquad ② \qquad\qquad}$

したがって，$3x+5$ の x に，4 で割ると 1 余る自然数を代入すると，$3x+5$ の値は 4 の倍数になる。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">問１</td><td>ア</td><td></td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">問２</td><td colspan="2">〔証明〕
n を０以上の整数とすると，
４で割ると１余る自然数は</td></tr>
<tr><td>①</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">と表される。</td></tr>
<tr><td>②</td><td></td></tr>
</table>

解答

問１

ア 13

イ 44

問２

①

$4n+1$

②

これを $3x+5$ の x に代入すると，

$3(4n+1)+5=12n+8$

$=4(3n+2)$

$3n+2$ は整数だから，$4(3n+2)$ は４の倍数である。

解説

３の倍数を，整数 n を用いて表すと，$3n$ であり，３で割ると２余る数は，$3n+2$ と表せる。

【問 5】

次は，A さんが授業中に発表している場面の一部です。これを読んで，下の各問に答えなさい。

（埼玉県 2021 年度）

次の表は，式 $3x+5$ について，x に 1 から順に自然数を代入したときの $3x+5$ の値を表したものです。

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$3x+5$	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	…

この表をみて私が気づいたことは，

x に 1，5，9 を代入したときの値が，4 の倍数になっていることです。

1 も 5 も 9 も，4 で割ると 1 余る自然数であることから，

$3x+5$ の x に，4 で割ると 1 余る自然数を代入すると，$3x+5$ の値は 4 の倍数になる。

と予想しました。

問 1　下線部の予想が正しいことを証明しなさい。その際，「n を 0 以上の整数とすると，」に続けて書きなさい。

問 2　この発表を聞いて，B さんと C さんはそれぞれ次のような予想をしました。

【B さんの予想】，【C さんの予想】の内容が正しいとき，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる 1 けたの自然数をそれぞれ書きなさい。

【B さんの予想】

$3x+5$ の x に，$\boxed{\text{ア}}$ で割ると $\boxed{\text{イ}}$ 余る自然数を代入すると，

$3x+5$ の値は 7 の倍数になる。

【C さんの予想】

$3x+5$ の x に自然数を代入したときの値を，3 で割ると余りは 2 になり，

$(3x+5)^2$ の x に自然数を代入したときの値を，3 で割ると余りは $\boxed{\text{ウ}}$ になる。

解答欄

問１	〔証明〕 n を 0 以上の整数とすると,	
問２	ア	
	イ	
	ウ	

解答
問１
〔証明〕n を 0 以上の整数とすると,
4 で割ると 1 余る自然数は $4n+1$ となる。
これを $3x+5$ の x に代入すると,
$3(4n+1)+5=12n+8$
$=4(3n+2)$
$3n+2$ は整数だから，$4(3n+2)$ は 4 の倍数である。
したがって，$3x+5$ の x に，4 で割ると 1 余る自然数を代入すると，$3x+5$ の値は 4 の倍数になる。
問２
ア 7
イ 3
ウ 1
解説
問２
【B さんの予想】について
問題文中の表より，$3x+5$ の値が 7 の倍数となっているのは
$x=3$，10 のときである。どちらも 7 で割ると 3 余る自然数なので，その予想が正しいかを確かめてみる。
$x=7k+3$（k は 0 以上の整数）とおき，$3x+5$ に代入すると
$3(7k+3)+5=21k+14=7(3k+2)$ より，必ず 7 の倍数となることがわかる。
【C さんの予想】について
$(3x+5)^2=9x^2+30x+25=9x^2+30x+24+1=3(3x^2+10x+8)+1$ より
3 で割ると余りは 1 になることがわかる。

【問 6】

連続する 4 つの整数のうち，1 つの数を除いた 3 つの整数の和は 2021 である。(1)，(2) の問いに答えよ。

(奈良県 2021 年度)

(1) 連続する 4 つの整数のうち，最も小さい数を a とするとき，最も大きい数を a を用いて表せ。

(2) 除いた数を求めよ。

解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1) $a+3$

(2) 673

解説

(2)

連続する 4 つの整数を a，$a+1$，$a+2$，$a+3$ とすると

a を除いた 3 つの整数の和は，$(a+1)+(a+2)+(a+3)=3a+6=3(a+2)$

$a+1$ を除いた 3 つの整数の和は，$a+(a+2)+(a+3)=3a+5=3(a+1)+2$

$a+2$ を除いた 3 つの整数の和は，$a+(a+1)+(a+3)=3a+4=3(a+1)+1$

$a+3$ を除いた 3 つの整数の和は，$a+(a+1)+(a+2)=3a+3=3(a+1)$

$2021=3\times673+2$ と表すことができるから

2021 は $a+1$ を除いた 3 つの整数の和であるとわかる。

このとき，$3\times673+2=3(a+1)+2$ だから，$a+1=673$

【問 7】

孝さんと桜さんは，連続する 2 つの偶(ぐう)数の積に 1 を加えた数がどのような数になるか次のように調べた。

調べたこと

$2\times4+1=\ \ 9=3^2$
$4\times6+1=25=5^2$
$6\times8+1=49=7^2$
全て奇数の 2 乗になっている。

調べたことから，次のように予想した。

予想

連続する 2 つの偶数の積に 1 を加えた数は，奇数の 2 乗になる。

次の**問１**～**問３**に答えよ。

（福岡県 2021 年度）

問１　**予想**がいつでも成り立つことの**証明**を完成させよ。

証明

連続する 2 つの偶数は，整数 m を用いると，

したがって，連続する 2 つの偶数の積に 1 を加えた数は，奇数の 2 乗になる。

問２　孝さんと桜さんは，**予想**の「連続する２つの偶数」を「２つの整数」に変えても，それらの積に１を加えた数は，奇数の２乗になるか話し合った。次の会話文は，そのときの内容の一部である。


孝さん

例えば2つの整数が2と6だと，それらの積に1を加えると13だから，奇数の2乗にならないよ。

1と3だと，それらの積に1を加えると4だから，奇数の2乗にならないけど，整数の2乗にはなるよ。


桜さん

本当だね。(　A　)の積に1を加えると，整数の2乗になるのかな。

文字を用いて考えてみようよ。

①(　A　)は，整数nを用いると，n，n+2と表されるから，これを用いて計算すると，整数の2乗になることがわかるよ。

確かにそうだね。計算した式をみると，②(　A　)の積に1を加えると，(　B　)の2乗になるということもわかるね。

下線部②は，下線部①のｎがどのような整数でも成り立つ。(Ａ)，(Ｂ)にあてはまるものを，次の**ア**～**ク**からそれぞれ１つ選び，記号をかけ。

ア　連続する２つの奇数　　　　**オ**　もとの２つの数の間の整数

イ　異なる２つの奇数　　　　　**カ**　もとの２つの数の間の偶数

ウ　和が４である２つの整数　　**キ**　もとの２つの数の和

エ　差が２である２つの整数　　**ク**　もとの２つの数の差

問３　次に，孝さんと桜さんは，連続する５つの整数のうち，異なる２つの数の積に**<u>１以外の自然数</u>**を加えた数が，整数の２乗になる場合を調べてまとめた。

まとめ

連続する５つの整数のうち， （ X ）と（ Y ）の積に（ Ⓟ ）を加えた数は，（ Z ）の２乗になる。

上の**まとめ**はいつでも成り立つ。（ X ），（ Y ），（ Z ）にあてはまるものを，次の**ア**～**オ**からそれぞれ１つ選び，記号をかけ。また，（ Ⓟ ）にあてはまる１以外の自然数を答えよ。

ア　最も小さい数
イ　２番目に小さい数
ウ　真ん中の数
エ　２番目に大きい数
オ　最も大きい数

解答欄

問１	〔証明〕 連続する２つの偶数は，整数 m を用いると， したがって，連続する２つの偶数の積に１を加えた数は，奇数の２乗になる。	
問２	A	
	B	
問３	X	
	Y	
	Z	
	Ⓟ	

解答
問１
〔証明〕
連続する２つの偶数は，整数 m を用いると
小さい方の数が 2m，大きい方の数が 2m＋2 と表される。
連続する２つの偶数の積に１を加えた数は
$2m(2m+2)+1=4m^2+4m+1$
$=(2m+1)^2$
m は整数だから，2m＋1 は奇数である。
したがって，連続する２つの偶数の積に１を加えた数は，奇数の２乗になる。
問２
Ａエ
Ｂオ
問３
Ｘア
Ｙオ
Ｚウ
Ⓟ4
解説
問２
Ａ
整数 n を用いると，n，$n+2$ と表されることから，$(n+2)-n=2$ であるから，差が２である２つの整数であることがわかる。
Ｂ
Ａの積に１を加えると，$n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$ より，もとの２つの整数の間の整数となることがわかる。
問３
連続する５つの整数は，真ん中の数を n とすると，$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$ と表される。最も小さい数と最も大きい数の積が，$(n-2)(n+2)=n^2-4$ であるから，４を加えると n^2 となり，真ん中の数の２乗になる。

【問 8】

2021 の各位の数 2，0，2，1 の和を求めると 5 になる。このように，各位の数の和が 5 である 4 けたの自然数のうち，大きいほうから数えて 5 番目の自然数を求めよ。

（長崎県 2021 年度）

解答欄

解答
3200
解説
各位の数の和が 5 である 4 けたの自然数を大きい方から並べると
5000，4100，4010，4001，3200 となる。

【問 9】

桜さんと昇さんと先生は，図のようなカレンダーを見ながら，で囲まれた 5 つの数について話をしている。3 人の会話を読んで，あとの (1) ～ (3) に答えよ。

（長崎県 2021 年度）

図

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

桜さん：で囲まれた 5 つの数のうち，中央の数が 8 のとき，中央以外の 4 つの数の和は 1＋7＋9＋15 で，32 になっているよ。

昇さん：中央の数が 8 でないとき，中央以外の 4 つの数の和はどうなるのかな。

桜さん：中央の数が （ア） のとき，中央以外の 4 つの数の和は 44 になっているよ。

先　生：実は，で囲まれた 5 つの数のうち，中央以外の 4 つの数の和は必ず 4 の倍数になります。このことを次のようにして，証明してみましょう。

〈証明〉で囲まれた 5 つの数を，小さいほうから順に a，b，c，d，e とする。また，中央以外の 4 つの数の和を P とすると，P＝$a+b+d+e$ である。

このあとは，a，b，c，d，e のうちの 1 つを x とおいて進めていきましょう。

昇さん：続きは，私がやってみます。a，b，c，d，e のどれを x とおいても証明できますが，私は （イ） を x とおいて証明します。

〈証明〉の続き)

（イ） を x とおくと，残りの 4 つの数は x を用いて，小さいほうから順に

（ウ），（エ），（オ），（カ） と表される。

このとき，P は

（キ）

したがって，中央以外の 4 つの数の和は 4 の倍数になる。

先　生：そのとおりです。よくできました。

(1) $\boxed{（ア）}$ にあてはまる数を求めよ。

(2) $\boxed{（イ）}$ に a，b，c，d，e の中から 1 つ選んで書き，そのとき $\boxed{（カ）}$ にあてはまる数を x を用いて表せ。

(3) 下線部で示した内容の〈**証明**〉の一部を $\boxed{（キ）}$ に書き入れて，〈**証明**〉を完成させよ。ただし，解答用紙の「P＝」に続けて書くこと。

解答欄

(1)	（ア）	
(2)	（イ）	
	（カ）	
(3)	（キ）	P＝ したがって，中央以外の 4 つの数の和は 4 の倍数になる。

解答
(1)
(ア)11
(2)
(イ)c
(カ)$x+7$
(3)
(キ)
$\mathrm{P}=a+b+d+e$
$=(x-7)+(x-1)+(x+1)+(x+7)$
$=4x$
x は整数だから，$4x$ は 4 の倍数である。
〔したがって，中央以外の 4 つの数の和は 4 の倍数になる。〕
解説
(1)
たとえば，中央の数を 9 としてみると，中央以外の 4 つの数の和は，2＋8＋10＋16＝36 となる。
問題文中の例より
中央の数を 8 とすると，和は 32 であったこととあわせて
中央以外の 4 つの数の和は，中央の数の 4 倍となるのではないか，という予想が立てられる。
よって，中央以外の 4 つの数の和が 44 のとき，中央の数は，44÷4＝11 であると予想できる。
念のため確かめてみると，中央以外の 4 つの数の和は，4＋10＋12＋18＝44 となり
正しいことがわかる。

【問 10】

2 けたの自然数について，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県 2021 年度）

問１　「2 けたの自然数を，十の位の数と一の位の数を用いて表す」ことについて，先生と A さんは次のような【会話】をした。次の，$\boxed{①}$ ～ $\boxed{③}$ に最も適する数を入れなさい。

【会話】

先　生：2 けたの自然数を，十の位の数と一の位の数を用いて表してみよう！

例えば，23＝20＋ $\boxed{①}$

＝ $\boxed{②}$ ×2＋ $\boxed{①}$ と表せますね。

A さん：はい。

先　生：では，35 の場合はどうですか？

A さん：35＝30＋ $\boxed{③}$

＝ $\boxed{②}$ ×3＋ $\boxed{③}$

先　生：そうですね。

つまり，2 けたの自然数は，

$\boxed{②}$ ×(十の位の数)＋(一の位の数)

と表されますね。

問２　「2 けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は，11 の倍数になる」ことを次のように説明した。次の $\boxed{④}$ ～ $\boxed{⑥}$ に最も適する式を入れなさい。

《説明》

2 けたの自然数の十の位の数を a，一の位の数を b とすると

2 けたの自然数は $\boxed{④}$ ，

十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は $\boxed{⑤}$ と表される。

このとき，これらの和は ($\boxed{④}$)＋($\boxed{⑤}$)＝11($\boxed{⑥}$)

$\boxed{⑥}$ は整数であるから，11($\boxed{⑥}$) は 11 の倍数である。

したがって，2 けたの自然数と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は，11 の倍数になる。

問３　「ある 2 けたの自然数 X と，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数 Y との和が 132 になる」とき，もとの自然数 X として考えられる数をすべて求めなさい。ただし，もとの自然数 X は，十の位の数が一の位の数より大きいものとする。

解答欄

問１	①	
	②	
	③	
問２	④	
	⑤	
	⑥	
問３		

解答
問１
①3
②10
③5
問２
④$10a+b$
⑤$10b+a$
⑥$a+b$
問３75，84，93
解説
問３
もとの自然数Ｘの十の位の数を a，一の位の数を b とすると，$X=10a+b$ と表せる。
また，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数は，$Y=10b+a$ と表せる。
よって，その和は
$10a+b+10b+a=132$
$11a+11b=132$
$a+b=12$
これを満たす９以下の自然数 a，b $(a>b)$の値の組は
$(a, b)=(7, 5), (8, 4), (9, 3)$
よって，もとの自然数Ｘは，75，84，93 である。