

9. 式の証明の問題（2009 年度出題）

【問 1】

美咲さんと健司さんは、「一の位が 5 である 2 けたの自然数の 2 乗」を暗算で計算する方法を、次の計算結果をもとに考えています。

$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 1225 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 2025 \end{array}$	$\begin{array}{r} 55 \\ \times 55 \\ \hline 3025 \end{array}$	...
---	---	---	-----

美咲さんは、答えを下 2 けたで区切って考え、〈方法 1〉で計算できることを予想しました。

美咲さん

〈方法 1〉

例

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 12 \mid 25 \\ \downarrow \\ \boxed{3 \times (3 + 1)} \end{array}$$

・ の部分（答えの下 2 けた）は、25 にする。

・ の部分（答えの千の位と百の位）は、もとの数の十の位の数とそれに 1 を加えた数の積にする。

（秋田県 2009 年度）

- (1) 健司さんは、45 の 2 乗のときにも〈方法 1〉のとおりになっていることを、右のように確認しました。アにあてはまる式を〈方法 1〉の例にならって書きなさい。

健司さん

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 20 \mid 25 \\ \downarrow \\ \boxed{\text{ア}} \end{array}$$

- (2) 健司さんは、〈方法 1〉が正しいことを次のように証明しました。イ、エにはもっとも適切な式を、ウには数を書き、証明を完成させなさい。

証明

十の位の数を a とすると、一の位が 5 である 2 けたの自然数は、イ と表される。

このとき、その数の 2 乗は、

$$(\text{イ})^2$$

$$= \text{ウ} a^2 + \text{ウ} a + 25$$

$$= \text{ウ} \times \text{エ} + 25$$

したがって、〈方法 1〉は成り立つ。

(3) 次に、美咲さんと健司さんは、「十の位の数の和が 10 で、一の位の数が同じである 2 つの 2 けたの自然数の積」にも暗算で計算できる方法があるのではないかと思います、次のようにいくつかの場合を調べ、〈方法 2〉を見つけた。オ、カにあてはまる適切な言葉を書きなさい。

$\begin{array}{r} 21 \\ \times 81 \\ \hline 17 \underline{01} \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ \times 74 \\ \hline 25 \underline{16} \end{array}$	$\begin{array}{r} 75 \\ \times 35 \\ \hline 26 \underline{25} \end{array}$	...
--	--	--	-----

〈方法 2〉

・ の部分 (答えの下 2 けた) は、2 つの 2 けたの自然数の オ の 2 乗にする。ただし、2 乗して 1 けたの数になる場合は、十の位の数を 0 にする。

・ の部分 (答えの千の位と百の位) は、2 つの 2 けたの自然数の カ にする。

解答欄

(1)	ア	
(2)	イ	
	ウ	
	エ	
(3)	オ	
	カ	

解答

- (1) ア $4 \times (4 + 1)$
 (2) イ $10a + 5$ ウ 100 エ $a(a + 1)$
 (3) オ 一の位の数 カ 十の位の数の積と、一の位の数との和

解説

(3)
 2 つの 2 けたの自然数の一の位は同じであるから $10a + b$, $10c + b$ とおく。
 $(a + c = 10)$
 $(10a + b)(10c + b)$
 $= 100ac + 10ab + 10bc + b^2$
 $= 100ac + 10b(a + c) + b^2$
 $= 100ac + 100b + b^2$
 $= 100(ac + b) + b^2$
 よって答えの下 2 けたは 2 つの 2 けたの自然数の「一の位の数」の 2 乗にする。
 答えの千の位と百の位は 2 つの 2 けたの自然数の「十の位の数の積と一の位の数との和」にする。

【問 2】

次の文は、ある中学校の生徒 2 人の会話の一部である。この文を読んで、下の問1、問2に答えなさい。

(新潟県 2009 年度)

A さん： 2 けたの自然数を思い浮かべてみて。その 2 けたの数を当ててみせるよ。

B さん： じゃあ、やってみて。

A さん： 例えば、君が 28 を思い浮かべたとするよ。その数を 100 倍した数 2800 と、思い浮かべた数の十の位の数と一の位の数を入れ替えた数 82 を足すと、2882 になるね。こんなふうに、4 けたの数を作ってほしいんだ。まず、28 以外の 2 けたの自然数を思い浮かべてみて。

B さん： 思い浮かべたよ。

A さん： 次に、I 思い浮かべた数を 100 倍した数と、思い浮かべた数の十の位の数と一の位の数を入れ替えた数を足して、4 けたの数を作ってごらん。

B さん： できたよ。

A さん： その 4 けたの数は 11 の倍数になるんだ。その 4 けたの数を 11 で割った商を X とするよ。X の十の位の数と一の位の数を教えて。

B さん： 十の位の数は ア で、一の位の数は 7 だよ。

A さん： 君が思い浮かべた数は、75 だね。

B さん： そのとおり。でも、どうしてわかったの。

A さん： 実は、II 思い浮かべた数の十の位の数と、X の一の位の数は同じなんだ。

B さん： じゃあ、一の位の数はどうしてわかったの。

A さん： 君が教えてくれた X の十の位の数と一の位の数を足すと イ になるね。X の十の位の数と一の位の数の和を Y とすると、III 思い浮かべた数の一の位の数と、Y の一の位の数は同じなんだよ。

問1. ア，イ に当てはまる数を、それぞれ答えなさい。

問2. 思い浮かべた数がどんな 2 けたの自然数であっても、A さんが話した方法で、その数を言い当てることができる。このことを確かめるために、思い浮かべた数の十の位の数を a ，一の位の数を b として、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

- (1) 下線部分 I の手順で 4 けたの数を作ると、その数はどのように表すことができるか、 a ， b を用いて表しなさい。
- (2) 下線部分 I の手順で 4 けたの数を作ると、その数は 11 の倍数になることを、 a ， b を使って説明しなさい。
- (3) 下線部分 II，III について、このことがそれぞれ成り立つことを、 a ， b を使って説明しなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
問2	(1)	
	(2)	説明
	(3)	説明

解答

問1

ア 8 イ 15

問2

(1) $001a+110b$

(2)

$$1001a+110b=11(91a+10b)$$

$91a+10b$ は自然数だから

これは 11 の倍数である。

(3)

$$X=91a+10b=10(9a+b)+a\cdots\textcircled{1}$$

$10(9a+b)$ は 10 の倍数だから X の一の位の数は a である。

よって下線部分Ⅱは成り立つ。

①から X の十の位の数は $9a+b$ の一の位の数であり

Y は $9a+b$ の一の位の数と a の和である。

よって Y の一の位の数は $(9a+b)+a=10a+b$ の一の位の数と等しい。

$10a$ は 10 の倍数だから Y の一の位の数は b である。

よって下線部分Ⅲは成り立つ。

解説

問2

(1)

思い浮かべた数は $10a+b$ と表せる。

この数の 100 倍である $(10a+b)\times 100$ と

十の位と一の位を入れかえた $10b+a$ を足せばよいので

$$1000a+100b+10b+a$$

$$=1001a+110b$$

(2)

$$1001a+110b$$

$$=11\times 91a+11\times 10b$$

$$=11(91a+10b)$$

よって 11 の倍数となる。

(3)

$$X=91a+10b=(90a+10b)+a=10(9a+b)+a$$

よって X の一の位は a だから

これは思い浮かべた数の十の位と一致する。

X の十の位の数は $9a+b=10a+(b-a)$ より $b-a$ と考えられる。

よって $Y=b-a+a=b$ より

X の十の位と一の位の和 Y は思い浮かべた数の一の位の数と一致する。

【問 3】

図 1 は花子さんが大学生の兄の太郎さんと交わした会話の一部を示したものであり、図 2 は花子さんが太郎さんに見せたノートの記事である。

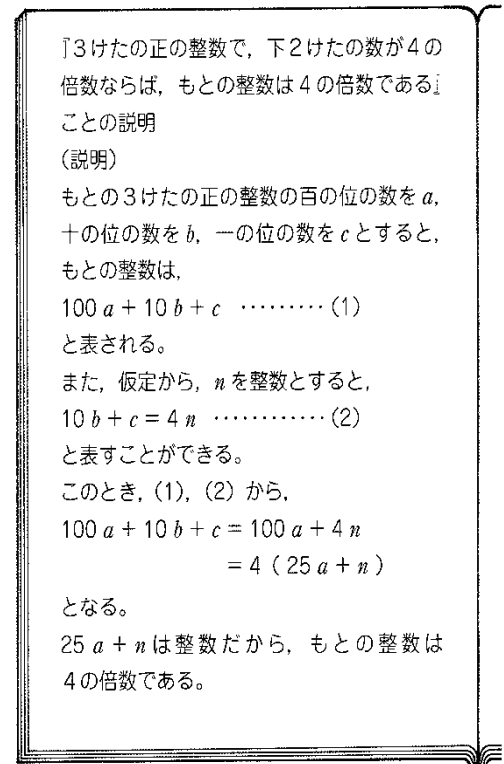
これらを読んで、問1～問3に答えなさい。

(岡山県 2009 年度)

図 1



図 2



問1 n を整数とすると、必ず3の倍数となるのは、次の(1)～(5)のうちではどれですか。

- (1) $2n+3$ (2) $3n+4$ (3) $4n+6$ (4) $5n+6$ (5) $6n+9$

問2 図1の $\square$ に適当な数を書き入れなさい。

問3 太郎さんは下線部で「3けたの正の整数で、百の位の数を2倍した数と下2けたの数との和が7の倍数ならば、もとの整数は7の倍数である」と述べている。このことが成り立つわけの説明を、解答欄の書き出しに続けて書き、完成させなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	(説明) もとの 3 けたの正の整数の百の位の数 を a, 十の位の数 を b, 一の位の数 を c とすると, もとの整数は, $100a + 10b + c \cdots \textcircled{1}$ と表される。

解答

問1 5

問2 91

問3

また仮定から n を整数とすると

$$2a + 10b + c = 7n \cdots \textcircled{2}$$

と表すことができる。

②から

$$10b + c = 7n - 2a \cdots \textcircled{3}$$

①, ③から

$$100a + 10b + c = 100a + 7n - 2a$$

$$= 98a + 7n$$

$$= 7(14a + n)$$

となる。

$14a + n$ は整数だから

もとの整数は 7 の倍数である。

解説

問1

(5)は $6n + 9 = 3(2n + 3)$ より $3 \times (\text{整数})$ となるので 3 の倍数である。

問2

$$5 \times 2 + 81 = 91$$

【問 4】

連続する 3 つの整数があり、中央の数は 3 の倍数である。これら 3 つの整数のうち、最小の数を M 、最大の数を N とするとき、 $MN+1$ は 9 の倍数であることを、文字式を使って証明せよ。

(香川県 2009 年度)

解答欄

証明

解答

証明

中央の数は 3 の倍数であるから
整数 n を用いて $3n$ と表すことができる。
このとき $M=3n-1$ 、 $N=3n+1$ となる。
したがって

$$MN+1=(3n-1)(3n+1)+1$$

$$=(9n^2-1)+1$$

$$=9n^2$$

n^2 は整数だから

$MN+1$ は 9 の倍数である。

【問 5】

円すい A と円すい B がある。円すい B の底面の半径は円すい A の底面の半径の 3 倍であり、円すい B の高さは円すい A の高さの $\frac{1}{3}$ 倍である。円すい A の体積を V 、円すい B の体積を W とすると、 $W=3V$ となることの証明を、 の中に完成せよ。ただし、円周率は π を用いて表すこと。

(福岡県 2009 年度)

解答欄

証明

円すい A の底面の半径を r 、円すい A の高さを h とする。

解答

円すい B の底面の半径は $3r$

円すい B の高さは $\frac{h}{3}$ である。

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$W = \frac{1}{3} \pi (3r)^2 \frac{h}{3}$$

$$= \pi r^2 h$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right)$$

だから $W=3V$ である。

解説

円すい A の半径を r 高さを h とすると

円すい B の半径は $3r$ 高さは $\frac{h}{3}$ とおける。

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$W = \frac{1}{3} \times \pi \times (3r)^2 \times \frac{h}{3} = \pi r^2 h = 3 \times \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right) = 3V$$

【問 6】

次の(1), (2)に答えよ。

(長崎県 2009 年度)

- (1) 十の位の数が m , 一の位の数が 6 である 2 けたの自然数を n とするとき, n の倍数正方形において, E が 0 になることを次のように説明した。□(ア) □ ~ □(ウ) □ にあてはまる式を入れよ。
ただし, □(ア) □ には n の式を, □(イ) □, □(ウ) □ には m の式を入れること。

n の倍数正方形には, 全部で □(ア) □ 個の数が並んでいるので, E は $n \times$ (□(ア) □) の一の位の数である。

n は十の位の数 m , 一の位の数 6 であるので, $n =$ □(イ) □ と表され, $n \times$ (□(ア) □) は, m の式で $10 \times$ (□(ウ) □) と表される。□(ウ) □ は整数だから, $10 \times$ (□(ウ) □) は 10 の倍数である。したがって, E は 0 になる。

- (2) 十の位の数 m , 一の位の数 5, 6 と連続する 2 つの 2 けたの自然数について, それぞれの自然数の倍数正方形にある 0 の個数を順に S, T とする。このとき, S+T の値を m の式で表せ。

解答欄

(1)	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
(2)	S+T=	

解答

(1)

(ア) $4n-4$

(イ) $10m+6$

(ウ) $40m^2+44m+12$

(2)

$$S+T=28m+12$$

解説

(2)

2つの数を $10m+5$, $10m+6$ とする。

$10m+5$ の倍数正方形には

$(10m+5-1) \times 4 = 40m+16$ 個の数が並び

その数は 5, 0 の 2 つの数が繰り返し並んでいるので

0 の数は $S = (40m+16) \div 2 = 20m+8$

$10m+6$ の倍数

正方形には $(10m+6-1) \times 4 = 40m+20$ 個の数が並び

その数は, 6, 2, 8, 4, 0 の 5 つの数が繰り返し並んでいるので

0 の数は $T = (40m+20) \div 5 = 8m+4$

よって $S+T = 20m+8+8m+4 = 28m+12$

【問 7】

ある連続する 3 つの自然数があり、その和を 4 で割ると 2 余る。このような連続する 3 つの自然数の組のうちで、その和が 50 に最も近くなるときの、3 つの自然数を求めなさい。

(熊本県 2009 年度)

解答欄

--	--	--

解答

17, 18, 19

解説

連続する 3 つの自然数を $n-1$, n , $n+1$ とおくと

3 つの数の和は

$$n-1+n+n+1=3n$$

$3n$ は 4 で割ると 2 余る数なので $4m+2$ と表せる。

その和に 6 を加えると 3 と 4 で割り切れる。

3 と 4 の公倍数で $50+6$ に最も近いものは 60 だから

$$3n+6=60$$

$$n=18$$