

9. 式の証明の問題（2019 年度出題）

【問 1】

図 1 のように、9 つのますの縦、横、斜めのどの列においても、1 列に並んだ 3 つの数の和が等しくなるよう、異なる整数を 1 つずつ入れる遊びがあります。

このような遊びについて、次の問いに答えなさい。

（北海道 2019 年度）

図 1

8	1	6
3	5	7
4	9	2

- 問 1 この遊びでは、1 列に並んだ 3 つの数の和は、どの列においても、9 つあるます全体の中央のますに入っている数の 3 倍になります。このことを、次のように説明するとき、ア ～ ウ に当てはまる単項式を、それぞれ書きなさい。

（説明）

ある 1 列に並んだ 3 つの数の和を a とすると、9 つのますに入っている数の和は、ア と表すことができる。

また、ます全体の中央のますを通る列は、縦、横、斜め、合わせて 4 列あるので、これらの列の 3 つの数の和の合計は、イ と表すことができる。

さらに、ます全体の中央のますに入っている数を b とすると、9 つのますに入っている数の和は、イ - ウ と表すことができる。

よって、ア = イ - ウ となり、計算すると、 $a=3b$ となる。

したがって、1 列に並んだ 3 つの数の和は、どの列においても、ます全体の中央のますに入っている数の 3 倍になる。

- 問 2 この遊びで、図 2 のように、ますの一部に整数が入っているとき、 x , y は、それぞれいくつになりますか。
方程式をつくり、求めなさい。

図 2

	x	y
6		
-8	2	

解答欄

問 1	ア	
	イ	
	ウ	
問 2	〔方程式〕	
	〔計算〕	
(答) $x=$, $y=$		

解答

問 1

ア $3a$

イ $4a$

ウ $3b$

問 2

〔方程式〕

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x+2=y-8 \end{cases}$$

〔計算〕

$$x+y=-2 \cdots \textcircled{1}$$

$$x-y=-10 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{ から } 2x=-12, x=-6 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して, } y=4$$

$$(\text{答}) x=-6, y=4$$

解説

問 1

ある 1 列に並んだ 3 つの数の和を a とすると、9 つのますに入っている数の和は、3 列分の数の和だから、 $a \times 3 = \underline{3a}$ と表すことができる。

また、ます全体の中央のますを通る列は、縦、横、斜め、合わせて 4 列あるので、これらの列の 3 つの数の和の合計は、4 列分の数の和だから、 $a \times 4 = \underline{4a}$ と表すことができる。

さらに、ます全体の中央のますに入っている数を b とすると、イで求めた和 $4a$ は b を 4 回、それ以外の 8 ますに入っている数は 1 回ずつたされた結果なので、9 つのますに入っている数の和は、 $\underline{4a}$ イ $\underline{3b}$ と表すことができる。

よって、 $\underline{3a}$ ア $\underline{4a}$ イ $\underline{3b}$ ウ となり、計算すると、 $a=3b$ となる。

したがって、1 列に並んだ 3 つの数の和は、どの列においても、ます全体の中央のますに入っている数の 3 倍になる。

問 2

右の図のように、左上のますに入っている数を㊦とすると、

$$\textcircled{F} + x + y = \textcircled{F} + 6 + (-8) \text{ が成り立つから、これを整理して、}$$

$$x + y = -2 \cdots \textcircled{1}$$

また、ます全体の中央のますに入っている数を㊩とすると、

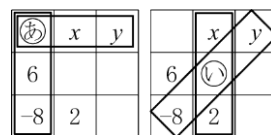
$$x + \textcircled{I} + 2 = y + \textcircled{I} + (-8) \text{ が成り立つから、これを整理して、}$$

$$x + 2 = y - 8$$

$$\text{よって, } x - y = -10 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ から, } 2x = -12 \quad x = -6 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して, } -6 + y = -2 \quad y = 4$$



【問 2】

次の健太さんと春子さんの会話文を読んで、下の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(栃木県 2019 年度)

健太：「1331 や 9449 のような 4 けたの数は、11 で割り切れることを発見したよ。」

春子：「つまり、千の位と一の位が同じ数、そして百の位と十の位が同じ数の 4 けたの数は、11 の倍数になるということね。必ずそうなるか証明してみようよ。」

健太：「そうだね、やってみよう。千の位の数を a 、百の位の数を b とすればよいかな。」

春子：「そうね。 a を 1 から 9 の整数、 b を 0 から 9 の整数とすると、この 4 けたの数 N は…」

健太：「 $N = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times \boxed{\text{①}} + 1 \times \boxed{\text{②}}$

と表すことができるね。」

春子：「計算して整理すると、

$N = \boxed{\text{③}} (\boxed{\text{④}} a + \boxed{\text{⑤}} b)$

になるわね。」

健太：「 $\boxed{\text{④}} a + \boxed{\text{⑤}} b$ は整数だから、 N は 11 の倍数だ。」

春子：「だからこのような 4 けたの数は、必ず 11 で割り切れるのね。」

(1) $\boxed{\text{①}}$, $\boxed{\text{②}}$ に当てはまる適切な文字をそれぞれ答えなさい。

(2) $\boxed{\text{③}}$, $\boxed{\text{④}}$, $\boxed{\text{⑤}}$ に当てはまる適切な数をそれぞれ答えなさい。

解答欄

(1)	①	
	②	
(2)	③	
	④	
	⑤	

解答

(1)

① b

② a

(2)

③11

④91

⑤10

解説

千の位と一の位は同じ数だから、千の位の数を a とするとそれぞれ $1000a$, a と表される。

また、百の位と十の位は同じ数だから、百の位の数を b とするとそれぞれ $100b$, $10b$ と表される。

よって、 $N=1000a+100b+10b+a=1001a+110b=11(91a+10b)$

$91a+10b$ は整数だから $11 \times (\text{整数})$ となる。よって、 N は 11 の倍数になるから 11 で割り切れる。

【問 3】

連続する二つの奇数のうち、小さい方の数を a 、大きい方の数を b とするとき、次の二つの条件を同時に満たす a 、 b の値をそれぞれ求めなさい。

(大阪府 C 2019 年度)

- ・ $0 < a < 100$ であり、 $0 < b < 100$ である。
- ・ $b^2 - a^2$ の値は 100 の倍数である。

解答欄

$a =$
$b =$

解答

$$a = 49$$

$$b = 51$$

解説

a 、 b はどちらも 100 未満の連続する奇数だから、 n を 1 以上 50 未満の整数として、 $a = 2n - 1$ 、 $b = 2n + 1$ とおける。

$$\text{よって、} b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) = \{(2n + 1) + (2n - 1)\}\{(2n + 1) - (2n - 1)\} = 8n$$

$8n = 2^3 \times n$ で、 $100 = 2^2 \times 5^2$ だから、 $8n$ が 100 の倍数になるのは、 n が $5^2 = 25$ の倍数のとき。

n は 1 以上 50 未満の整数だから、これを満たす n の値は $n = 25$

このとき、 $a = 2 \times 25 - 1 = 49$ 、 $b = 2 \times 25 + 1 = 51$

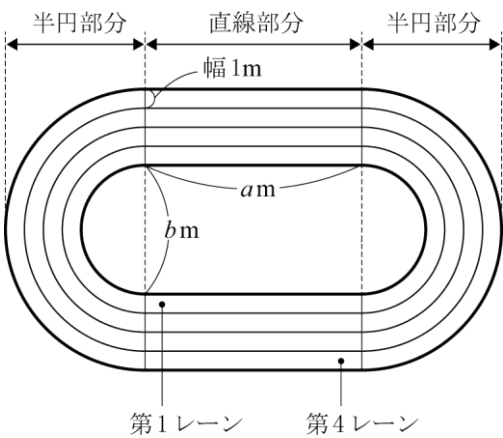
【問 4】

右の図のように、運動場に大きさの違う半円と、同じ長さの直線を組み合わせて、陸上競技用のトラックをつくった。直線部分の長さは $a\text{ m}$ 、最も小さい半円の直径は $b\text{ m}$ 、各レーンの幅は 1 m である。また、最も内側を第 1 レーン、最も外側を第 4 レーンとする。

ただし、ラインの幅は考えないものとする。なお、円周率は π とする。

次の (1)、(2) に答えなさい。

(和歌山県 2019 年度)



- (1) 第 1 レーンの内側のライン 1 周の距離を $\ell\text{ m}$ とすると、 ℓ は次のように表される。

$$\ell = 2a + \pi b$$

この式を、 a について解きなさい。

- (2) 図のトラックについて、すべてのレーンのゴールラインの位置を同じにして、第 1 レーンの走者が走る 1 周分と同じ距離を、各レーンの走者が走るためには、第 2 レーンから第 4 レーンのスタートラインの位置を調整する必要がある。第 4 レーンは第 1 レーンより、スタートラインの位置を何 m 前に調整するとよいか、説明しなさい。

ただし、走者は、各レーンの内側のラインの 20 cm 外側を走るものとする。

解答欄

(1)	$a =$
(2)	〔説明〕 第 4 レーンは第 1 レーンより、スタートラインの位置を () m 前に調整するとよい。

解答

$$(1) a = \frac{\ell}{2} - \frac{\pi b}{2}$$

(2)

〔説明〕

第1レーンの1周の距離は $\{2a + \pi(b + 0.4)\}$ (m)

第4レーンの1周の距離は $\{2a + \pi(b + 6.4)\}$ (m)

第4レーンの1周の距離と第1レーンの1周の距離の差を求めると、

$$\{2a + \pi(b + 6.4)\} - \{2a + \pi(b + 0.4)\} = 6\pi \quad (\text{m})$$

よって、

第4レーンは第1レーンより、スタートラインの位置を (6π) m 前に調整するとよい。

解説

(1)

$$\ell = 2a + \pi b \quad 2a + \pi b = \ell \quad 2a = \ell - \pi b \quad a = \frac{\ell - \pi b}{2} = \frac{\ell}{2} - \frac{\pi b}{2}$$

(2)

第1レーンを走るときの1周分の距離は $2a + \pi(b + 0.2 \times 2) = 2a + \pi(b + 0.4)$ (m)

第4レーンを走るときの1周分の距離は $2a + \pi(b + 3.2 \times 2) = 2a + \pi(b + 6.4)$ (m)

よって、第1レーンを走るときと第4レーンを走るときの距離の差は

$$2a + \pi(b + 6.4) - \{2a + \pi(b + 0.4)\} = 6\pi \quad (\text{m}) \text{ であるから、}$$

第4レーンは第1レーンよりスタートラインの位置を 6π m 前に調整するとよい。

【問 5】

奇数を 2 乗して 19 をたすと 4 の倍数になる。このことを、次のように文字式を使って証明した。

に証明の続きを書き、証明を完成しなさい。

(鳥取県 2019 年度)

〔証明〕

n を整数とすると、奇数は $2n+1$ と表される。この奇数を 2 乗して 19 をたすと、

よって、奇数を 2 乗して 19 をたすと 4 の倍数になる。

(証明終)

解答欄

解答

$$(2n+1)^2+19=4n^2+4n+1+19=4n^2+4n+20=4(n^2+n+5)$$

n^2+n+5 は整数なので $4(n^2+n+5)$ は 4 の倍数になる。

解説

4 の倍数であることを証明するには、その数が $4 \times (\text{整数})$ の形に変形できることを示せばよい。また、 $(\text{整数}) \times (\text{整数}) = (\text{整数})$ 、 $(\text{整数}) \pm (\text{整数}) = (\text{整数})$ であることも利用してよい。

(証明) n を整数とすると、奇数は $2n+1$ と表される。この奇数を 2 乗して 19 をたすと、

$$(2n+1)^2+19=4n^2+4n+1+19=4n^2+4n+20=4(n^2+n+5)$$

n は整数だから、 n^2 も整数で、 n^2+n+5 も整数である。よって、 $4 \times (\text{整数})$ の形に変形できるので、これは 4 の倍数といえる。

【問 6】

絵理さんと桃子さんは、連続する 3 つの自然数の性質について考えた。次の会話を読んで、問 1 ～問 4 に答えなさい。

(岡山県 2019 年度 一般)

絵理：連続する 3 つの自然数の和は、どのような数になるのかな。

桃子：連続する 3 つの自然数が 1, 2, 3 のとき、その和は 6 になるね。2, 3, 4 のとき、その和は 9 になるね。連続する 3 つの自然数の和は、いつでも 3 の倍数になりそうよ。

先生：連続する 3 つの自然数について、積も含めて考えると、ほかにも様々な性質がありそうですね。

問 1 下線部について、絵理さんは次のように確かめた。 $\boxed{\quad (1) \quad}$, $\boxed{\quad (2) \quad}$ に適当な式を書き入れなさい。

連続する 3 つの自然数のうち、最も小さい自然数を n とすると、中央の自然数は $n+1$ 、最も大きい自然数は $\boxed{\quad (1) \quad}$ と表される。このとき、連続する 3 つの自然数の和は、 $n+n+1+\boxed{\quad (1) \quad}=3(\boxed{\quad (2) \quad})$ となり、 $\boxed{\quad (2) \quad}$ は自然数だから、 $3(\boxed{\quad (2) \quad})$ は 3 の倍数である。したがって、連続する 3 つの自然数の和は、いつでも 3 の倍数になる。

問 2 連続する 3 つの自然数の性質について、正しく述べられている文は、ア～エのうちではどれですか。当てはまるものをすべて答えなさい。

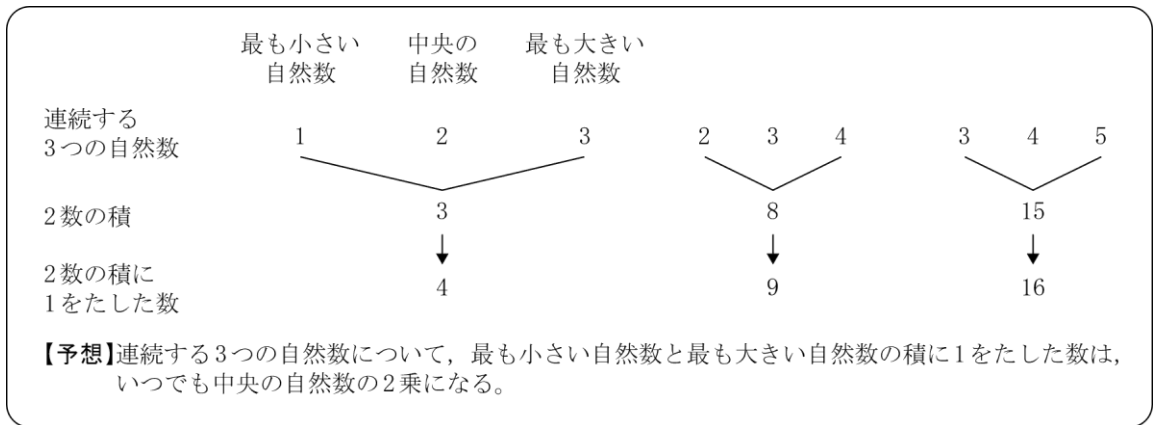
ア 連続する 3 つの自然数の和は、いつでも奇数になる。

イ 連続する 3 つの自然数の和は、いつでも偶数になる。

ウ 連続する 3 つの自然数の和は、いつでも中央の自然数の 3 倍になる。

エ 最も小さい自然数と最も大きい自然数の和は、いつでも中央の自然数の 2 倍になる。

問3 先生の話聞いた2人は、次のメモのように考え、連続する3つの自然数の性質を予想した。



メモの【予想】は次のように証明できる。に n を使った式を用いて【予想】が正しいことを示し、＜証明＞を完成させなさい。

＜証明＞

連続する3つの自然数のうち、最も小さい自然数を n とすると、最も小さい自然数と最も大きい自然数の積に1をたした数は、

したがって、【予想】が正しいことが示された。

問4 連続する3つの自然数について、最も小さい自然数と最も大きい自然数の積に1をたした数が324となるときの、連続する3つの自然数を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	
問2		
問3		
問4		

解答

問 1

(1) $n+2$

(2) $n+1$

問 2 ウ エ

問 3

$$n(n+2)+1=n^2+2n+1$$

$$=(n+1)^2$$

問 4 17, 18, 19

解説

問 1

(1)

連続する 3 つのうち、最も大きい自然数は中央の自然数より 1 大きいから、

$$(n+1)+1=n+2$$

(2)

$$n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$$

問 2

問 1 で確かめた式 $3(n+1)$ を利用して考えるとよい。

ア $n=1$ のとき、連続する 3 つの自然数の和は、 $3(n+1)=3\times(1+1)=6$ で偶数になる。

よって、正しくない。

イ $n=2$ のとき、連続する 3 つの自然数の和は、 $3(n+1)=3\times(2+1)=9$ で奇数になる。

よって、正しくない。

ウ $n+1$ は中央の自然数で、 $3(n+1)$ はその 3 倍を表すから、これは正しい。

エ 最も小さい自然数と最も大きい自然数の和は、 $n+(n+2)=2n+2=2(n+1)$ で、中央の自然数の 2 倍になる。よって、正しい。

問 3

式の展開や因数分解を利用して、 n と $n+2$ の積に 1 を加えた数が、 $n+1$ の 2 乗になることを示す。

問 4

問 3 より、324 は連続する 3 つの自然数のうち、中央の自然数の 2 乗になる。

$$324 \text{ を素因数分解すると、} 324=2^2\times 3^4=2^2\times 3^2\times 3^2=(2\times 3\times 3)^2=18^2$$

よって、連続する 3 つの自然数は、17, 18, 19

【問 7】

浩さんは、数あてゲームを行うために、次の手順を考えた。

手順

- ① 最初に数を 1 つ決める。
- ② ①で決めた数に 1 をたす。
- ③ ②の数に 4 をかける。
- ④ ③の数から 8 をひく。
- ⑤ ④の数を 2 でわる。
- ⑥ ⑤の数に②の数をたす。

この数あてゲームは、手順通りに求めた数 (⑥の計算結果) から、最初に決めた数 (①で決めた数) をあてて遊ぶのである。

浩さんは、この数あてゲームを希さんで行った。



浩さん

手順通りに求めた数を教えてよ。

手順通りに求めた数は14になったよ。



希さん



それなら、最初に決めた数は5だね。

どうしてすぐにわかったの。



簡単にあてる方法があるんだよ。文字を使って考えるとわかるよ。

浩さんが、どのようにして最初に決めた数をあてたのか、希さんは、文字を使って考えた。
最初に決めた数を a として、手順通りに計算すると、次のようになった。

- ① 最初に決めた数を a とする。
- ② $a+1$
- ③ $(a+1) \times 4 = 4a+4$
- ④ $(4a+4) - 8 = 4a-4$
- ⑤ $(4a-4) \div 2 = 2a-2$
- ⑥ $(2a-2) + (a+1) = 3a-1$

最初に決めた数を a とすると、手順通りに求めた数は $3a-1$ という式で表されることがわかった。
次の問 1 ～ 問 3 に答えよ。

(福岡県 2019 年度)

- 問 1 最初に決めた数が 12 のとき、手順通りに求めた数を答えよ。
- 問 2 $3a-1$ という式で表される、手順通りに求めた数から、最初に決めた数 a をあてる方法を説明せよ。
- 問 3 手順の⑤を変えて、手順通りに求めた数をある数でわるだけで最初に決めた数をあてることのできる新しい数あてゲームを 1 つつくる。

① 最初に数を 1 つ決める。

② ①で決めた数に 1 をたす。

③ ②の数に 4 をかける。

④ ③の数から 8 をひく。

⑤

A

⑥ ⑤の数に②の数をたす。

このゲームについてまとめると次のようになる。

手順の⑤を

A

にすると、手順通りに求めた数を

B

で

わるだけで最初に決めた数をあてることができる。

A

 にあてはまる言葉を、「④の数」という書き出しで答えよ。また、

B

 にあてはまる数を答えよ。

解答欄

問 1		
問 2	〔説明〕	
問 3	A	④の数
	B	

解答

問 135

問 2

〔説明〕

手順通りに求めた数に 1 をたして 3 でわる。

問 3

A

④の数 を 4 でわる。

B2

解説

問 1

$3a-1$ に $a=12$ を代入すると $3 \times 12 - 1 = 35$

問 2

⑥の数を N とすると、 $3a-1=N$ が成り立つので、両辺に 1 をたして、 $3a=N+1$ 、両辺を 3 でわって、

$a=\frac{N+1}{3}$ とすることで、 a の値を求めることができる。よって、求めた数に 1 をたして 3 でわればよい。

問 3

①最初に決めた数を a とする。→② $a+1$ →③ $(a+1) \times 4 = 4a+4$ →④ $4a+4-8=4a-4$

となるので、⑥の数は(⑤の数) $+a+1$ となる。これが a の倍数になるには、⑤の数が $(a \text{ の倍数}) - 1$ の形になっていればよい。そのための⑤の操作は「④の数を 4 でわる。」「④の数に 3 をたす。」などが考えられる。

⑤の操作を「④の数を 4 でわる。」とした場合、⑤ $(4a-4) \div 4 = a-1$ →⑥ $a-1+a+1=2a$ となるので、⑥の数を 2 でわればよい。

⑤の操作を「④の数に 3 をたす。」とした場合、⑤ $4a-4+3=4a-1$ →⑥ $4a-1+a+1=5a$ となるので、⑥の数を 5 でわればよい。

【問 8】

2 けた以上の自然数の各位の数をすべてかけ合わせた値を考える。

例えば、自然数 952 に対して、各位の数をすべてかけ合わせた値は $9 \times 5 \times 2 = 90$ となり、この値を《952》で表すこととする。すなわち、《952》=90 である。

《1868》の値は、《1868》= $1 \times 8 \times 6 \times 8 = 384$ となり、《1868》=384 である。

このように、《 n 》を 2 けた以上の自然数 n の各位の数をすべてかけ合わせた値とする。

このとき、(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2019 年度 特色)

(1) 《326》の値を求めなさい。

(2) 《 n 》=105 となる 3 けたの自然数 n のうち、最小のものを求めなさい。

(3) 《 n 》=210 となる 4 けたの自然数 n のうち、最小のものを求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	$n =$
(3)	$n =$

解答

(1) 36

(2) $n = 357$

(3) $n = 1567$

解説

(1)

《326》= $3 \times 2 \times 6 = 36$

(2)

$105 = 3 \times 5 \times 7$ だから、 n として 357, 375, 537, 573, 735, 753 が考えられる。この中で最小のものは $n = 357$ のときである。

(3)

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 1 \times 6 \times 5 \times 7$ だから、 n の値が最小となるのは $n = 1567$ のときである。

【問 9】

理香さんと拓也さんは、教科書に出てきた数学者ピタゴラスについて、先生と話をしています。3 人の会話を読んで、あとの問いに答えなさい。

(長崎県 2019 年度)

理 香：ピタゴラスは古代ギリシャの数学者で、弟子たちと「数」について多くの議論をしたみたいですね。

先 生：みんなが知っている ①約数や ②無理数についても議論したみたいだよ。

理 香：ピタゴラスに関するもので、等式 $a^2+b^2=c^2$ をみたす自然数の組 (a, b, c) を「ピタゴラス数」というんだって。例えば、 $3^2+4^2=5^2$ 、 $5^2+12^2=13^2$ だから、 $(3, 4, 5)$ 、 $(5, 12, 13)$ はピタゴラス数になるよ。

先 生：ちなみに、ピタゴラス数 (a, b, c) では、 c が最も大きい数になるよ。

拓 也：おもしろそうだから、他にもあるか探してみようかな。

問 1 下線部①に関して、28 の正の約数をすべて書け。

問 2 下線部②に関して、次の 3 つの数の大小を、不等号を使って表せ。

$$3\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{6}, \quad \sqrt{26}$$

拓也：昨日、家で (3, 4, 5) や (5, 12, 13) 以外のピタゴラス数を自分で探そうとしたのですが、できませんでした。

先生：そうだったんだね。それでは、 $c=10$ として、等式 $a^2+b^2=10^2$ を考えてみよう。

拓也：あつ、 $a=$ (ア) , $b=$ (イ) , $c=10$ で、((ア) , (イ) , 10) というピタゴラス数がありますね。

先生：そうだね、よく見つけたね。

理香：先生、私は興味深いことを調べてきました。「3以上の奇数 a を2乗した数を、連続する2つの自然数 b, c (ただし、 $b < c$ とする。) の和で表すと、自然数の組 (a, b, c) は等式 $a^2+b^2=c^2$ をみたす」ということです。

例えば、

$a=3$ のとき、 $3^2=4+5$ と表せるので、 $b=4, c=5$ とすると、(3, 4, 5) は、 $3^2+4^2=5^2$ となる。

$a=5$ のとき、 $5^2=12+13$ と表せるので、 $b=12, c=13$ とすると、(5, 12, 13) は、 $5^2+12^2=13^2$ となる。

$a=7$ のとき、 $7^2=24+25$ と表せるので、 $b=24, c=25$ とすると、(7, 24, 25) は、 $7^2+24^2=25^2$ となる。

先生：よく調べてきたね。ちなみに、先生の年齢は41歳なんだけど、③41をふくむピタゴラス数を見つけられるかな。

(数分後)

拓也：やった、見つかりました。この方法で、ピタゴラス数をたくさん見つけることができますね。

先生：そうだね。でも、実はこの方法ではすべてのピタゴラス数を見つけることはできないんだよ。

拓也：そうなんですネ、残念。ところで、④ピタゴラス数のうち、連続する3つの自然数の組は(3, 4, 5)の1組のような気がするんですけど、その説明はどうしたらいいですか。

理香：それは、連続する3つの自然数のうち最も小さい自然数を n として、等式 $a^2+b^2=c^2$ を使って、 n が3であることを説明すればいいんじゃないかな。

先生：そうだね、理香さんの言うとおりでね。

拓也：じゃあ、やってみます。

問3 (ア) , (イ) にあてはまる自然数を答えよ。ただし、(ア) < (イ) とする。

問4 下線部③について、会話中の理香さんが調べてきた方法で見つけることができる41をふくむピタゴラス数 (a, b, c) をすべて答えよ。ただし、 $a < b$ とする。また、答えは (3, 4, 5) の形で答えよ。

問5 会話中の理香さんの最後の発言を参考にして、下線部④で示した内容が正しいことを説明せよ。ただし、解答は解答用紙の「連続する3つの自然数のうち、最も小さい自然数を n とする。」に続けて完成させよ。

解答欄

問 1		
問 2		
問 3	(ア)	
	(イ)	
問 4		
問 5	連続する 3 つの自然数のうち、最も小さい自然数を n とする。 よって、ピタゴラス数のうち、連続する 3 つの自然数の組は (3, 4, 5) の 1 組である。	

解答

問 1 1, 2, 4, 7, 14, 28

問 2 $2\sqrt{6} < \sqrt{26} < 3\sqrt{3}$

問 3

(ア) 6

(イ) 8

問 4 (9, 40, 41), (41, 840, 841)

問 5

連続する 3 つの自然数のうち、最も小さい自然数を n とする。

連続する 3 つの自然数は n , $n+1$, $n+2$ と表される。

このとき、

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 \cdots \textcircled{1}$$

をみたす。①を解くと、

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$(n-3)(n+1) = 0$$

n は自然数なので、 $n=3$

よって、ピタゴラス数のうち、連続する 3 つの自然数の組は (3, 4, 5) の 1 組である。

解説

問 1

28 をわり切ることのできる整数をさがすと、1, 2, 4, 7, 14, 28 の 6 つある。

問 2

$$3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{27}, \quad 2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \times 6} = \sqrt{24} \text{ で、 } 24 < 26 < 27 \text{ だから、 } \sqrt{24} < \sqrt{26} < \sqrt{27}$$

$$\text{したがって、 } 2\sqrt{6} < \sqrt{26} < 3\sqrt{3}$$

問 3

$a^2 + b^2 = 10^2$ より、 $b^2 = 100 - a^2$ $100 - a^2$ に $a=1, 2, \dots$ と代入して、計算した値が自然数の 2 乗になるものをさがすと、 $a=6$ のとき、 $100 - 6^2 = 64 = 8^2$ よって、(ア)は 6, (イ)は 8

問 4

$a=41$ のとき、 $41^2 = 1681$ $1681 \div 2 = 840$ 余り 1 より、 $41^2 = 840 + 841$ と表せる。 $b=840$, $c=841$ とすると、 $41^2 + 840^2 = 841^2$ が成り立つから、ピタゴラス数は (41, 840, 841)

$b=41$ のとき、 $c=41+1=42$ $b+c=41+42=83$ 83 は自然数の 2 乗ではないので、これは条件にあわない。

$c=41$ のとき、 $b=41-1=40$ $b+c=40+41=81=9^2$ より、 $a=9$ $9^2 + 40^2 = 41^2$ が成り立つから、ピタゴラス数は (9, 40, 41)

問 5

連続する自然数は 1 ずつ大きくなるから、最も小さい自然数を n とすると、3 つの自然数は、小さい順に n , $n+1$, $n+2$ と表される。

【問 10】

自然数を 1 から順に 9 個ずつ各段に並べ、縦、横 3 個
 ずつの 9 個の数を で囲み、 内の左上の数を a 、
 右上の数を b 、左下の数を c 、右下の数を d 、真ん中の数
 を x とする。たとえば、右の表の では、 $a=5$ 、 $b=$
 7 、 $c=23$ 、 $d=25$ 、 $x=15$ である。次の問 1、問 2 に答え
 なさい。

(鹿児島県 2019 年度)

1 段目	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2 段目	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3 段目	19	20	21	22	23	24	25	26	27
4 段目	28	29	30	31	...				

問 1 a を x を使って表せ。

問 2 $M=bd-ac$ とするとき、次の (1)、(2) の問いに答えよ。

(1) a 、 b 、 c 、 d をそれぞれ x を使って表すことで、 M の値は 4 の倍数になることを証明せよ。

(2) a が 1 段目から 10 段目までにあるとき、一の位の数に 4 になる M の値は何通りあるか、次の
 の ア ~ ウ に適当な数を入れ、求め方を完成させよ。

[求め方]

(1) より M の値は 4 の倍数だから、 M の値の一の位の数に 4 になるのは x の一の位
 の数が ア または イ になるときである。

x は 2 段目から 11 段目までにあり、各段の両端を除く自然数であることに注意し
 て、 M の値の個数を求めると ウ 通りである。

解答欄

問 1	$a =$		
問 2	(1)	〔証明〕	
	(2)	ア	
		イ	
ウ			

解答

問 1 $(a=)x-10$

問 2

〔証明〕

$$a=x-10$$

$$b=x-8$$

$$c=x+8$$

$$d=x+10$$

と表されるから

$$M=(x-8)(x+10)-(x-10)(x+8)$$

$$=(x^2+2x-80)-(x^2-2x-80)$$

$$=4x$$

x は自然数だから、

M は 4 の倍数になる。

(2)

ア 1

イ 6

ウ 14

解説

問 1

各段には自然数が 9 個ずつ並んでいるから、 x の真上の数は x より 9 小さく、 a はさらにそれより 1 小さい。よって、 $a=x-9-1=x-10$

問 2

(1)

問 1 と同様に考えると、 $b=x-9+1=x-8$ $c=x+9-1=x+8$ $d=x+9+1=x+10$

(2)

0 から 9 の自然数のうち、4 をかけた積の一の位の数になるのは、 $1 \times 4 = 4$ と $6 \times 4 = 24$

よって、アとイには 1 と 6 が入る。

また、 x は 2 段目から 11 段目までにあるが、2 段目は 10 から始まり、11 段目は $9 \times 11 = 99$ で終わる。

10 以上 99 以下の自然数のうち、一の位の数になる自然数は 11 から 91 まで 9 個あり、一の位の数になる自然数は 16 から 96 まで 9 個ある。ただし、 x は各段の両端を除く自然数である。各段の左端には 9 でわると 1 余る自然数が入るから、46, 91 の 2 数があてはまり、右端には 9 の倍数が入るから、36, 81 の 2 数があてはまる。よって、一の位の数になる M の値は、 $9+9-2-2=14$ (通り)