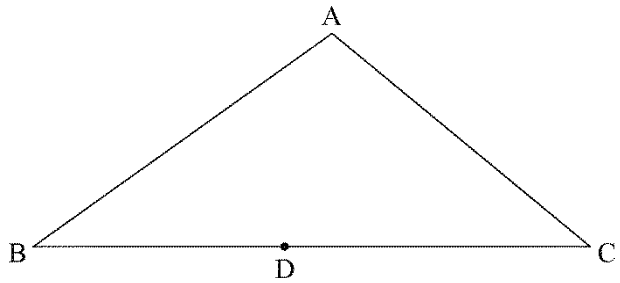
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2014 年度出題】

【問 1】

図のように，△ABC の辺 BC 上に点 D があります。
次の問いに答えなさい。

（北海道　2014 年度）



問1　∠ADC＝80°，DA＝DB のとき，∠BAD の大きさを求めなさい。

問2　∠ABD の二等分線と線分 AD，辺 AC との交点をそれぞれ E，F とします。∠BAE＝∠BCF のとき，AE＝AF を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	〔証明〕

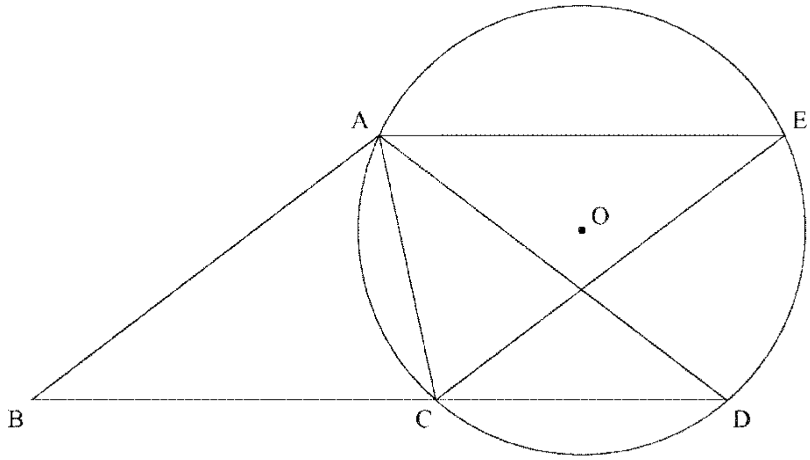
解答
問1　40度
問2
〔証明〕
(正答例)
∠ABE＝∠CBF(仮定)…①
∠BAE＝∠BCF(仮定)…②
∠AEF＝∠ABE＋∠BAE…③
∠AFE＝∠CBF＋∠BCF…④
①, ②, ③, ④より
∠AEF＝∠AFE…⑤
⑤から△AEFは二等辺三角形である。
したがってAE＝AF
解説
問1
△DABについて
∠DAB＋∠DBA＝80°
またDA＝DBより
∠DAB＝∠DBA＝80°÷2＝40°
問2
仮定より
∠ABE＝∠CBF…①
∠BAE＝∠BCF…②
三角形の1つの外角はそのとなりにない2つの内角の和になるから
∠AEF＝∠ABE＋∠BAE…③
∠AFE＝∠CBF＋∠BCF…④
①, ②, ③, ④より
∠AEF＝∠AFE
よって△AEFは二等辺三角形になるから
AE＝AF

【問 2】

図のように，△ABC の辺 BC の延長上に∠ADC＝∠ABC となる点 D をとる。また，3 点 A，C，D を通る円 O と C を通り辺 AB に平行な直線との交点を E とする。

このとき，AE＝BC となることを証明しなさい。

（福島県　2014 年度）



解答欄

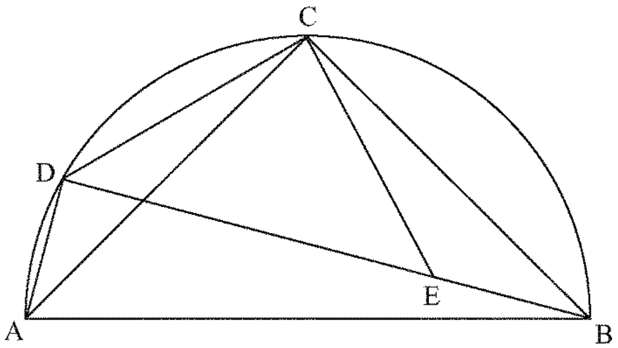
〔証明〕

解答
〔証明〕
(例 1)
△ABC と△CEA において
AC は共通…(1)
平行線の錯角は等しいから∠BAC＝∠ECA…(2)
仮定から∠ADC＝∠ABC…(3)
円周角の定理から∠ADC＝∠CEA…(4)
(3), (4)より
∠ABC＝∠CEA…(5)
三角形の内角の和は 180°であり
(2), (5)から残りの角も等しい。
したがって∠ACB＝∠CAE…(6)
(1), (2), (6)より
1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ABC≡△CEA
したがって AE＝BC
(例 2)
仮定から∠ADC＝∠ABC…(1)
平行線の同位角は等しいから∠ABC＝∠ECD…(2)
円周角の定理から∠ECD＝∠EAD…(3)
(1), (2), (3)より∠ADC＝∠EAD
錯角が等しいから AE // BD
すなわち AE // BC…(4)
仮定から AB // EC…(5)
(4), (5)より
2 組の対辺がそれぞれ平行であるから
四角形 ABCE は平行四辺形である。
平行四辺形の対辺は等しいから AE＝BC
解説
△ABC と△CEA において
1 組の辺とその両端の角が等しいことを示し合同を導いてから AE＝BC を示す。
または四角形 ABCE において
2 組の対辺がそれぞれ平行であることを示し
平行四辺形になることを導いてから AE＝BC を示す。

【問 3】

下の図のように，線分 AB を直径とする半円がある。点 C は$\overset{\frown}{AB}$上にあり AC＝BC である。$\overset{\frown}{AC}$上に点 D をとり，△ACD をつくる。線分 BD 上に点 E を AD＝BE となるようにとる。

このとき，△CDE は直角二等辺三角形であることを次のように証明した。



(証明)

△ACD と△BCE で，

仮定から，AC＝BC …①

AD＝BE …②

$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角は等しいから，

∠CAD＝ $\boxed{\text{ア}}$ …③

①，②，③から，$\boxed{\text{イ}}$ ので，

△ACD≡△BCE …④

$\boxed{\text{ウ}}$

次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2014 年度）

問1 $\boxed{\text{ア}}$ には当てはまる角を，$\boxed{\text{イ}}$ には当てはまる三角形の合同条件をそれぞれ書きなさい。

問2 $\boxed{\text{ウ}}$ には証明の続きを書き，△CDE は直角二等辺三角形であることの証明を完成させなさい。
ただし，(証明) の中の①～④で示されている関係を使う場合は，①～④の番号を用いてもよい。また，新たな関係に番号をつける場合は，⑤以降の番号を用いなさい。

解答欄

問1	ア	∠
	イ	
問2	ウ	

解答
問1
ア　∠CBE
イ　2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい
問2
ウ
対応する辺は等しいので
CD＝CE…⑤
対応する角は等しいので
∠DCA＝∠ECB
AB は直径なので，円周角の定理から∠ACB＝90°
∠DCE＝∠DCA＋∠ACE
＝∠ECB＋∠ACE＝∠ACB＝90°…⑥
⑤，⑥から
△CDE は直角二等辺三角形である。
解説
問1
円周角の定理より
∠CAD＝∠CBE…ア
三角形の合同条件より
2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい…イ
問2
直角二等辺三角形であることを示すには
CD＝CE と∠DCE＝90°であることを示す。

【問 4】

四角形 ABCD において，∠A＝∠C，∠B＝∠D ならば，四角形 ABCD は平行四辺形であることを次のように証明した。 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ に適する数値または記号をそれぞれ入れなさい。また， $\boxed{}$ には証明の続きを書き，証明を完成させなさい。

（群馬県 2014 年度）

証明

右の図のように，辺 AB の延長線上に点 E をとる。

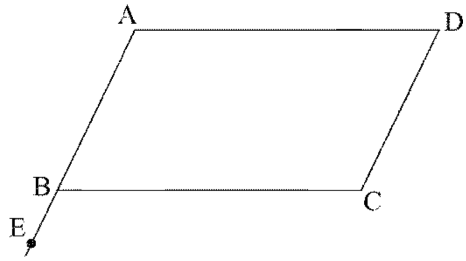
四角形の内角の和は $\boxed{ア}$ °だから，

∠A＋∠ABC＋∠C＋∠D＝ $\boxed{ア}$ °…①

仮定より，∠A＝∠C，∠ABC＝∠ $\boxed{イ}$ …②

①，②より，∠A＋∠ABC＝180°…③

また，∠ABC＋∠CBE ＝ $\boxed{ウ}$ °…④



したがって，∠A＝∠C，∠B＝∠D ならば，四角形 ABCD は平行四辺形である。

解答欄

ア	
イ	
ウ	

〔証明の続き〕

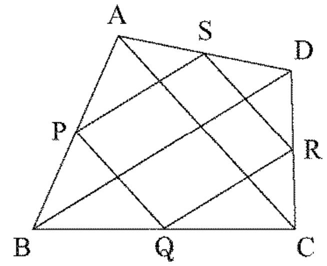
(したがって，∠A＝∠C，∠B＝∠D ならば，四角形 ABCD は平行四辺形である。)

解答
ア　360
イ　D
ウ　180
〔証明の続き〕
③，④より
∠A＝∠CBE…⑤
同位角が等しいので
AD // BC
また仮定と⑤より
∠C＝∠CBE
錯角が等しいので
AB // DC
(したがって∠A＝∠C，∠B＝∠D ならば，四角形 ABCD は平行四辺形である。)
解説
四角形の内角の和は 360°…アだから
∠A＋∠ABC＋∠C＋∠D＝360°…①
仮定より
∠A＝∠C，∠ABC＝∠D…イ②
①，②より
∠A＋∠ABC＝180°…③
また∠ABE＝180°より
∠ABC＋∠CBE＝180°…ウ④
よって③，④より
∠A＝∠CBE…⑤
よって同位角が等しいので AD // BC
また仮定と⑤より
∠C＝∠CBE
錯角が等しいので AB // DC
したがって四角形 ABCD は平行四辺形である。

【問 5】

図のように，四角形 ABCD で，4 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ，P, Q, R, S とおく。四角形 PQRS が正方形になるためには，対角線 AC と BD について，どんなことがいえればよいか答えよ。

（福井県　2014 年度）



解答欄

解答
AC＝BD ，AC⊥BD
解説
△ABD において
P, S はそれぞれ AB, AD の中点だから
中点連結定理より

PS // BD, PS＝$\frac{1}{2}$BD

同様に QR // BD, QR＝$\frac{1}{2}$BD

SR // AC, SR＝$\frac{1}{2}$AC

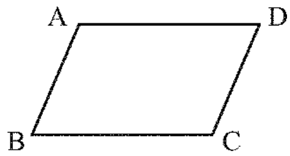
PQ // AC, PQ＝$\frac{1}{2}$AC

よって，四角形 PQRS が正方形になるためには
4 つの辺の長さが等しく
4 つの角が 90°になればよいから
AC＝BD, AC⊥BD であればよい。

【問 6】

図のような平行四辺形 ABCD がある。この平行四辺形に，条件∠A＝∠B を加えると，長方形になる。

では，平行辺形 ABCD がひし形になるには，どのような条件を加えればよいか，次のアからエまでの中から正しいものを 1 つ選んで，そのかな符号を書きなさい。



（愛知県 2014 年度 A）

ア ∠A＝∠D　イ AB＝AD　ウ AB＝AC　エ AC＝BD

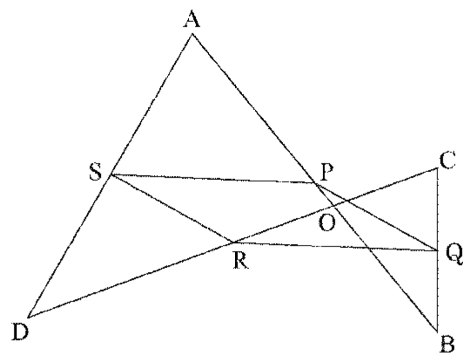
解答欄

解答
イ
解説
4 つの辺が等しい四角形はひし形である。
平行四辺形は向かい合う辺が等しいので
隣り合う辺が等しいとき
4 つの辺は等しくなる。
よってイ

【問 7】

右の図で，2 つの線分 AB，CD は点 O で交わっており，AB＝7 cm，CD＝8 cm，OA＝4 cm，OC＝2 cm である。また，4 点 P，Q，R，S はそれぞれ線分 AB，BC，CD，DA の中点である。各問いに答えよ。

（奈良県　2014 年度）

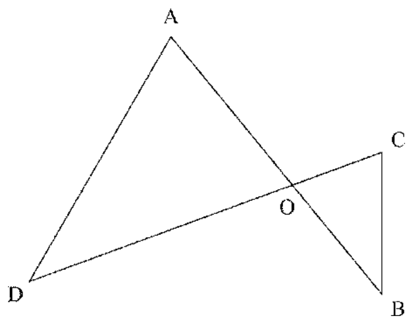


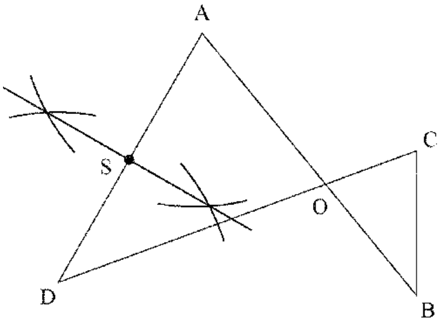
問1 点 S を，定規とコンパスを使って解答欄の枠内に作図せよ。なお，作図に使った線は消さずに残しておくこと。

問2 四角形 PQRS は平行四辺形であることを証明せよ。

問3 四角形 PQRS の面積は△OAD の面積の何倍か。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕
問3	倍

解答
問1


問2
〔証明〕
線分 DB をひく。
$\triangle$ADB において
点 S は辺 AD の中点，点 P は辺 AB の中点であるから
SP // DB…①
$SP = \frac{1}{2}DB$…②
$\triangle$CDB においても同様にして
RQ // DB…③
$RQ = \frac{1}{2}DB$…④
①，③より
SP // RQ
②，④より
SP＝RQ
1 組の対辺が平行でその長さが等しいから
四角形 PQRS は平行四辺形である。
問3 $\frac{3}{8}$倍
解説
問1
AD の垂直二等分線と AD の交点を S とする。
問2
中点連結定理を利用して
四角形 PQRS の 1 組の対辺が平行で長さが等しいことを示し
平行四辺形であることを導く。
問3
AB と RQ との交点を T とする。
$OT:TB = OR:RD = (4-2):4 = 1:2$
$OB = 3$ より $OT = 1$，$TB = 2$
よって $AP:PO:OT:TB = 3.5:0.5:1:2 = 7:1:2:4$
$\triangle$OAD を S とする。
$$\triangle PSR = \triangle SPT = \frac{3}{14}\triangle ABS = \frac{3}{14}\times\frac{1}{2}\triangle ABD = \frac{3}{14}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\triangle OAD = \frac{3}{16}S$$
よって平行四辺形 $PQRS = 2\triangle PSR = 2\times\frac{3}{16}S = \frac{3}{8}S$
よって$\frac{3}{8}$倍

【問 8】

太郎さんたちは，直角のつくり方について，次のように考えた。問1～問4に答えなさい。

（岡山県　2014 年度　一般）

＜太郎さんの考え＞

定規とコンパスを使えばつくれるよ。

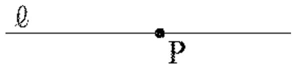
＜桃子さんの考え＞

三角形の 3 辺の長さの割合を3，4，5にすればつくれるわ。

＜拓也さんの考え＞

二等辺三角形を使ってもつくれるよ。

問1　＜太郎さんの考え＞にあるように，定規とコンパスを使って，右の図の点 P を通り，直線 ℓ に垂直な直線を作図しなさい。作図に使った線は消さないで残しておきなさい。



問2　＜桃子さんの考え＞にある三角形の 3 辺の長さには，三平方の定理が成り立つ。この定理を利用して求めることができるのは，(1)～(4)のうちではどれですか。当てはまるものをすべて答えなさい。

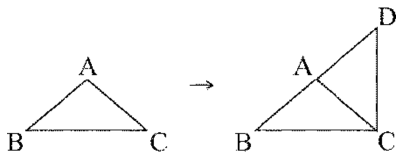
(1) 長方形のとなり合った 2 辺の長さがわかっているときの対角線の長さ

(2) 三角形の底辺の長さと面積がわかっているときの三角形の高さ

(3) 異なる 2 点の座標がわかっているとき，その 2 点間の距離

(4) 異なる 2 点の座標がわかっているとき，その 2 点を通る一次関数のグラフの傾き

問3　次は，＜拓也さんの考え＞を具体的に説明したものである。



　左の図のように，AB＝ACの二等辺三角形ABCをつくる。BAを延長した直線上に，AC＝ADとなる点Dをとり，点Cと点Dを結ぶと，∠BCD＝90°である。

ここで，∠BCD＝90°であることを，次のように証明した。$\boxed{\text{（ア）}}$ ，$\boxed{\text{（イ）}}$ に当てはまる式は，(1)～(5)のうちではどれですか。それぞれ一つずつ答えなさい。

【証明】

∠ABC＝∠xとすると，

△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形だから，

∠ACB＝∠x

よって，∠CAD＝ $\boxed{\text{（ア）}}$ だから，

∠ACD＋∠ADC＝ $\boxed{\text{（イ）}}$

また，△ACD は，AC＝AD の二等辺三角形だから，

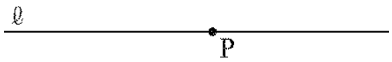
∠ACD＝90°－∠x

したがって，∠BCD＝∠ACB＋∠ACD＝90°

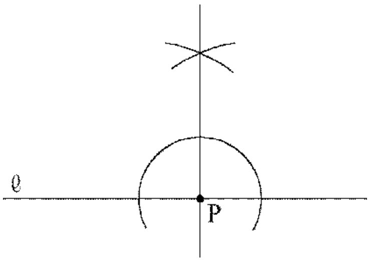
(1)　∠x　　(2)　2∠x　　(3)　90°－∠x　　(4)　180°－∠x　　(5)　180°－2∠x

問4　直角三角形の３辺の長さが，連続する３つの自然数となるものは，3，4，5だけであることの証明を，解答欄の書き出しに続けて書き，完成させなさい。

解答欄

問1		
問2		
問3	(ア)	
	(イ)	
問4	〔証明〕 連続する 3 つの自然数のうち，最も小さい数を n とすると，連続する 3 つの自然数は，n，$n+1$，$n+2$ と表される。最も大きい $n+2$ が斜辺の長さとなるので，三平方の定理により， したがって，直角三角形の 3 辺の長さが，連続する 3 つの自然数となるものは，3，4，5 だけである。	

解答
問1



問2　(1),(3)
問3
(ア)　2
(イ)　5
問4
〔証明〕
連続する 3 つの自然数のうち最も小さい数を n とすると
連続する 3 つの自然数は n, $n+1$, $n+2$ と表される。
最も大きい $n+2$ が斜辺の長さとなるので
三平方の定理により
$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$
$n^2+n^2+2n+1=n^2+4n+4$
$n^2-2n-3=0$
$(n+1)(n-3)=0$
$n=-1,\ 3$
n は自然数だから
$n=3$
したがって直角三角形の 3 辺の長さが
連続する 3 つの自然数となるものは
3, 4, 5 だけである。
解説
問1
点 P を中心とする適当な半径の円をかき直線 ℓ との交点を A, B とする。
A, B をそれぞれ中心とする等しい半径の円をかき交点の1つを C とする。
直線 CP をかく。
問2
三平方の定理を利用できるのは(1), (3)
問3
(ア)は$\angle CAD=\angle ABC+\angle ACB=\angle x+\angle x=2\angle x$ より(2)
(イ)は$\angle ACD+\angle ADC=180^\circ-2\angle x$ より(5)
問4
連続する 3 つの自然数を
n, $n+1$, $n+2$ とすると
三平方の定理が成り立つとき
$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$
整理して
$n^2-2n-3=0$
$(n-3)(n+1)=0$
$n=3,\ -1$
n は自然数より
$n=3$