

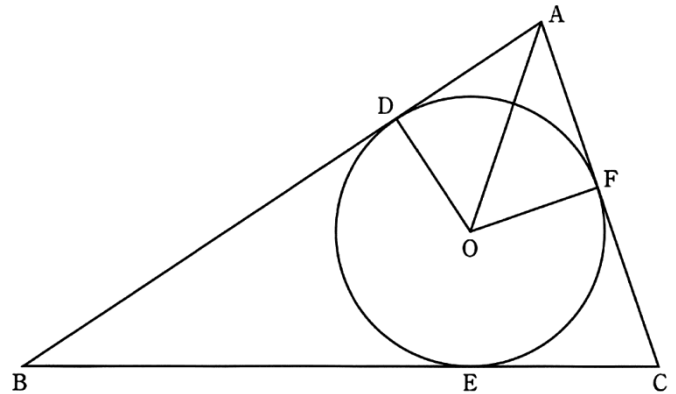
3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2007 年度出題】

【問 1】

図のように、円 O と $\triangle ABC$ があり、円 O は 3 辺 AB , BC , CA とそれぞれ 3 点 D , E , F で接しています。このとき、次の 1, 2 の問いに答えなさい。

(岩手県 2007 年度)

問 1. $\triangle OAD \equiv \triangle OAF$ を証明し、 $AD = AF$ となることを示しなさい。



問 2. $AB = 13 \text{ cm}$, $AC = 9 \text{ cm}$, $AD = 4 \text{ cm}$ のとき、辺 BC の長さを求めなさい。

解答欄

問1	証明	
	したがって $AD = AF$	
問2		cm

解答

問1.

証明

$\triangle OAD$ と $\triangle OAF$ において

円の接線は接点を通る半径に垂直だから

$$\angle ODA = \angle OFA = 90^\circ$$

OA は共通

円の半径だから $OD = OF$

2 つの直角三角形において、斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle OAD \equiv \triangle OAF$$

したがって $AD = AF$

問2.

14cm

解説

問2.

問1より, $\triangle OAD \equiv \triangle OAF$ だから, $AD = AF = 4$

同様に, $\triangle ODB \equiv \triangle OEB$ だから, $BE = BD = 13 - 4 = 9$

$\triangle OCF \equiv \triangle OCE$ だから, $CE = CF = 9 - 4 = 5$

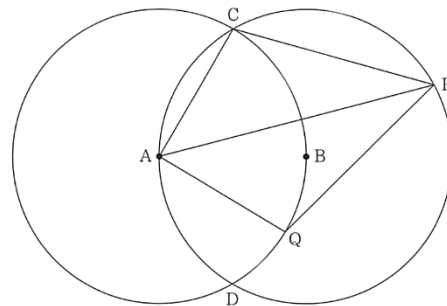
よって, $BC = BE + CE = 9 + 5 = 14\text{cm}$

【問 2】

図のように、点 A を中心とする円 A と、点 B を中心とする円 B は、互いに他方の円の中心を通ります。この 2 つの円の交点を C, D とします。円 B の周上に、点 C, A のいずれにも一致しない点 P をとり、 $\triangle ACP$ をつくります。また、円 A の周上に、 $PC=PQ$ となる点 Q を、点 C と一致しないようにとり、 $\triangle AQP$ をつくります。

あとの(1)～(4)の問いに答えなさい。

(宮城県 2007 年度)



(1) $\triangle ACP \equiv \triangle AQP$ であることを証明しなさい。

(2) 3 点 A, B, C を結んでできる三角形はどんな三角形ですか。その名称を書きなさい。

(3) $\angle CAP = 40^\circ$ のとき、 $\angle AQP$ の大きさを求めなさい。

(4) $AC = 6 \text{ cm}$ とし、3 点 C, P, Q を結んでできる $\triangle CPQ$ の面積が最大となるように点 P をとるとき、 $\triangle CPQ$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	
(3)	度
(4)	cm^2

解答

(1)

証明

$\triangle ACP$ と $\triangle AQP$ において

仮定から

$$PC=PQ \quad \cdots \textcircled{1}$$

同じ円の半径であるから

$$AC=AQ \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$AP=AP \text{ (共通)} \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より, 3 辺の長さがそれぞれ等しいから

$$\triangle ACP \equiv \triangle AQP$$

(2) 正三角形

(3) 110 度

$$(4) \quad 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

解説

(4)

$\triangle CPQ$ の面積が最大となるのは, Q が CA 上にあるとき。

CQ は円 A の直径だから, $CQ=12$

また, $PC=PQ$ より, $\angle PAC=90^\circ$ だから, CP は円 B の直径となり, その長さは $CP=12$

したがって, $\triangle CPQ$ は 1 辺が 12 の正三角形だから,

$$\text{その面積は, } \frac{1}{2} \times 12 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 \right) = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 3】

図 I のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C を、 $AB=AC$, $\angle BAC=120^\circ$ となるようにとり、 $\triangle ABC$ をつくります。点 P を太い線で表した $\widehat{BC}$ 上にとります。また、点 Q を直線 AP について点 B と反対側に、 $AP=QA=QP$ となるようにとり、 $\triangle APQ$ をつくります。さらに、点 C と点 P , 点 C と点 Q をそれぞれ結びます。ただし、点 P は点 B, C のいずれにも一致しないものとします。

あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2007 年度)

図 I

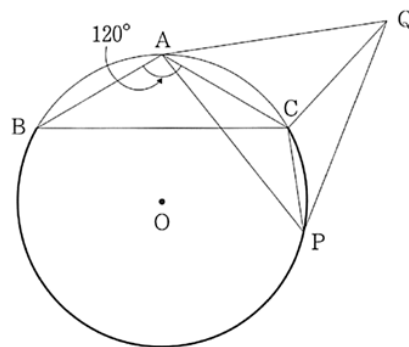
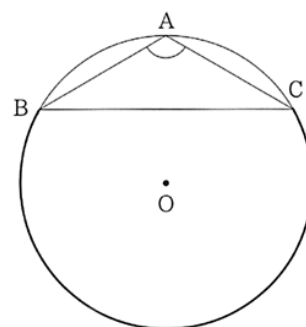


図 II



(1) $\triangle APC \equiv \triangle QPC$ であることを証明しなさい。

(2) 円 O の半径を 6 cm とし、点 O と点 Q を結ぶとき、次の①, ②の問いに答えなさい。図 II を利用して考えてもかまいません。

① 点 O と点 C を結びます。 $\angle OCQ=120^\circ$ となるとき、線分 OQ の長さを求めなさい。

② 線分 OQ の長さが最大となるとき、2 つの線分 CQ, PQ と $\widehat{CP}$ で囲まれる部分の面積を求めなさい。ただし、 $\widehat{CP}$ は小さい方の弧とし、円周率を π とします。

解答欄

(1)	証明	
(2)	①	cm
	②	cm ²

解答

(1)

証明

$\triangle APC$ と $\triangle QPC$ において

$\triangle APQ$ は正三角形であるから

$$AP = QP \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$CP = CP \text{ (共通)} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle ABC$ は, $AB = AC$ の二等辺三角形であるから,

$$\angle ABC = 30^\circ$$

同じ弧 $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいので

$$\angle APC = 30^\circ$$

$$\angle QPC = \angle APQ - \angle APC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

したがって, $\angle APC = \angle QPC \quad \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

2 辺の長さとその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle APC \equiv \triangle QPC$$

(2)

$$\textcircled{1} \quad 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\textcircled{2} \quad 18\sqrt{3} - 6\pi \text{ cm}^2$$

解説

②

OQ の長さが最大となるのは, AP が円 O の直径になるとき。

このとき, PQ と円 O の交点を R とする。

$\triangle APQ$ は 1 辺が 12 の正三角形で, $\angle ACP = 90^\circ$ より, $AC = CQ = 6$

$\angle ARP = 90^\circ$ より, $PR = RQ = 6$

したがって, 中点連結定理により, $CR = \frac{1}{2} AP = 6$

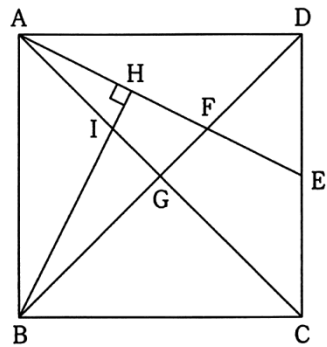
$\triangle COR$ は正三角形になるから, $\angle COR = 60^\circ$

$$\text{求める面積は, (四角形 } CORQ) - (\text{おうぎ形 } COR) = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times \left(6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} = 18\sqrt{3} - 6\pi \text{ cm}^2$$

【問 4】

図において、四角形 ABCD は、1 辺が 4 cm の正方形である。辺 CD の中点を E とし、線分 BD と線分 AE, AC との交点をそれぞれ F, G とする。また、点 B から線分 AE にひいた垂線と線分 AE, AC との交点をそれぞれ H, I とする。このとき、あとの問いに答えなさい。

(山形県 2007 年度)



- 問1. AE の長さを求めなさい。
- 問2. BH の長さを求めなさい。
- 問3. $\triangle ABI$ と $\triangle DAF$ が合同であることを証明しなさい。
- 問4. $\triangle AGF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	証明
問4	cm ²

解答

問1. $2\sqrt{5}$ cm

問2. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm

問3.

証明

$\triangle ABI$ と $\triangle DAF$ において

仮定より

四角形 ABCD は正方形だから

$AB=DA$ …①

$\angle BAI = \angle ADF = 45^\circ$ …②

$\angle DAF = 90^\circ - \angle BAH$ …③

$\triangle ABH$ は直角三角形だから

$\angle ABI = 90^\circ - \angle BAH$ …④

③, ④より, $\angle ABI = \angle DAF$ …⑤

①, ②, ⑤より,

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABI \equiv \triangle DAF$

問4. $\frac{4}{3}$ cm²

解説

問1.

$\triangle ADE$ において, 三平方の定理より, $AE = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

問2.

$\triangle BHA$ と $\triangle ADE$ において,

$\angle BHA = \angle ADE = 90^\circ$ …(i)

$\angle BAH = 90^\circ - \angle EAD = \angle AED$ …(ii)

(i), (ii)より,

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle BHA \sim \triangle ADE$

よって, $BH:AD = AB:EA$

$BH:4 = 4:2\sqrt{5}$

$2\sqrt{5} BH = 16$

$BH = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm

問4.

F から AD に垂線 FJ をひく。

$\triangle JFD$ は直角二等辺三角形なので, $JF = JD$

$\triangle AED$ において, $FJ \parallel ED$ より,

$JF:DE = AJ:AD$

$JF = x$ cm とすると,

$x:2 = (4-x):4$

$4x = 2(4-x)$

$x = \frac{4}{3}$,

$\triangle AGF = \triangle AGD - \triangle AFD$

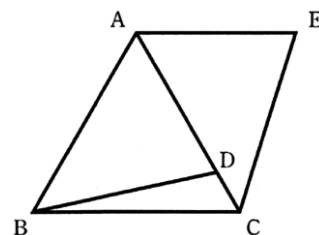
$= \frac{1}{4} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{3}$

$= \frac{4}{3}$ cm²

【問 5】

図のように、正三角形 ABC において辺 AC 上に点 D をとり、 $AE \parallel BC$ 、 $AD = AE$ となるように点 E をとる。このとき、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2007 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において

仮定より

$AD = AE \cdots ①$

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$AB = AC \cdots ②$

$\angle BAD = \angle ACB \cdots ③$

$AE \parallel BC$ より、平行線の錯角は等しいから

$\angle ACB = \angle CAE \cdots ④$

③, ④より

$\angle BAD = \angle CAE \cdots ⑤$

①, ②, ⑤より 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$

【問 6】

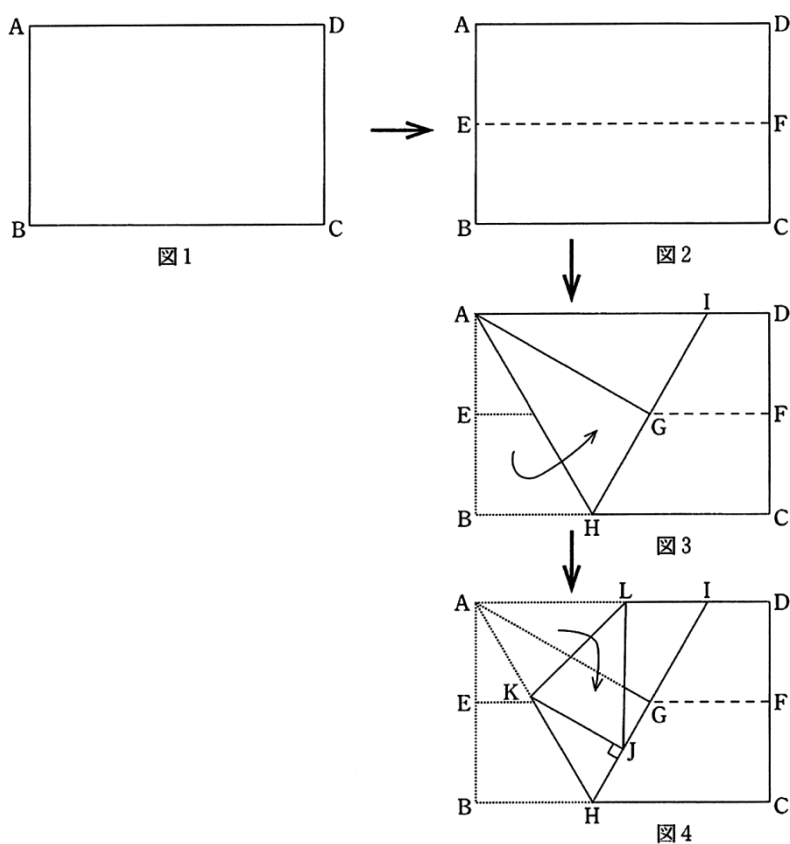
図1の長方形 ABCD の紙を、次の①, ②のように折ります。

- ① 辺 BC を辺 AD に重なるように折り、図 2 のようにもとに戻したときの折り目の線を EF とします。
- ② 図 3 のように、頂点 A を通る線分を折り目として、頂点 B が線分 EF 上にくるように折ったとき、頂点 B の移った点を G, 折り目を AH とします。また、線分 HG を延長した直線をかき、辺 AD との交点を I とします。

このとき、次の各問に答えなさい。

なお、考えるときに、用紙を切り取って利用してもさしつかえありません。

(埼玉県 2007 年度)



問1. 図 3 において、 $\triangle AGH$ と $\triangle AGI$ が合同であることを証明しなさい。

問2. 図 4 のように、図 3 の $\triangle AHI$ の頂点 A が辺 HI 上にくるように折り、その交点を J とし、辺 AH 上の折り目の点を K, 辺 AI 上の折り目の点を L とします。ここで、 $KJ \perp HI$, $KH = 4 \text{ cm}$ のとき、線分 JL の長さを求めなさい。ただし、根号はつけたままで答えなさい。

解答欄

問1	証明	
問2	cm	

解答

問1.

証明

$\triangle AGH$ と $\triangle AGI$ において,

$AD \parallel EF \parallel BC$ で,

$DF=FC$ だから,

$DF:FC=IG:GH=1:1$

したがって,

$GI=GH \cdots \textcircled{1}$

$AG=AG \cdots \textcircled{2}$

また, 紙を折っているので,

$\angle AGH = \angle ABH = 90^\circ$

したがって,

$\angle AGH = \angle AGI = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③から,

二辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle AGH \equiv \triangle AGI$

問2.

$3 + \sqrt{3}$ cm

解説

問2.

折り返した角より, $\angle BAH = \angle GAH$

合同な三角形の対応する角より, $\angle GAH = \angle GAI$

よって, $\angle BAH = \angle GAH = \angle GAI$

また, $\angle BAH + \angle GAH + \angle GAI = 90^\circ$ だから, $\angle GAH = 30^\circ$

よって, $\angle AHG = 60^\circ$

$\triangle KHJ$ は $HJ:KH:KJ=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形とわかる。

$KH=4$ より, $KJ=2\sqrt{3}$, $HJ=2$

また, $\triangle AHI$ は正三角形だから,

$HJ=AH=KH+KJ=4+2\sqrt{3}$,

$JI=4+2\sqrt{3}-2=2+2\sqrt{3}$

$\angle JLH=180^\circ-60^\circ-90^\circ=30^\circ$,

$\angle JIL=60^\circ$ より,

$\triangle JIL$ も $IL:JI:JL=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形とわかる。

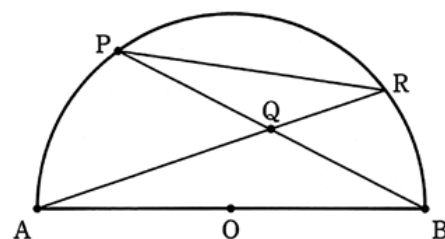
よって, $JL = \frac{\sqrt{3}}{2} JI = 3 + \sqrt{3}$ cm

【問 7】

図 1 で、点 O は線分 AB を直径とする半円の中心である。点 P は $\widehat{AB}$ 上にある点で、点 A 、点 B のいずれにも一致しない。点 B と点 P を結び、線分 BP の中点を Q とする。点 A と点 Q を結び、線分 AQ を Q の方向に延ばした直線と $\widehat{BP}$ との交点を R とする。点 P と点 R を結ぶ。次の各問に答えよ。

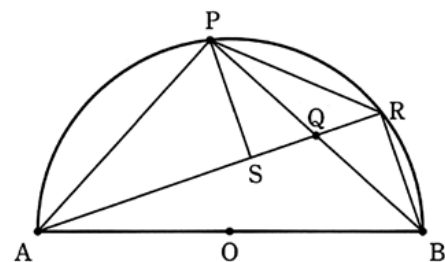
(東京都 2007 年度)

図 1



問1. 図 1 において、 $\widehat{AP}:\widehat{AB}=1:3$ のとき、 $\angle ARP$ の大きさは何度か。

図 2



問2. 右の図 2 は、図 1 において、点 P から線分 AQ にひいた垂線と、線分 AQ との交点を S とし、点 A と点 P 、点 B と点 R をそれぞれ結んだ場合を表している。次の(1)、(2)に答えよ。

(1) $\triangle PSQ \equiv \triangle BRQ$ であることを証明せよ。

(2) $OA=2\text{ cm}$ 、 $\angle PAB=\angle PBA$ のとき、四角形 $PABR$ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	度
問2	証明 $\triangle PSQ$ と $\triangle BRQ$ において、 (1) $\triangle PSQ \equiv \triangle BRQ$
	(2) cm^2

解答

問1. 30 度

問2. (1)

証明

$\triangle PSQ$ と $\triangle BRQ$ において

線分 PS は線分 AQ にひいた垂線だから

$$\angle PSQ = 90^\circ$$

$\angle ARB$ は半円の弧に対する円周角だから

$$\angle ARB = 90^\circ$$

$\angle ARB = \angle BRQ$ だから

$$\angle PSQ = \angle BRQ = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

点 Q は線分 BP の中点だから

$$PQ = BQ \cdots \textcircled{2}$$

対頂角は等しいから

$$\angle PQS = \angle BQR \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PSQ \equiv \triangle BRQ$$

$$(2) \quad \frac{24}{5} \text{ cm}^2$$

解説

問2.

(2)

AB は直径より $\angle APB = 90^\circ$

$$\angle PAB = \angle PBA \text{ より } PA = PB = \frac{1}{\sqrt{2}} AB = 2\sqrt{2}$$

$$PQ = BQ = \frac{1}{2} PB = \sqrt{2}$$

$$\triangle PAQ \text{ で三平方の定理より, } AQ = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

2組の角が等しいので, $\triangle PAQ \sim \triangle SPQ$ だから

$$QA : QP = AP : PS = QP : QS$$

$$\sqrt{10} : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : PS = \sqrt{2} : QS \text{ となり}$$

$$PS = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$QS = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$PS = BR$, $QS = QR$ より

$$(\text{四角形 } PABR) = \triangle PAR + \triangle BAR$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times AR \times PS$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \times \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$= \frac{24}{5} \text{ cm}^2$$

【問 8】

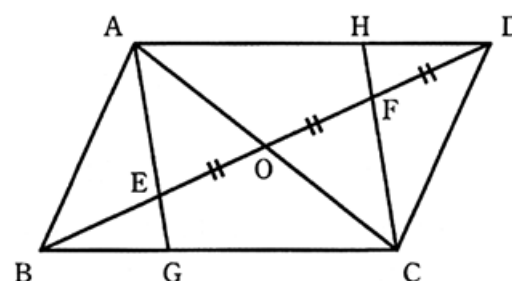
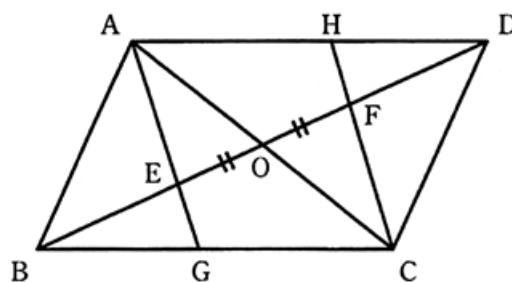
図のように、平行四辺形 $ABCD$ があり、対角線の交点を O とする。 $OE=OF$ となるように、2 点 E, F をそれぞれ線分 BO, OD 上にとり、 AE の延長と辺 BC との交点を G 、 CF の延長と辺 AD との交点を H とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2007 年度)

問1. $\triangle AOE \equiv \triangle COF$ を証明しなさい。ただし、証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

問2. $BE:EO=3:2$ のとき、 $BG:GC$ を求めなさい。

問3. $OF=FD$ 、 $\triangle CDF$ の面積が 12 cm^2 のとき、四角形 $AOFH$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	証明 $\triangle AOE$と$\triangle COF$において	
問2	$BG:GC=$	:
問3		cm^2

解答

問1.

証明

$\triangle AOE$ と $\triangle COF$ において

仮定から

$$OE = OF \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle AOE = \angle COF \cdots \textcircled{2}$$

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから

$$OA = OC \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AOE \equiv \triangle COF$$

問2. $BG:GC = 3:4$

問3. 20cm^2

解説

問2.

$\angle GAC = \angle HCA$ より, 錯角が等しいので, $AG \parallel HC$

よって, $BG:GC = BE:EF = 3:(2+2) = 3:4$

問3.

$AD \parallel BC$ より $HF:FC = DF:FB = 1:3$

$$\text{よって } \triangle DHF = \frac{1}{3} \triangle CDF = \frac{12}{3} = 4$$

$$\triangle HOF = \triangle DHF = 4$$

$$\triangle HOD = 4 + 4 = 8$$

$DH:HA = DF:FE = 1:2$ より,

$$\triangle AOH = 2\triangle HOD = 2 \times 8 = 16,$$

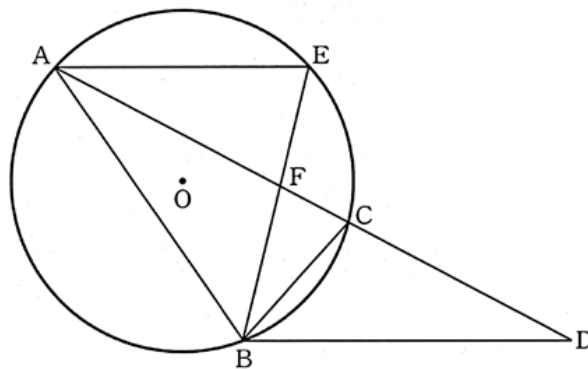
$$(\text{四角形 AOFH}) = \triangle AOH + \triangle HOF$$

$$= 16 + 4$$

$$= 20$$

【問 9】

図において、3 点 A, B, C は円 O の円周上の点であり、 $AB=AC$ である。AC の延長上に $BA=BD$ となる点 D をとる。 $\widehat{AC}$ 上に $\angle BAC=\angle CAE$ となる点 E をとる。AC と BE との交点を F とする。



このとき、次の1, 2の問いに答えなさい。

(静岡県 2007 年度)

問1. $\triangle ABF \equiv \triangle DBC$ であることを証明しなさい。

問2. 円 O の半径が 5 cm で、 $\angle AFB=102^\circ$ のとき、 $\widehat{BC}$ に対する中心角の大きさを求めなさい。また、 $\widehat{BC}$ の長さを求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

問1	証明
問2	中心角 度、 $\widehat{BC}$ の長さ cm

解答

問1. 省略

問2. 中心角 48 度、 $\widehat{BC}$ の長さ $\frac{4}{3}\pi$ cm

解説

問2. $\triangle ABF \equiv \triangle DBC$ より、 $\angle BCD = \angle BFA = 102^\circ$ $\angle BCA = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$, $AB=AC$ より、 $\angle BAC = 180^\circ - 2 \times 78^\circ = 24^\circ$ 円周角の定理より、 $\angle BOC = 2 \angle BAC = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

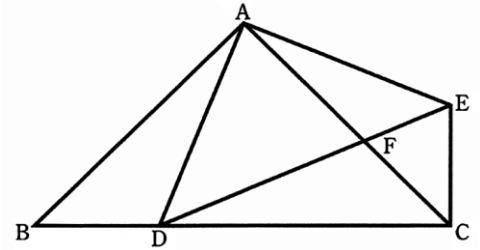
よって、弧 $BC = 2\pi \times 5 \times \frac{48}{360} = \frac{4}{3}\pi$ cm

【問 10】

図のように、 $AB=AC$ の直角二等辺三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり、 $AD=AE$ となる直角二等辺三角形 ADE をつくる。また、線分 AC と線分 DE の交点を F とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2007 年度)



問 1. $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ であることの証明を次の (ア) ～ (ウ) に適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〈証明〉

$\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、

仮定から、

$AB=AC$ …①

(ア) …②

また、

$\angle BAD = 90^\circ -$ (イ)

$\angle CAE = 90^\circ -$ (イ)

であるから、

$\angle BAD = \angle CAE$ …③

①, ②, ③より, (ウ) がそれぞれ等しいので、

$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$

問 2. $\triangle ABD \sim \triangle DCF$ であることを証明しなさい。

問 3. 点 A から線分 BC に垂線 AM をひく。 $AB=DC=6\text{cm}$ のとき、次の各問いに答えなさい。

(1) AM の長さを求めなさい。

なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $a\sqrt{b}$ の形に変形し、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

(2) $\triangle ADF$ の面積を求めなさい。

なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ簡単な数にしなさい。

解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	証明	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1.

(ア) $AD=AE$ (イ) $\angle DAC$ (ウ) 2 辺とその間の角

問2.

証明(例 1)

$\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ で,

$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形なので,

$\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ だから,

$\angle ABD = \angle DCF \cdots \textcircled{1}$

三角形の内角・外角の性質より,

$\angle BAD + \angle ABD = \angle CDA$

$= \angle CDF + \angle EDA$

ここで, 仮定より $\angle ABD = \angle EDA = 45^\circ$ だから,

$\angle BAD = \angle CDF \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle ABD \sim \triangle DCF$

証明(例 2)

$\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ で,

仮定より $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ だから,

$\angle ABD = \angle DCF \cdots \textcircled{1}$

仮定より $\angle ADE = 45^\circ$ だから,

$\angle BDA = \angle BDC - \angle ADE - \angle FDC$

$= 180^\circ - 45^\circ - \angle FDC$

$= 135^\circ - \angle FDC \cdots \textcircled{2}$

また三角形の内角の和は 180° であり,

仮定より $\angle DCF = 45^\circ$ だから,

$\angle CFD = 180^\circ - \angle DCF - \angle FDC$

$= 180^\circ - 45^\circ - \angle FDC$

$= 135^\circ - \angle FDC \cdots \textcircled{3}$

②, ③より,

$\angle BDA = \angle CFD \cdots \textcircled{4}$

①, ④より, 2 組の角がそれぞれ等しいので,

$\triangle ABD \sim \triangle DCF$

問3.

(1) $3\sqrt{2}$ cm

(2) $18\sqrt{2} - 18$ cm²

解説

問3.

(1)

$\angle AMB = 90^\circ$ より, $\angle MAB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\triangle MAB$ は $MA = MB$ の直角二等辺三角形だから,

$AM : AB = 1 : \sqrt{2}$

$AM : 6 = 1 : \sqrt{2}$

$\sqrt{2} AM = 6$

$AM = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm

(2)

$\triangle ABC$ において,

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の直角二等辺三角形だから,

$BC = \sqrt{2} AB = 6\sqrt{2}$

よって, $BD = 6\sqrt{2} - 6$

問2より, $\triangle ABD \sim \triangle DCF$ 条件より, $AB = DC$ だから, $\triangle ABD \cong \triangle DCF$

よって, $\triangle ADF = \triangle ABC - 2\triangle ABD$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - 2 \times \frac{1}{2} \times (6\sqrt{2} - 6) \times 3\sqrt{2}$

$= 18 - 36 + 18\sqrt{2}$

$= 18\sqrt{2} - 18$ cm²

【問 11】

図Ⅰ～図Ⅲにおいて、四角形 $ABCD$ は長方形であり、四角形 $EFCG$ は長方形 $ABCD$ を C を中心として回転させてできる長方形である。このとき、長方形 $ABCD \equiv$ 長方形 $EFCG$ である。辺 CD と辺 EF は、 D 、 F と異なる点で交わっている。 H は、辺 CD と辺 EF との交点である。 $AB=6$ cm, $AD=3$ cm であるとし、鋭角 $\angle BCF$ の大きさが α° であるとして、次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。また、円周率は π とする。

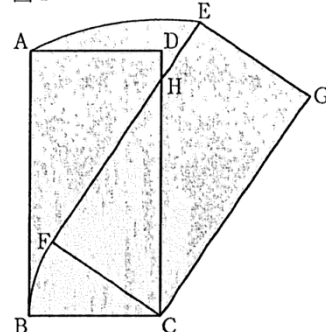
(大阪府 2007 年度 後期)

問1. 図Ⅰにおいて、 $\widehat{BF}$ は、 C を中心とし線分 CB を半径とする円の弧である。 $\widehat{AE}$ は、 C を中心とし C と A とを結んでできる線分 CA を半径とする円の弧である。図Ⅰ中の  で示した部分は、辺 AB , BC , CG , GE と $\widehat{AE}$ によって囲まれてできる図形である。

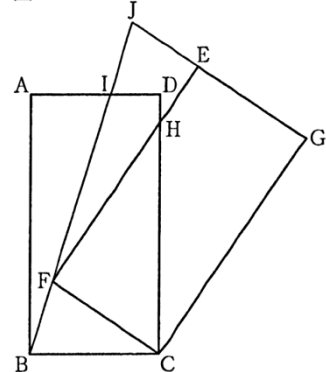
(1) $\widehat{BF}$ の長さは何 cm ですか。 α を用いて表しなさい。

(2)  で示した部分の面積は何 cm^2 ですか。 α を用いて表しなさい。

図Ⅰ

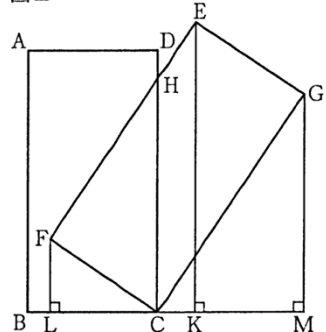


図Ⅱ



問2. 図Ⅱにおいて、直線 BF と辺 AD は、 D と異なる点で交わっている。 I は直線 BF と辺 AD との交点であり、 J は直線 BF と直線 EG との交点である。このとき、 $\triangle ABI \equiv \triangle EFJ$ であることを証明しなさい。

図Ⅲ



問3. 図Ⅲにおいて、 K , L , M は、それぞれ、 E , F , G から直線 BC にひいた垂線と直線 BC との交点である。 $GM=5$ cm のとき、

(1) 線分 FL の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2) 線分 EK の長さを求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm	
	(2)	cm ²	
問2	証明		
問3	(1)	求め方	
	(2)	cm	

解答

問1.

$$(1) \frac{1}{60} \pi a \quad (2) \frac{1}{8} \pi a + 18$$

問2.

証明

$\triangle ABI$ と $\triangle EFJ$ において

長方形 $ABCD \equiv$ 長方形 $EFCG$ だから

$$AB = EF \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle IAB = \angle JEF = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$CB = CF \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ より $\triangle CBF$ は二等辺三角形であり

二等辺三角形の底角は等しいから

$$\angle CBF = \angle CFB \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{また } \angle ABI = \angle ABC - \angle CBF$$

$$= 90^\circ - \angle CBF \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\angle EFJ = 180^\circ - (\angle EFC + \angle CFB)$$

$$= 90^\circ - \angle CFB \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{6}\text{より } \angle ABI = \angle EFJ \quad \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{7}$ より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABI \equiv \triangle EFJ$$

問3.

(1)

求め方

$$\angle CMG = 90^\circ \text{ だから } CM^2 = CG^2 - GM^2$$

$$CM = x \text{ cm とすると } x^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

$$\text{これを解くと, } x > 0 \text{ より } x = \sqrt{11}$$

$\triangle FLC$ と $\triangle CMG$ において

$$\angle FLC = \angle CMG = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle LCF = 180^\circ - (\angle FCG + \angle GCM) = 90^\circ - \angle GCM \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle MGC = 180^\circ - (\angle CMG + \angle GCM) = 90^\circ - \angle GCM \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3}\text{より } \angle LCF = \angle MGC \quad \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}\textcircled{4}$ より2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle FLC \sim \triangle CMG$$

$$\text{よって } FL : FC = CM : CG$$

$$FL = y \text{ cm とすると } y : 3 = \sqrt{11} : 6$$

$$\text{これを解くと } y = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\text{答 } \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{11}}{2} + 5$$

解説

問1

(2). $\triangle ABC$ において, 三平方の定理より, $AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ 色のついた部分の面積は, $\triangle ABC + (\text{おうぎ形 ACE}) + \triangle CEG = (\text{おうぎ形 ACE}) + (\text{長方形 ABCD}) = \pi \times (3\sqrt{5})^2 \times \frac{a}{360} + 3 \times 6 = \frac{1}{8} \pi a + 18 \text{ cm}^2$

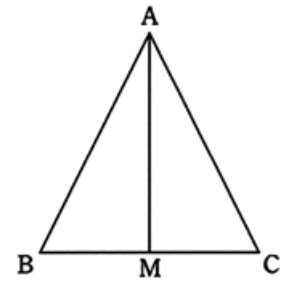
問3

(2). G から EK に垂線 GP をひく。 $\triangle FCL$ と $\triangle EGP$ において, $\angle FLC = \angle EPG = 90^\circ \quad \cdots (\text{i})$ $BC \parallel PG$ だから, $\angle GCM = \angle CGP$ $\angle GCM = 180^\circ - 90^\circ - a = 90^\circ - a$ $\angle EGP = 90^\circ - (90^\circ - a) = a$ よって, $\angle FCL = \angle EGP \quad \cdots (\text{ii})$ $FC = EG = 3 \quad \cdots (\text{iii})$ (i), (ii), (iii)より, 直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので, $\triangle FCL \equiv \triangle EGP$ よって, $EP = FL = \frac{\sqrt{11}}{2}$ $EK = EP + PK = \frac{\sqrt{11}}{2} + 5 \text{ cm}$

【問 12】

図のように、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC の辺 BC の中点を M とする。次の(1), (2)に答えなさい。

(島根県 2007 年度)



(1) $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ であることを証明しなさい。

ただし、 $AM \perp BC$ を用いないこと。

(2) $AM \perp BC$ であることを次のように説明した。次の のア, イにあてはまるものを答えなさい。

$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ より, $\angle AMB = \angle$ ア

また, $\angle AMB + \angle$ ア $=$ イ $^{\circ}$ だから, $\angle AMB = 90^{\circ}$

つまり, $AM \perp BC$ である。

解答欄

(1)	証明				
(2)	ア	$\angle$	イ	$^{\circ}$	

解答

(1)

証明

$\triangle ABM$ と $\triangle ACM$ において

条件より

$AB=AC$ …①

点 M は, 辺 BC の中点だから

$BM=CM$ …②

また, $AM=AM$ …③

①, ②, ③より

3 辺の長さがそれぞれ等しいので

$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$

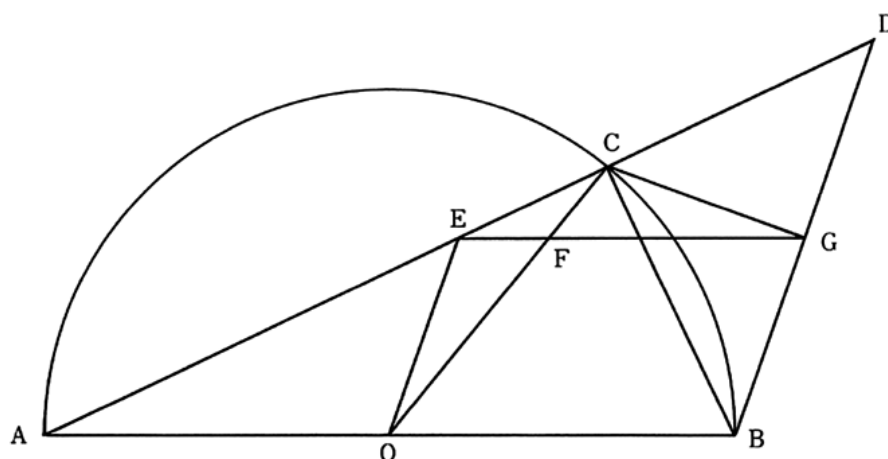
(2) ア $\angle AMC$, イ 180°

【問 13】

図のような、線分 AB を直径とする半円があり、点 O は線分 AB の中点である。この半円の弧 AB 上に、2 点 A , B と異なる点 C をとり、点 A と点 C , 点 B と点 C , 点 O と点 C をそれぞれ結ぶ。線分 AC を C の方向にのばした直線上に点 C と異なる点 D を、線分 CD の長さが、線分 AC の長さより短くなるようにとる。ただし、点 D は線分 AC 上にない点である。点 D と点 B を結ぶ。線分 AD の中点を E として、点 E を通り、線分 AB に平行な直線をひき、線分 OC と交わる点を F , 線分 BD と交わる点を G とする。点 O と点 E , 点 C と点 G をそれぞれ結ぶ。

このとき、次の問1では指示に従って答え、問2では に適当な数を書き入れなさい。

(岡山県 2007 年度)



問1. $\triangle CEO \equiv \triangle ECG$ を証明しなさい。

問2. $AC=8$ cm, $CD=4$ cm, $\angle CDB=45^\circ$ であるとき, $BD =$ cm , 半円の面積は cm^2 ,
 $CF =$ cm である。また, $\triangle CEF$ の面積は cm^2 である。

解答欄

問1	証明	
問2	(ア)	cm
	(イ)	cm ²
	(ウ)	cm
	(エ)	cm ²

解答

問1.

証明

$\triangle CEO$ と $\triangle ECG$ において

$CE=EC$ (共通) $\cdots(1)$

点 O は円の中心だから、

$AO=CO$ $\cdots(2)$

よって、 $\triangle OAC$ は二等辺三角形だから、

$\angle OAC=\angle OCA$ $\cdots(3)$

また、 $AB \parallel EG$ だから、

$\angle GEC=\angle OAC$ $\cdots(4)$

(3), (4)から、

$\angle OCA=\angle GEC$

よって、 $\angle OCE=\angle GEC$ $\cdots(5)$

また、 $DA:DE=2:1$, $AB \parallel EG$

だから、

$2EG=AB$

よって、 $EG=\frac{1}{2}AB$ だから、

$EG=AO$

よって、(2)から

$CO=EG$ $\cdots(6)$

(1), (5), (6)より

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle CEO \equiv \triangle ECG$

問2.

ア $4\sqrt{2}$ cm イ 10π cm² ウ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm エ $\frac{1}{2}$ cm²

解説

ウ.

$\triangle BCD$ において、 $\angle CDB=45^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$ より、 $\angle CBD=45^\circ$

よって、 $CB=CD=4$ の直角二等辺三角形になるから、 $BD=\sqrt{2} \times CD=4\sqrt{2}$ cm

$\triangle ACB$ において、 $AC=8$, $BC=4$ だから、三平方の定理より、 $AB=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$ (cm)

よって、円の半径は、 $\frac{4\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$ (cm)

半円の面積は、 $\frac{1}{2} \times \pi \times (2\sqrt{5})^2=10\pi$ cm²

C から EO, DB に平行な直線をひき、EG との交点を P とする。

CP $\parallel$ EO より、CF:OF=CP:OE $\cdots(1)$ OE= $\frac{1}{2}$ BD=DG $\cdots(2)$ CP $\parallel$ DG より、CP:DG=EC:ED $\cdots(3)$

(1), (2), (3)より、CF:OF=CP:DG=EC:ED= $\{(8+4) \div 2-4\}:\{(8+4) \div 2\}=2:6=1:3$

CF= x cm とすると、円の半径だから OC= $2\sqrt{5}$ より、OF= $2\sqrt{5}-x$ cm とおける。

よって、 $x:(2\sqrt{5}-x)=1:3$ $3x=2\sqrt{5}-x$ $4x=2\sqrt{5}$ $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm

エ.

問 1 より、 $\angle OCE=\angle GEC$ だから、 $\triangle CEF$ は EF=CF の二等辺三角形。

F から EC に垂線 FH をひくと、二等辺三角形の頂角の頂点から底辺にひいた垂線は、底辺を 2 等分するから、

EH=CH= $=1$

$\triangle FCH$ において、三平方の定理より、 $FH=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

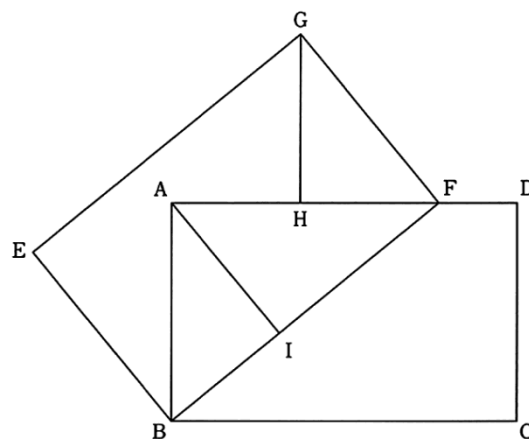
よって、 $\triangle CEF$ $\frac{2}{2}=\frac{1}{2} \times CE \times FH=\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ cm²

【問 14】

図のように、1 つの平面上に合同な 2 つの長方形 $ABCD$ ， $EBFG$ があり、点 F は辺 AD 上の点です。また、線分 AF 上に点 H 、辺 BF 上に点 I があり、 $GH \perp AF$ 、 $AI \perp BF$ です。

これについて、次の問1・問2に答えなさい。

(広島県 2007 年度)



問1. $\triangle ABI \equiv \triangle GFH$ であることを証明しなさい。

問2. $AB=4\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$ のとき、線分 AI の長さは何 cm ですか。

解答欄

問1	〔仮定〕 図において、四角形 $ABCD$ と四角形 $EBFG$ は合同な長方形、$GH \perp AF$、$AI \perp BF$ 〔結論〕 $\triangle ABI \equiv \triangle GFH$ 〔証明〕
問2	cm

解答

問1.

証明

$\triangle ABI$ と $\triangle GFH$ において

$AI \perp BF$, $GH \perp AF$ であるから

$$\angle AIB = \angle GHF = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

四角形 $ABCD$ と四角形 $EBFG$ は合同な長方形であるから

$$AB = GF \cdots \textcircled{2}$$

$\angle BAF = \angle BFG = 90^\circ$ であるから

$$\angle ABI = 90^\circ - \angle AFB$$

$$= \angle GFH \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABI \equiv \triangle GFH$$

問2.

$$\frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ cm}$$

解説

問2.

$\triangle ABF$ と $\triangle HFG$ において,

$$\angle FAB = \angle GHF = 90^\circ,$$

$$\angle ABF = 90^\circ - \angle AFB = \angle HFG \text{ より,}$$

2組の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABF \sim \triangle HFG$$

$$\text{よって, } AB:HF = BF:FG$$

$$4:HF = 6:4,$$

$$6HF = 4 \times 4$$

$$HF = \frac{8}{3}$$

問1より, $\triangle ABI \equiv \triangle GFH$

$$\text{よって, } IB = HF = \frac{8}{3}$$

$$\triangle ABI \text{ において三平方の定理より, } AI = \sqrt{4^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ cm}$$

【問 15】

図 1 のように、 $AB=AC=4\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$ の二等辺三角形 ABC があり、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を M とする。また、線分 BM 上に点 B と異なる点 P をとり、線分 BP を直径とする円と辺 AB との点 B 以外の交点を Q とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2007 年度)

問1. 図 2 のように、 $PQ=PM$ となるとき、 $\triangle PAQ \equiv \triangle PAM$ であることを証明せよ。

問2. 図 3 のように点 Q が辺 AB の中点となるとき、

(1) 線分 AP の長さを求めよ。

(2) 2 点 Q 、 C を結んでできる $\triangle QPC$ の面積を求めよ。

図 1

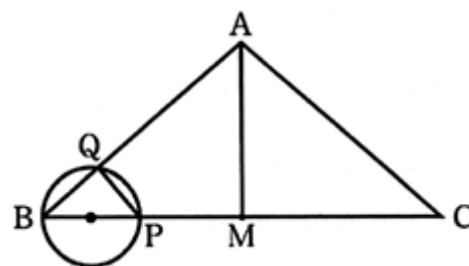


図 2

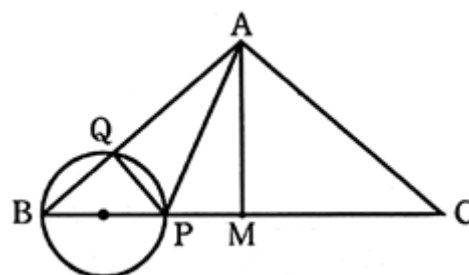
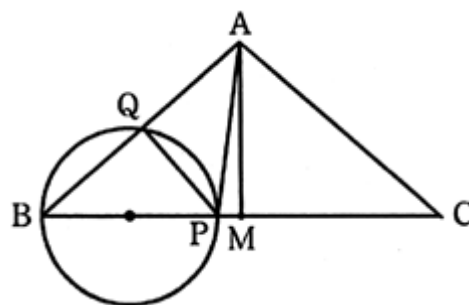


図 3



解答欄

問1	証明	
問2	(1)	
	(2)	

解答

問1.

証明

$\triangle PAQ$ と $\triangle PAM$ において,

点 Q は線分 BP を直径とする円周上の点で, 半円の弧に対する円周角は 90° だから,

$$\angle PQA = 180^\circ - \angle BQP = 90^\circ \quad \text{①}$$

二等辺三角形の頂角の二等分線と底辺は垂直だから,

$$\angle PMA = 90^\circ \quad \text{②}$$

①, ②より,

$$\angle PQA = \angle PMA = 90^\circ \quad \text{③}$$

辺 PA は共通だから, $PA = PA$ ④

仮定から $PQ = PM$ ⑤

③, ④, ⑤で,

2 つの直角三角形は, 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいことがいえたから,

$$\triangle PAQ \equiv \triangle PAM$$

問2.

$$(1) \quad \frac{8}{3} \text{ cm} \quad (2) \quad \frac{5\sqrt{7}}{6} \text{ cm}^2$$

解説

問2.

(1)

$\triangle ABM$ と $\triangle PBQ$ において,

共通な角だから, $\angle ABM = \angle PBQ \cdots (i)$

二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するから,

$$\angle BMA = 90^\circ$$

BP は直径より, $\angle BQP = 90^\circ$

よって, $\angle BMA = \angle BQP \cdots (ii)$

(i), (ii)より,

2 組の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABM \sim \triangle PBQ$$

よって, $AB:PB = BM:BQ$

$$4:PB = 3:2$$

$$3PB = 4 \times 2$$

$$PB = \frac{8}{3} \quad PM = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\triangle ABM \text{ で三平方の定理より, } AM = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\triangle APM \text{ で三平方の定理より, } AP = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

(2)

Q から BC に垂線 QH をひく。

$\angle QHB = \angle AMB = 90^\circ$ より, 同位角が等しいので, $QH \parallel AM$

よって, $QH:AM = BQ:BA$

$$QH: \sqrt{7} = 2:4$$

$$4QH = 2 \times \sqrt{7}$$

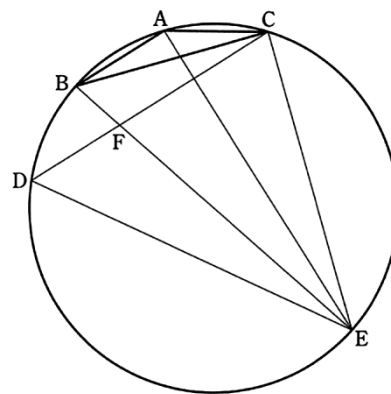
$$QH = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{よって, } \triangle QPC = \frac{1}{2} \times PC \times QH$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(3 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{6} \text{ cm}^2$$

【問 16】

図は、 $\angle A$ が鈍角である $\triangle ABC$ と 3 つの頂点 A, B, C を通る円において、円周上に $AB \parallel CD$ となるように点 D をとり、点 A を含まない $\widehat{CD}$ 上に $AE = DE$ となるように点 E をとったものである。また、線分 BE と線分 CD の交点を F とし、点 C と点 E を結んだものである。このとき、次の 1～3 の問いに答えなさい。



(鹿児島県 2007 年度)

問1. $\angle ABC$ と大きさの等しい角を 1 つあげよ。

問2. $\triangle AEC \equiv \triangle DEF$ であることを証明せよ。

問3. $\triangle ABC$ が $\angle BAC = 150^\circ$ の二等辺三角形のとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(1) $\angle ECF$ の大きさは何度か。

(2) $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle DEF$ の面積の何倍か。

解答欄

問1		
問2	証明	
問3	(1)	度
	(2)	倍

解答

問1. $\angle AEC$

問2.

証明

$\triangle AEC$ と $\triangle DEF$ において

仮定より

$$AE = DE \quad \cdots \textcircled{1}$$

同じ弧に対する円周角は等しいから

$$\angle CAE = \angle FDE \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle ABC = \angle AEC \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\angle BCD = \angle DEF \quad \cdots \textcircled{4}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ABC = \angle BCD \quad \cdots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤より

$$\angle AEC = \angle DEF \quad \cdots \textcircled{6}$$

①, ②, ⑥より

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AEC \equiv \triangle DEF$$

問3.

$$(1) 75 \text{ 度} \quad (2) \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \text{ 倍}$$

解説

問3

(1)

$$\triangle ABC \text{ において, } \angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ$$

$$\text{弧 } AB \text{ の円周角より, } \angle AEB = \angle ACB = 15^\circ$$

$$AB \parallel CD \text{ より, 錯角が等しいので, } \angle BCD = \angle ABC = 15^\circ$$

$$\text{また, 弧 } BD \text{ の円周角より, } \angle BED = \angle BCD = 15^\circ$$

$$\text{よって, } \angle AED = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$$

$$AD \text{ を結ぶと, } \triangle EAD \text{ は } EA = ED \text{ の二等辺三角形だから, } \angle DAE = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$$

$$\text{弧 } DE \text{ の円周角より, } \angle ECF = \angle DCE = \angle DAE = 75^\circ$$

(2)

$$\triangle ECF \text{ は } \angle ECF = \angle EFC = 75^\circ \text{ より, } EC = EF \text{ の二等辺三角形}$$

$$\triangle AEF \text{ と } \triangle AEC \text{ において, 共通なので, } AE = AE \quad \angle AEF = \angle AEC = 15^\circ$$

$$EC = EF \text{ より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので, } \triangle AEF \equiv \triangle AEC$$

$$\text{よって, } \triangle DEF \equiv \triangle AEC \equiv \triangle AEF \cdots \textcircled{1}$$

$$AB \parallel CD \text{ より, } \triangle ABC = \triangle ABF \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \triangle ABC : \triangle DEF = \triangle ABF : \triangle AEF = BF : FE \cdots \textcircled{3}$$

AE と CF の交点を H とする。

$$\triangle ECF \text{ は二等辺三角形で, } \angle CEH = \angle FEH \text{ より, } \angle EHF = 90^\circ, FH = CH$$

$$\triangle ACH \text{ は, } \angle AHC = 90^\circ, \angle ACH = 30^\circ \text{ なので, } AC = AB = a \text{ とすると, } CH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{よって, } FH : BA = \frac{\sqrt{3}}{2} a : a = \sqrt{3} : 2$$

$$FH \parallel AB \text{ より, } EF : EB = \sqrt{3} : 2$$

$$\text{したがって, } EF : FB = \sqrt{3} : (2 - \sqrt{3})$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } \triangle ABC : \triangle DEF = (2 - \sqrt{3}) : \sqrt{3} \quad \triangle ABC = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \triangle DEF = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \triangle DEF$$

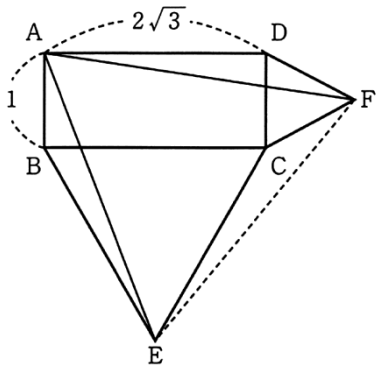
【問 17】

図のように、 $AB=1$ 、 $AD=2\sqrt{3}$ の長方形 $ABCD$ があり、この長方形の外側に 2 つの正三角形 $\triangle BEC$ と $\triangle DCF$ をつくる。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2007 年度)

問1. $\triangle ABE \equiv \triangle FDA$ であることを次のように証明した。 をうめて証明を完成しなさい。



(証明)

$\triangle ABE$ と $\triangle FDA$ において、

仮定より、

$AB=FD$ …①

$BE=$ …②

また、

より、

$\angle ABE = \angle FDA$ …③

①, ②, ③より、

ので、

$\triangle ABE \equiv \triangle FDA$

問2. AE の長さを求めなさい。

問3. $\triangle AEF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	$AE=$	
問3		

解答

問1.

ア DA

イ $\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = 150^\circ$, $\angle FDA = \angle CDA + \angle FDC = 150^\circ$

ウ 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい

問2.

$$AE = \sqrt{19}$$

問3.

$$\frac{19\sqrt{3}}{4}$$

解説

問2.

E から BC に垂線 EH をひくと, $\triangle EBC$ は正三角形だから,

$$BH = \frac{1}{2} BC = \sqrt{3} \text{ , } EH = \sqrt{3} \text{ BH} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

EH を延長し, AD との交点を K とすると, $\triangle AEK$ で, $\angle AKE = 90^\circ$, $AK = \sqrt{3}$, $EK = 3 + 1 = 4$ より,

$$\text{三平方の定理を利用して, } AE = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{19}$$

問3.

$\angle FCE = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ = \angle ABE$, $AB = FC$, $BE = CE$ より,

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABE \equiv \triangle FCE$$

よって, $AE = FE$

$\triangle AEF$ は 1 辺が $\sqrt{19}$ の正三角形になるから,

$$\text{その高さは } \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{19} = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

$$\triangle AEF = \frac{1}{2} \times \sqrt{19} \times \frac{\sqrt{57}}{2} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$$