

8. 規則性の問題 【2015 年度出題】

【問 1】

数学の時間に、右の図1のように自然数を次々と規則的に並べていくことを考えた。次の問1～問3に答えなさい。

(青森県 2015 年度)

問1 図1のアにあてはまる数を求めなさい。

問2 次の文章は、としさんとひろさんの会話である。

「イ」 ～ 「カ」 にあてはまる数を表す式を書きなさい。

とし: この図1の中の数の表し方はどうなるのかな。

ひろ: 図1をよく見てみると、3 行目は 9, 8, 7 と 1 ずつ減っていく、4 列目の 12 から増えていく。また、4 行目は 16, 15, 14, 13 と 1 ずつ減っていく、5 列目の 20 から増えていく。だから、下の図2のように太線を引いて、太線枠の中にある数と太線枠の外にある数の表し方を分けて考えてみよう。

図1

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	5 列 目	6 列 目	...	n 列 目	...	m 列 目
1行目	1	2	5	10	17	26	...	...	...	オ
2行目	4	3	6	11	18	27	...	...	...	...
3行目	9	8	7	12	19	...	...	...	...	...
4行目	16	15	14	13	20	...	...	...	...	...
5行目	25	24	23	22	21	...	...	...	...	...
6行目	...	...	...	ア	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n 行目	...	...	...	...	...	...	...	...	...	カ
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m 行目	イ	...	...	ウ	...	...	...	エ	...	...

図2

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	5 列 目	6 列 目	...	n 列 目	...	m 列 目
1行目	1	2	5	10	17	26	...	...	...	オ
2行目	4	3	6	11	18	27	...	...	...	...
3行目	9	8	7	12	19	...	...	...	...	...
4行目	16	15	14	13	20	...	...	...	...	...
5行目	25	24	23	22	21	...	...	...	...	...
6行目	...	...	...	ア	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n 行目	...	...	...	...	...	...	...	...	...	カ
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m 行目	イ	...	...	ウ	...	...	...	エ	...	...

〔太線枠の中にある数の表し方〕

1 列目の数は上から 1, 4, 9, 16, 25, ... と並んでいる。つまり、 m 行目の 1 列目の数を m を用いて表すと「イ」になる。

そこから右へすすんでいくと、列が 1 ずつ増えるごとに数が 1 ずつ減っている。だから、 m 行目の 4 列目の数を m を用いて表すと「ウ」になり、 m 行目の n 列目の数を m, n を用いて表すと「エ」になる。

とし:そうか。今度は僕が考えてみるよ。

[太線枠の外にある数の表し方]

図2の 1 行目の太線枠の外にある数は 2, 5, 10, 17, …と並んでいる。これは右の図3のように $1+1$, $4+1$, $9+1$, $16+1$, …と考えることができる。そうすると, 1 行目の m 列目の数を m を用いて表すと **オ** になる。

よって, n 行目の m 列目の数を m, n を用いて表すと **カ** になる。

図3



問3 21 行目の 31 列目の数を求めなさい。

解答欄

問1	ア	
問2	イ	
	ウ	
	エ	
	オ	
	カ	
問3		

解答

問1

ア 33

問2

イ m^2

ウ m^2-3

エ $m^2-(n-1)$

オ $(m-1)^2+1$

カ $(m-1)^2+n$

問3 921

解説

問1

6行目の1列目は $6 \times 6 = 36$

アはそれより3右に移動した位置にあるので3減って $36-3=33$

問2

太線枠の中にある数について

m 行目の1列目の数は m の2乗になっているので m^2 イ

そこから右へすすんでいくと列が1ずつ増えるごとに数が1ずつ減っているの

m 行目の1列目から4列目には3減っている。

よって m 行目の4列目の数は m^2-3 ウ

これより m 行目の n 列目の数は $m^2-(n-1)$ エ

太線枠外にある数について

1行目の m 列目の数は $(m-1)$ 行目の1列目の数 $(m-1)^2$ より1大きい数なので $(m-1)^2+1$ オ

1行目の m 列目から n 行目の m 列目までは $n-1$ 増えるので $(m-1)^2+1+n-1=(m-1)^2+n$ カ

問3

21行目 31列目の数は太枠線の外だから

その数は $(m-1)^2+n$ に $m=31, n=21$ を代入して

$(31-1)^2+21=921$

【問 2】

n 段 n 列のマス目に、下の規則にしたがって黒い碁石を置いていきます。

規則

1 段目と n 段目, 1 列目と n 列目にあるすべてのマスに黒い碁石を 1 つずつ置く。

図1は、3 段 3 列のマス目に、図2は、4 段 4 列のマス目に、この規則にしたがって黒い碁石を置いたものです。

図1

	1 列 目	2 列 目	3 列 目
1 段目	●	●	●
2 段目	●		●
3 段目	●	●	●

図2

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目
1 段目	●	●	●	●
2 段目	●			●
3 段目	●			●
4 段目	●	●	●	●

あとの(1), (2)の問いに答えなさい。

(宮城県 2015 年度 後期)

(1) 7 段 7 列のマス目に、この規則にしたがって黒い碁石を置いたとき、置かれた黒い碁石の個数を求めなさい。

(2) n 段 n 列のマス目に、この規則にしたがって黒い碁石を置き、黒い碁石が置かれていない残りのすべてのマスには白い碁石を 1 つずつ置きます。白い碁石の個数が、黒い碁石の個数より 41 個多くなるときの n の値を求めなさい。

解答欄

(1)	個
(2)	

解答

(1) 24 個

(2) 11

解説

(1)

$$(7-1) \times 4 = 24 \text{ 個}$$

(2)

n 段 n 列のマス目にある黒い碁石の数は $4(n-1)$ 個

白い碁石の数は $(n-2)^2$ 個 と表せる。

よって

$$(n-2)^2 = 4(n-1) + 41$$

$$n^2 - 4n + 4 = 4n - 4 + 41$$

$$n^2 - 8n - 33 = 0$$

$$(n-11)(n+3) = 0$$

$n > 0$ より

$$n = 11$$

【問 3】

$AB=a$ cm, $AD=b$ cm (a, b は正の整数) の長方形 $ABCD$ がある。図1のように、辺 AB と辺 DC の間にそれらと平行な長さ a cm の線分を 1 cm 間隔にひく。同様に、辺 AD と辺 BC の間に長さ b cm の線分を 1 cm 間隔にひく。

さらに、対角線 AC をひき、これらの線分と交わる点の個数を n とする。ただし、2 点 A, C は個数に含めないものとし、対角線 AC が縦と横の線分と同時に交わる点は、1 個として数える。

また、長方形 $ABCD$ の中にできた 1 辺の長さが 1 cm の正方形のうち、 AC が通る正方形の個数を考える。ただし、1 辺の長さが 1 cm の正方形の頂点のみを AC が通る場合は、その正方形は個数に含めない。

例えば、図2のように $a=2, b=4$ のときは、 $n=3$ となり、 AC が通る正方形は 4 個である。図3のように $a=2, b=5$ のときは、 $n=5$ となり、 AC が通る正方形は 6 個である。

図1

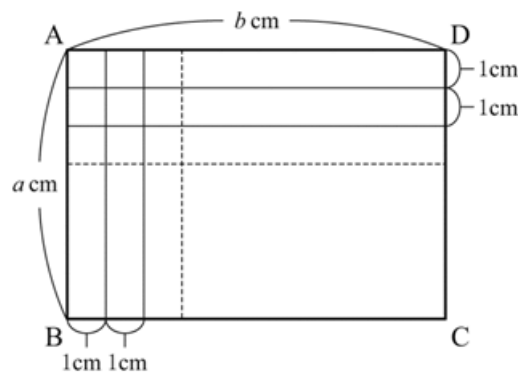


図2

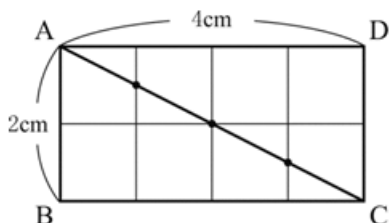
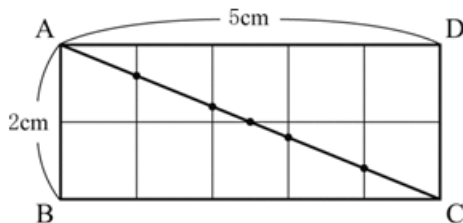


図3



このとき、次の問1, 問2, 問3に答えなさい。

(栃木県 2015 年度)

問1 $a=3, b=4$ のとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) n の値を求めなさい。

(2) AC が通る正方形の個数を求めなさい。

問2 b の値が a の値の 3 倍であるとき、長方形 $ABCD$ の中にできた 1 辺の長さが 1 cm のすべての正方形の個数から、 AC が通る正方形の個数をひくと 168 個であった。

このとき、 a の方程式をつくり、 a の値を求めなさい。ただし、途中の計算も書くこと。

問3 $a=9$ のとき、 $n=44$ であった。このとき、考えられる b の値をすべて求めなさい。

解答欄

問1	(1)	$n=$
	(2)	個
問2	答え $a=$	
問3		

解答

問1

(1) $n=5$

(2) 6 個

問2

1 辺の長さが 1 cm のすべての正方形の個数は $3a^2$ 個

AC が通る正方形の個数は $3a$ 個

したがって

$$3a^2 - 3a = 168$$

$$a^2 - a - 56 = 0$$

$$(a+7)(a-8) = 0$$

$$a = -7, a = 8$$

a は正の整数だから $a=8$

答え $a=8$

問3 37, 39, 45

解説

問1

(1)

$a=3, b=4$ のとき

AB に平行な線と交わる点は 3 個

AD に平行な線と交わる点は 2 個

よって計 5 個

(2)

AC が通る正方形の数は 6 個

問2

$b=3a$ のとき AC が通る正方形の個数は $3a$ 個と表せる。

よって $a \times 3a - 3a = 168$

$$3a^2 - 3a - 168 = 0$$

$$a^2 - a - 56 = 0$$

$$(a+7)(a-8) = 0$$

$a > 0$ より

$$a = 8$$

問3

$a=9$ のとき格子上で交わらないとすると

$n=44$ より

$$9-1+b-1=44$$

$$b=37$$

9 と 37 の公約数は 1 のみだから格子上では交わらないので $b=37$ は問題に合う。

9 と b の値に 1 以外の公約数があれば格子で交わる点が存在する。

格子上で交わり $n=44$ になるのは $b > 37$ で 3 の倍数になるとき

また格子の点は最大で 8 個である。

$b=39$ ならば AC は右に 13 下に 3 ずつ進む直線になるから格子上の点は 2 個。

$$\text{よって } n = 9-1+39-1-2 = 44$$

よって問題に合う。

$b=42$ ならば AC は A から C に右に 14, 下に 3 ずつ進む直線になるから格子上の点は 2 個。

$$\text{よって } n = 9-1+42-1-2 = 47 \text{ より問題に合わない。}$$

$b=45$ のとき AC は A から右に 5 下に 1 ずつ進む直線になるから格子上の点は 8 個。

$$\text{よって } n = 9-1+45-1-8 = 44 \text{ より問題に合う。}$$

$b > 45$ においては格子点は最大でも 8 個だから $n = 9-1+b-1-8 = b-1 > 44$ より

問題にあう b は存在しない。

よって $b=37, 39, 45$

【問 4】

次は、先生とAさんの会話です。これを読んで、下の(1)、(2)に答えなさい。

(埼玉県 2015 年度)

先生「Aさんの誕生日は3月2日でしたね。」

Aさん 「はい。私は西暦 2000 年生まれで、今年 (2015 年) 15 歳になります。西暦 2000 年は、うるう年だったと思うのですが、うるう年について教えてください。」



先生「うるう年は、次のように決められています。」

- (Ⅰ) 西暦の年数が 4 で割り切れる年をうるう年とする。
- (Ⅱ) ただし、西暦の年数が 4 で割り切れても、100 で割り切れる年はうるう年としない。
- (Ⅲ) ただし、西暦の年数が 100 で割り切れても、400 で割り切れる年はうるう年とする。

先生「うるう年は、2月の日数が1日増えて2月29日までとなり、1年間の日数が366日となります。」

(1) 西暦 2000 年から 2015 年までに、うるう年は何回あったでしょうか。次のア～エの中から 1 つ選び、その記号を書きなさい。

ア 2回 イ 3回 ウ 4回 エ 5回

(2) Aさんの15歳の誕生日(西暦2015年3月2日)は月曜日です。Aさんの誕生日が、再び月曜日になるのは西暦何年ですか。途中の説明も書いて答えを求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	〔説明〕 答え 西暦 年

解答

(1) ウ

(2)

〔説明〕

うるう年とうるう年でない年の曜日の進み方を考えると

2016 年は水曜日

2017 年は木曜日

2018 年は金曜日

2019 年は土曜日

2020 年は月曜日となる。

答え 西暦 2020 年

解説

(1)

$2000 = 400 \times 5$ より

西暦 2000 年はうるう年だから

西暦 2000 年から 2015 年までにうるう年は

2000 年, 2004 年, 2008 年, 2012 年の 4 回あるので選択肢はウ

(2)

2016 年はうるう年だから

2016 年 3 月 2 日は $366 \div 7 = 52$ あまり 2 より水曜日。

$365 \div 7 = 52$ あまり 1 より

2017 年, 2018 年, 2019 年の 3 月 2 日は

順に木曜, 金曜, 土曜

2020 年はうるう年なので 3 月 2 日は月曜日。

よって 2020 年

【問 5】

下の図1のように、1 目もりが、縦、横ともに 1 cm の等しい間隔で線がひかれている方眼紙の、縦線と横線の交点に点 (・) が打ってある。この点のうちから、2 点 A, B を $AB=4$ cm となるようにとる。

さらに、点 C を $\angle CAB=90^\circ$, $AC=n$ cm (n は正の整数) となるようにとり、3 点 A, B, C を結んで直角三角形をかいたとき、直角三角形 ABC の内部及び周上にある点の個数を N とする。

図1

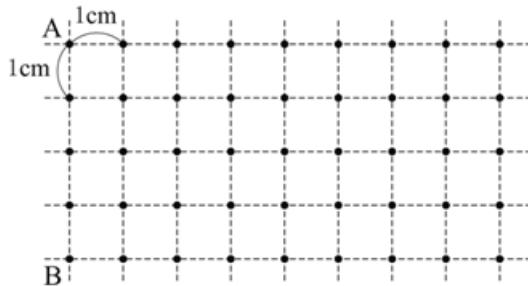
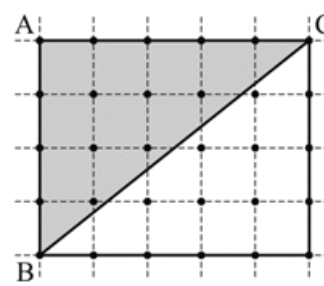


図2



次のはるかさんと先生の会話を読み、次の問1～問3に答えなさい。

(千葉県 2015 年度 前期)

はるかさんと先生の会話

先 生:これから、 n の値と、直角三角形 ABC の内部及び周上にある点の個数 N の関係について考えましょう。

はるか:直角三角形の面積は長方形の半分だから、点の個数も長方形の半分じゃないですか。

先 生:では、 $n=5$ のときで確かめてみましょう。

はるか:図2から、 $n=5$ のときの直角三角形 ABC は、縦が 4 cm、横が 5 cm の長方形を半分にしたものです。この長方形の内部及び周上にある点の個数は、 5×6 で 30 個ですが、 N を数えたところ 16 個で、半分ではありませんでした。どうしてですか。

先 生:長方形の点の個数を半分に分けるということは、辺 BC 上にある点の個数も半分に分けることになります。でも、この場合、辺 BC 上にある点は、点 B、点 C の 2 個だけですが、この 2 個とも N に含まれますね。

はるか:なるほど、辺 BC 上にある点の個数が N を求める鍵なんですね。

先 生:では、 $n=6$ のとき、辺 BC 上にある点の個数は何個ですか。

はるか: 個です。

先 生:それでは、 n が他の値の場合についても調べてみましょう。

はるか: n が 8 までの場合について、辺 BC 上にある点の個数を書き出したところ、 通りしか出てきませんでした。

先 生: n が 8 より大きい場合を書き出しても、8 までと同じ規則性で並ぶので、辺 BC 上にある点の個数は、全部で 通りでいいんですよ。

はるか:そうすると、 n がどんな値の場合でも、辺 BC 上にある点の個数がいくつになるかわかりますね。

先 生:その通りです。辺 BC 上にある点の個数がわかれば、 N を求めることができます。 $n=8$ のときは、辺 BC 上にある点は、 個で、 N は、 個になります。

問1 会話中の (ア) ～ (エ) に入る数をそれぞれ書きなさい。

問2 辺 BC 上にある点の個数が最も多くなる場合の n と N の関係について考える。このとき、 N を、 n を使った式で表しなさい。

問3 辺 BC 上にある点の個数が最も少なくなる場合の n と N の関係について考える。このとき、 $N=186$ であるような n の値を求めなさい。

解答欄

問1	(ア)		(イ)	
	(ウ)		(エ)	
問2	N=			
問3	n=			

解答

問1

(ア) 3

(イ) 3

(ウ) 5

(エ) 25

問2 $N = \frac{5n+10}{2}$

問3 $n=73$

解説

問1

$n=6$ のとき BC 上の点は点 B と点 C とその中点の 3 個 (ア)

n が 8 までのとき BC 上の点は 2 個, 3 個, 5 個の 3 通り (イ)

$n=8$ のときは BC 上の点は 5 個 (ウ) で

$N = 5 + \{(4+1) \times (8+1) - 5\} \div 2 = 5 + 20 = 25$ 個 (エ)

問2

BC 上の点の数は最も多いとき 5 個。

そのとき $N = 5 + \{(4+1) \times (n+1) - 5\} \div 2 = \frac{5n+10}{2}$

問3

BC 上にある点の個数が最も少なくなる場合 BC 上の点は 2 個

このとき $N = 2 + \{(4+1) \times (n+1) - 2\} \div 2 = \frac{5n+7}{2}$

$N=186$ のとき $\frac{5n+7}{2} = 186$

これを解いて $n=73$

【問 6】

赤、白、青の 3 種類の長方形のカードを、次の手順にしたがって並べて長方形を作る。

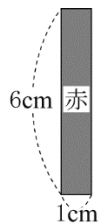
このとき、あとの問いに答えなさい。

ただし、3 種類のカードの縦の長さはすべて 6 cm で、横の長さは、赤は 1 cm、白は 3 cm、青は 5 cm である。

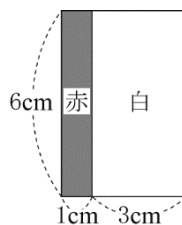
(富山県 2015 年度)

手順

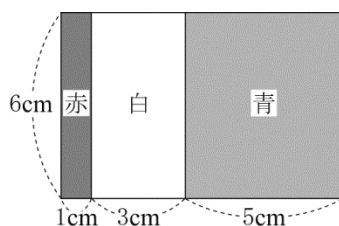
「1 番の長方形」は赤のカードを置く。



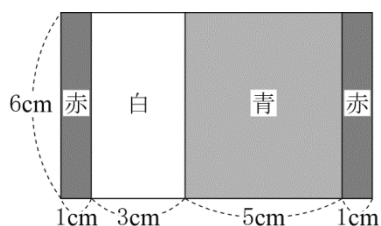
「2 番の長方形」は、「1 番の長方形」の右端にすき間がないように、白のカードを並べて作る。



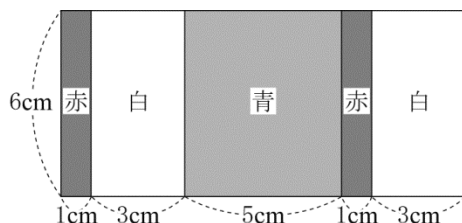
「3 番の長方形」は、「2 番の長方形」の右端にすき間がないように、青のカードを並べて作る。



「4 番の長方形」は、「3 番の長方形」の右端にすき間がないように、赤のカードを並べて作る。



「5 番の長方形」は、「4 番の長方形」の右端にすき間がないように、白のカードを並べて作る。



このように、左から、赤、白、青、…の順にすき間がないようにカードを並べて長方形を作る。

問1 「17 番の長方形」を作ったとき、一番右端に並べたカードの色は何か求めなさい。

問2 「22 番の長方形」の横の長さを求めなさい。

問3 長方形の面積が 540 cm^2 になるのは「何番の長方形」か求めなさい。

問4 一番右端に赤色のカードを並べて作った長方形で、使った赤のカードの総数が n 枚であるとき、この長方形の面積を n を使った式で表しなさい。

解答欄

問1	
問2	cm
問3	「 番の長方形」
問4	() cm^2

解答

問1 白

問2 64 cm

問3 「30 番の長方形」

問4 $(54n - 48)\text{ cm}^2$

解説

問1

$17 \div 3 = 5$ 残り 2 より赤, 白, 青を 5 回繰り返して赤, 白が並んでいる。

よって一番右端のカードの色は白

問2

赤, 白, 青を 1 セットとすると 1 セットの横の長さは $1 + 3 + 5 = 9\text{ cm}$

$22 \div 3 = 7$ 残り 1

よって 22 番の長方形の横の長さは 7 セットと赤の 1 cm だから

$9 \times 7 + 1 = 64\text{ cm}$

問3

横の長さは $540 \div 6 = 90\text{ cm}$ だから

$90 \div 9 = 10$ より 10 セット分つまり $10 \times 3 = 30$ 番目

問4

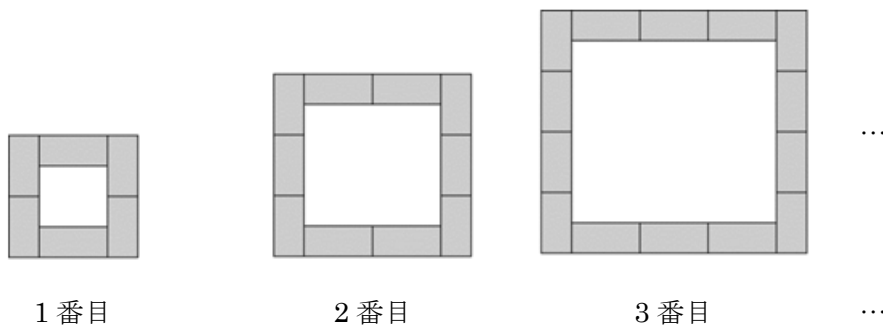
一番右端に赤があり使った赤のカードの総数が n 枚であるとき

$(n - 1)$ セットと赤 1 枚と考えられるので横の長さは $9(n - 1) + 1 = 9n - 8\text{ cm}$

よって求める長方形の面積は $6(9n - 8) = 54n - 48\text{ cm}^2$

【問 7】

同じ大きさのレンガを使って四角形の花だんをつくることにした。そこで、下の図のように、1 番目、2 番目、3 番目…と、規則的に大きさを変えた花だんを考えてみた。なお、図は花だんを真上から見たものであり、花だんのレンガは 1 段とする。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(石川県 2015 年度)

問1 5 番目の花だんをつくるとき、レンガは何個必要か求めなさい。

問2 1 番目、2 番目、3 番目の 3 つの花だんのレンガをすべて使用すると、7 番目の花だんを 1 つつくること
できる。このように、 n 番目、 $(n+1)$ 番目、 $(n+2)$ 番目の 3 つの花だんのレンガをすべて使用して 1 つの花
だんをつくる時、何番目の花だんをつくることができるかを求める解答を完成させなさい。なお、アには n を
用いた式とその考え方を書きなさい。イには、解答の続きを書きなさい。ただし、 n は自然数とし、解答にお
いては、図や表、式などを用いてよい。

解答欄

問1	個	
問2	n 番目の花だんのレンガの個数は, n を用いた式で表すと, ア [n を用いた式] 個 である。 [考え方]	
	このことから,	
	イ	
	答	番目の花だん

解答

問1 22 個

問2

ア

〔 n を用いた式〕 $(4n+2)$ 個

〔考え方〕

1 番目の花だんのレンガは 6 個で

その後 4 個ずつ増える。

番目	1	2	3	...
レンガ	6	10	14	...

表より n 番目のレンガの個数は

$$6+4(n-1)=4n+2$$

イ

$(n+1)$ 番目のレンガの個数は $4n+6$

$(n+2)$ 番目のレンガの個数は $4n+10$ と表される。

よって 3 つの花だんのレンガの個数の和は

$$(4n+2)+(4n+6)+(4n+10)=4(3n+4)+2$$

〔答〕 $(3n+4)$ 番目の花だん

解説

問1

5 番目の花だんのレンガは縦に $(5+1) \times 2 = 12$ 個、横に $5 \times 2 = 10$ 個で合わせて 22 個。

問2

n 番目の花だんのレンガは

1 番目の図形が 6 個で

番号が増えると 4 ずつ増えるので

その数は

$$6+4 \times (n-1)=4n+2 \text{ 個と表せる。}$$

よって $n+1$ 番目 のレンガは $4(n+1)+2=4n+6$ 個

$n+2$ 番目のレンガは $4(n+2)+2=4n+10$ 個となり

レンガの合計は

$$(4n+2)+(4n+6)+(4n+10)$$

$$=12n+18$$

$$=(12n+16)+2$$

$$=4(3n+4)+2$$

したがって $3n+4$ 番目

【問 8】

下の図のように、自然数が書いてあるカードを並べる。

1 段目には $\boxed{1}$, 2 段目には $\boxed{2}$ $\boxed{3}$, 3 段目には $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ のカードを置き, 4 段目以後も, 左から右へ, 段の数から順に 1 ずつ大きくなる自然数が並ぶように, 段の数と同じ枚数のカードを置いていく。これを順に 20 段目まで行った。

1 段目	$\boxed{1}$			
2 段目	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$		
3 段目	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	
4 段目	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$
$\vdots$		$\vdots$		

次の問1～問5に答えなさい。

(岐阜県 2015 年度)

問1 5 段目の一番右に置かれたカードに書いてある自然数を求めなさい。

問2 n 段目の一番右に置かれたカードに書いてある自然数を n を使った式で表しなさい。

問3 $\boxed{25}$ のカードが初めて置かれたのは何段目かを求めなさい。

問4 1 段目から 20 段目まで並べたカードのうち, $\boxed{25}$ のカードは何枚あるかを求めなさい。

問5 1 段目から 20 段目まで並べたカードのうち, 10 枚のカードに同じ自然数が書いてある。その自然数をすべて求めなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	段目
問4	枚
問5	

解答

問1 9

問2 $2n-1$

問3 13 段目

問4 8 枚

問5 19, 20, 21

解説

問1

5 段目は 5, 6, 7, 8, 9 と並ぶからいちばん右のカードは 9

問2

n 段目のいちばん左の数は n

いちばん右のカードは $n+n-1=2n-1$

問3

25 が初めて置かれたのはいちばん右に置かれるとき。

よって $2n-1=25$ より $n=13$ 段目

問4

25 のカードは 13 段目から 25 段目まで並ぶ。

よって 1 段目から 20 段目まででは $20-13+1=8$ 枚並ぶ。

問5

20 段目のいちばん左のカードは 20 いちばん右のカードは 39

20 のカードがはじめてでてきたのは 21 が右端にくる 11 段目

20 は 10 枚だから 21 も 10 枚。

それより大きい数はない。

19 は 10 段目から 19 段目までの 10 枚

17 は 9 段目から 17 段目までの 9 枚

よって 19 より小さい数もない。

したがって 20 段目までに 10 枚あるのは 19, 20, 21

【問 9】

右の図のような白の基石と黒の基石を、次の＜規則＞にしたがって横一列に n 個並べる。



白の基石 黒の基石

＜規則＞

- ・左端には必ず白の基石を置く。
- ・黒の基石と黒の基石が隣り合わないようにする。

次の表は、 $n=1, 2, 3$ のときの基石の並べ方がそれぞれ何通りあるかについてまとめたものである。

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
 ... 1通り	  ... 2通り	   ... 3通り

このとき、下の問1～問3に答えよ。

(京都府 2015 年度 中期)

問1 $n=4$ のときの基石の並べ方は何通りあるか求めよ。

問2 $n=5$ のときの基石の並べ方は何通りあるか求めよ。また、 $n=5$ のときの基石の並べ方のうち、左端からの 2 個の基石が白、黒 () となる場合は何通りあるか求めよ。

問3 基石の並べ方が 100 通り以上になるような n の値のうち、最も小さいものを求めよ。

解答欄

問1	通り
問2	$n=5$ のとき 通り
	白、黒 () となる場合 通り
問3	$n =$

解答

問1 5通り

問2

$n=5$ のとき 8通り

白, 黒 (○●)となる場合 3通り

問3 $n=11$

解説

問1

$n=4$ のとき○○○○, ○○○●, ○○●○, ○●○○, ○●○●の 5通り

問2

$n=5$ のとき○○○○○, ○○○○●, ○○○●○, ○○●○○, ○○●○●, ○●○○○, ○●○○○●, ○●○●○の 8通り

左端からの 2 個が○●になるのは 3通り

問3

前の並び方の右端の基石に注目する。

前の並び方の右端が白でも黒でも右端に白い基石を置くことができる。

一方前の並び方の右端が黒のときは右端に黒い基石を置くことはできない。

よって下の表のように基石の並び方が変化するので 100 通り以上になるのは $n=11$ のとき

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
右端の基石が白	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
右端の基石が黒	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
並び方の合計	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...

【問 10】

和歌子さんは、1 辺の長さが 1 cm の正六角形の黒と白のタイルを規則的に並べて、何かきまりがないか、調べることにした。

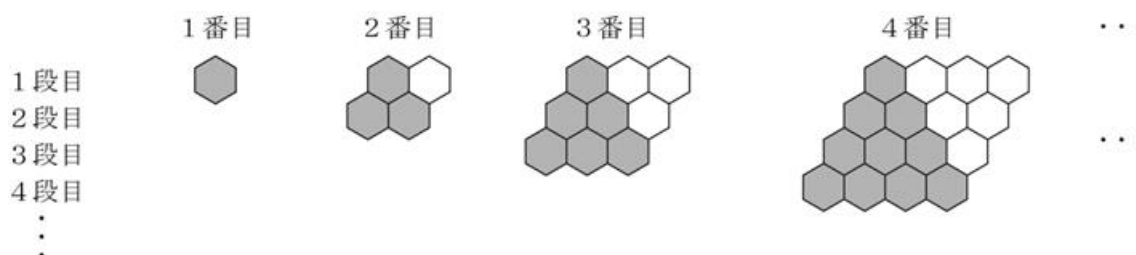
タイルの並べ方は、図1のように、まず 1 番目として黒タイルを 1 枚置き、1 段目とする。

2 番目は、1 番目のタイルの下に 2 段目として黒タイルを 2 枚置き、1 段目も 2 枚になるように黒タイルの右に白タイルを置く。

次に、3 番目は、2 番目のタイルの下に 3 段目として黒タイルを 3 枚置き、1 段目、2 段目も 3 枚になるように、黒タイルの右に白タイルを置く。

このように、段に応じた枚数の黒タイルを 1 つ前に並べたタイルの下に置き、それまでに並べた段が、最も下の段と同じ枚数になるように黒タイルの右に白タイルを置いていく。

図1



このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(和歌山県 2015 年度)

問1 次の表1は、上の規則に従って並べたときの順番と、タイルの枚数についてまとめたものである。

下の(1), (2)に答えなさい。

表1

順番(番目)	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
黒タイルの枚数(枚)	1	3	6	10	*	ア	*	*	...	x	...
白タイルの枚数(枚)	0	1	3	6	*	*	*	*	...	*	...
タイルの合計枚数(枚)	1	4	9	16	*	*	*	イ	...	*	...

*は、あてはまる数や式を省略したことを表している。

(1) 表 1 中の **ア**, **イ** にあてはまる数をかきなさい。

(2) 和歌子さんは、 n 番目の黒タイルの枚数を n の式で表すことを考えた。次の文は、和歌子さんの考え方をまとめたものである。和歌子さんは、どのような考え方で n 番目の黒タイルの枚数を n の式で表したのか、その考え方の続きを解答欄の にかき、完成させなさい。

n 番目の黒タイルの枚数を x 枚とおく。

白タイルの枚数は、黒タイルの枚数よりも n 枚少ないことから、白タイルの枚数は $(x - n)$ 枚と表される。

また、 n 番目のタイルの合計枚数は、 n の式で表すと、

n 番目の黒タイルの枚数 枚

問2 和歌子さんは、図1で並べたタイルの周の長さに何かきまりがないか、調べることにした。

図2のように、 で示した周の上側と左側に着目し、それぞれ並べたタイルの周の上側の部分を  で、周の左側の部分を  で囲んで抜き出した形で表した。

下の表2は、図2のそれぞれの  と  で囲まれた部分の長さや周の長さについてまとめたものである。

下の(1), (2)に答えなさい。

図2

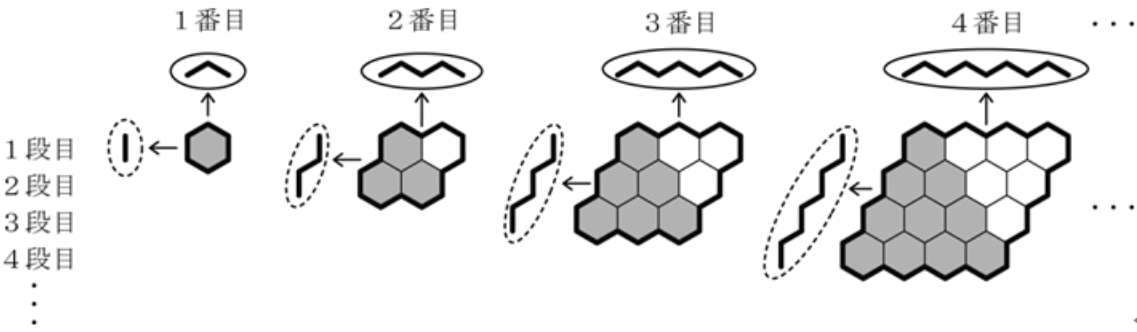


表2

順番(番目)	1	2	3	4	...	10	...	n	$n+1$	...
上側の長さ ( で囲まれた部分の長さ)(cm)	2	4	6	8	...	*	...	*	*	...
左側の長さ ( で囲まれた部分の長さ)(cm)	1	3	5	7	...		...	*	*	...
周の長さ(cm)	6	14	22	30	...	*	...	*	*	...

*は、あてはまる数や式を省略したことを表している。

(1) 表2中の  にあてはまる数をかきなさい。

(2) 和歌子さんは、表2から、順番が1つ増えるごとに周の長さが8 cm ずつ増えていることに気づいた。このことを、表2中の n 番目と $(n+1)$ 番目の周の長さに着目して、文字 n を使って説明しなさい。

解答欄

問1	(1)	ア	
		イ	
	(2)	n 番目の黒タイルの枚数 枚	
問2	(1)		
	(2)	〔説明〕	

解答

問1

(1)

ア 21

イ 64

(2)

n^2 枚と表される。

よって

$$x + (x - n) = n^2$$

$$2x = n^2 + n$$

$$x = \frac{n^2 + n}{2}$$

n 番目の黒タイルの枚数 $\frac{n^2 + n}{2}$ 枚

問2

(1) 19

(2)

n 番目について

上側の長さは $2n$ cm, 左側の長さは $(2n - 1)$ cm と表される。

よって周の長さは

$$2 \times \{2n + (2n - 1)\} = 8n - 2 \text{ cm}$$

$(n + 1)$ 番目について

上側の長さは $(2n + 2)$ cm, 左側の長さは $(2n + 1)$ cm と表される。

よって周の長さは

$$2 \times \{(2n + 2) + (2n + 1)\} = 8n + 6 \text{ cm}$$

したがって

n 番目と $(n + 1)$ 番目との周の長さの差は

$$(8n + 6) - (8n - 2) = 8 \text{ cm} \text{ となり}$$

n の値に関係なく 8 cm ずつ増えていることがわかる。

解説

問1

(1)

$$\text{ア} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$\text{イ} = 8^2 = 64$$

(2)

n 番目の黒いタイルの枚数を x 枚とすると

白いタイルの枚数は黒いタイルよりも n 枚少ないので $(x - n)$ 枚と表せる。

n 番目のタイルの枚数は n^2 と表せるから $n^2 = x + (x - n)$

これを x について解くと

$$2x = n^2 + n$$

$$x = \frac{n^2 + n}{2} \text{ 枚}$$

問2

(1)

周の左側の部分は 1 から 2 ずつ増えているので 10 番目では $1 + 2 \times 9 = 19$ cm

(2)

n 番目の周の上側の部分は $2n$ cm 左側の部分は $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ cm と表せる。

よって周の長さは $2n \times 2 + (2n - 1) \times 2 = 4n + 4n - 2 = 8n - 2$ cm と表せる。

$(n + 1)$ 番目の周の上側の部分の長さは $2(n + 1)$ cm 左側の部分は $1 + 2(n + 1 - 1) = 2n + 1$ cm と表せる。

よって周の長さは $2 \times 2(n + 1) + 2 \times (2n + 1) = 4n + 4 + 4n + 2 = 8n + 6$ cm と表せる。

したがって周の長さの差は $(8n + 6) - (8n - 2) = 8n + 6 - 8n + 2 = 8$ cm

したがって周の長さは 8 cm ずつ増えている。

【問 11】

Aさんは、ある会社で勤務している。この会社では昼間に勤務する「日勤」、夜間に勤務する「夜勤」、そして「休み」の3種類の勤務形態があり、次のような順序をくり返して勤務することになっている。

日	→	日	→	休	→	夜	→	休
(日勤)		(日勤)		(休み)		(夜勤)		(休み)

Aさんは1週目の日曜日から勤務を開始した。したがって、Aさんの勤務表は表1のようになる。

表1

曜日	日	月	火	水	木	金	土
1週目	日	日	休	夜	休	日	日
2週目	休	夜	休	日	日	休	夜
3週目	休	日	日	休	夜	休	日
4週目	日	休	夜	休	日	日	休
.....	...	...	...	...	...	...	...

勤務を開始した日（1週目の日曜日）を1日目として、次の(1)、(2)に答えなさい。

（島根県 2015 年度）

(1) 40 日目は何曜日か、答えなさい。また、この日の勤務形態は日勤、夜勤、休みのどれになるか、答えなさい。

(2) n 回目の夜勤が何日目であるか、勤務開始からの日数を調べたところ、表2のようになることがわかった。

表2

夜勤	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	...	10 回目	...
勤務開始からの日数	4	9	14	19	24	...	ア	...

① 表2の ア にあてはまる数を求めなさい。

② n 回目の夜勤は何日目であるか、 n を用いた式で表しなさい。

解答欄

(1)	(曜日) 曜日	
	(勤務形態)	
(2)	①	
	②	日目

解答

(1)

(曜日) 木曜日

(勤務形態) 休み

(2)

① 49

② $(5n-1)$ 日目

解説

(1)

$40 \div 7 = 5$ あまり 5 よりあまりは 5 だから日曜日をはじめとする 5 日目の「木曜日」

$40 \div 5 = 8$ よりわりきれるので勤務形態のサイクルの最後の日と同じ「休み」

(2)

①

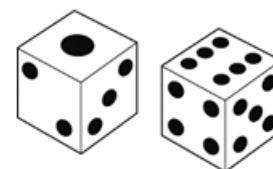
10 回目の夜勤は $4 + 5 \times 9 = 49$ 日目

②

n 回目の夜勤は $4 + 5 \times (n-1) = 5n-1$ 日目

【問 12】

右の図のような、1 から 6 の目がかかれた、同じ大きさの立方体のさいころをいくつか用意する。さいころは、向かい合う面の目の数の和が 7 になるように作られている。

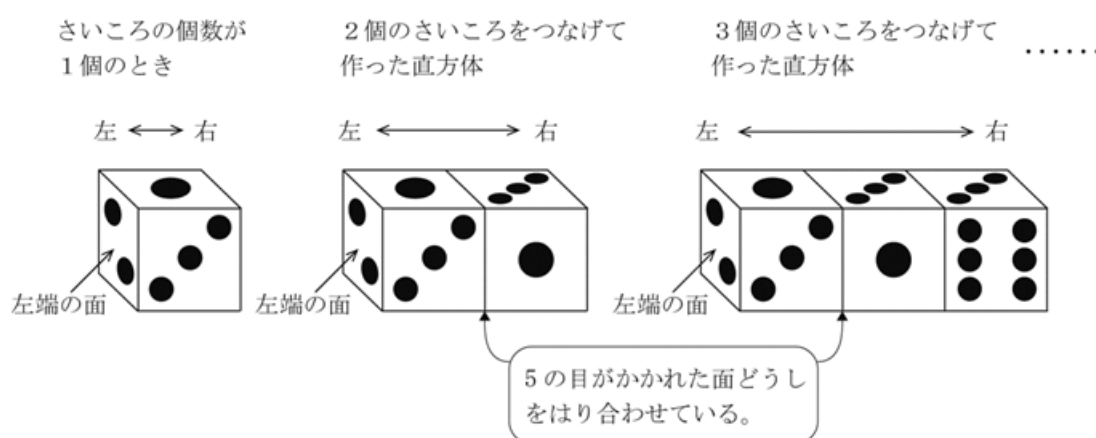


下の例のように、まず、左端の面の目の数を決めたうえで、さいころを 1 つ置き、その右側にさいころを 1 つずつ、面と面とがぴったり重なり合うように、順にはり合わせてつけて、直方体を作っていく。ただし、「さいころをつなげるときは、目の数が同じ面どうしをはり合わせる」というルールにしたがって、つけていくことにする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2015 年度)

例 (1 個目のさいころの左端の面の目の数を 2 として、さいころの個数を増やしながら、ルールにしたがってつけて、直方体を作っていくときの例。)



問1 1 個目のさいころの左端の面の目の数を 2 として、さいころの個数を増やしながら、ルールにしたがってつけて、直方体を作っていく。下の表は、直方体を作るのに「用いたさいころの個数」と、できた直方体の「右端の面の目の数」、できた直方体の「表面にかかれてある目の数の和」をまとめたものである。

用いたさいころの個数(個)	1	2	3	4	...
右端の面の目の数	5	ア	5	2	...
表面にかかれてある目の数の和	21	32	イ	ウ	...

(1) 表のア, イ, ウに当てはまる数を、それぞれ書け。

(2) 用いたさいころの個数が奇数個の場合、さいころの個数を n 個とすると、できた直方体の表面にかかれてある目の数の和を、 n を使って表せ。

問2 1 個目のさいころの左端の面の目の数を 2 以外の数にして、ルールにしたがって、何個かのさいころをつなげて直方体を作ったとき、できた直方体の表面にかかれてある目の数の和が 146 となった。このとき、直方体を作るのに用いたさいころの個数と、1 個目のさいころの左端の面の目の数を、それぞれ求めよ。

解答欄

問1	(1)	ア		イ		ウ	
	(2)						
問2	用いたさいころの個数			個			
	1個目のさいころの 左端の面の目の数						

解答

問1

(1)

ア 2

イ 49

ウ 60

(2) $14n+7$

問2

用いたさいころの個数 10 個

1個目のさいころの左端の面の目の数 3

解説

問1

(1)

ア 2 個のさいころをつなげたとき間は 5 の面が書かれた面どうしがはり合わさっているので
右端は 5 の裏面の 2

イ 3 個のさいころをつなげたときはり合わさった面は 5 の面どうしが 1 つと 2 の面どうしが 1 つ。
よって表面にかかれてある目の数の和は $21 \times 3 - 5 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 \times 1 = 49$

ウ 4 個のさいころをつなげたときはり合わさった面は 5 の面どうしが 2 つと 2 の面どうしが 1 つ。
よって表面にかかれてある目の数の和は $21 \times 4 - 5 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 60$

(2)

n が奇数で用意したさいころの数が n 個のとき

はり合わさった面は 5 の面どうしが $\frac{n-1}{2}$

2 の面どうしが $\frac{n-1}{2}$

よって表面にかかれてある目の数の和は

$$21 \times n - 5 \times 2 \times \frac{n-1}{2} - 2 \times 2 \times \frac{n-1}{2} = 21n - 5(n-1) - 2(n-1) = 21n - 5n + 5 - 2n + 2 = 14n + 7$$

問2

さいころの個数を n , 1 個目の左端の目の数を a とする。

n が奇数のとき表面にかかれてある目の数の和は

$$21n - (7-a) \times 2 \times \frac{n-1}{2} - a \times 2 \times \frac{n-1}{2} = 14n + 7$$

これは奇数なので 146 にはならない。

よって n は偶数。

n が偶数のとき表面にかかれてある目の数の和は

$$21n - (7-a) \times 2 \times \frac{n}{2} - a \times 2 \times \frac{n-2}{2} = 14n + 2a$$

これが 146 になるから

$$14n + 2a = 146$$

$$7n + a = 73$$

a は 2 以外の 1 から 6 までの整数で

n は偶数だから

あてはまる a と n の組み合わせを考えると

$$a=3, n=10$$

【問 13】

赤色、青色、白色の同じ大きさの正方形のカードがたくさんある。図1のように、これらのカードを次の規則にしたがって正形状に並べていく。

ただし、赤色のカードは , 青色のカードは , 白色のカードは  で表している。

規則

- ・はじめに赤色のカードを 1 枚並べる。これを 1 回目の操作とする。
- ・2 回目の操作は、1 回目の操作で並べたカードの外側に矢印に沿って、青色のカードを 3 枚並べる。
- ・3 回目の操作は、2 回目の操作で並べたカードの外側に矢印に沿って、白色のカードを 5 枚並べる。
- ・4 回目の操作は、3 回目の操作で並べたカードの外側に矢印に沿って、赤色のカードを 7 枚並べる。

以下、5 回目は青色のカードを 9 枚、6 回目は白色のカードを 11 枚、…のように、赤色、青色、白色のカードの順でくり返し並べていく。

このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2015 年度)

問1 10 回目の操作で並べるカードは何枚か。

図1

問2 何回目かの操作後、正形状に並んでいるカードは全部で 144 枚であった。このとき、最後に並べたカードは何色か。

問3 カードを並べた順番をそのカードの番号とする。 n 回目の操作において、最初に並べるカードの番号を A 、 n 番目に並べるカードの番号を B 、最後に並べるカードの番号を C とする。例えば、4 回目の操作後に並んでいるカードの番号は図2のようになるので、 $A=10$ 、 $B=13$ 、 $C=16$ である。このとき、次の(1)、(2)に答えよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

(1) B を n の式で表せ。

(2) A 、 B 、 C の間には、「 A と B と C の和は、3 の倍数になる。」という関係が成り立つ。

このことを n を用いて証明せよ。ただし、証明は結論だけでなく、考え方の過程がわかるように、途中の式なども書くこと。

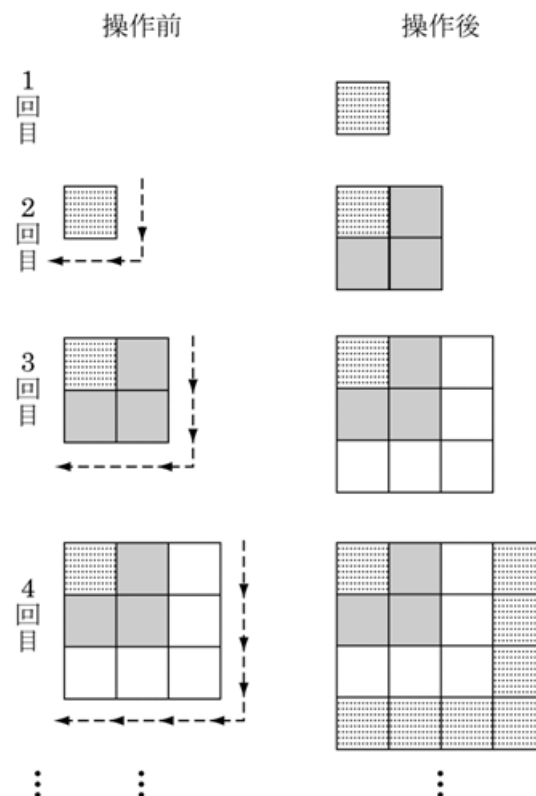


図2

1	2	5	10
4	3	6	11
9	8	7	12
16	15	14	13

解答欄

問1	枚	
問2	色	
問3	(1)	
	(2)	

解答

問1 19 枚

問2 白色

問3

(1) $n^2 - n + 1$

(2)

$$A = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$$

$$C = n^2$$

よって

$$A + B + C$$

$$= (n^2 - 2n + 2) + (n^2 - n + 1) + n^2$$

$$= 3n^2 - 3n + 3$$

$$= 3(n^2 - n + 1)$$

ここで $n^2 - n + 1$ は自然数なので

$3(n^2 - n + 1)$ は 3 の倍数である。

したがって

A と B と C の和は 3 の倍数になる。

解説

問1

10 回目の操作で並べるカードは $10^2 - 9^2 = 19$ 枚

問2

$$144 = 12^2$$

$$12 \div 3 = 4 \text{ より}$$

赤, 青, 白を 4 回繰り返して 144 枚並んでいるので最後に並べたのは白色

問3

(1)

$$C = n^2 \text{ より } B = n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$$

(2)

$$A = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$$

$$B = n^2 - n + 1$$

$$C = n^2 \text{ より}$$

$$A + B + C$$

$$= n^2 - 2n + 2 + n^2$$

$$- n + 1 + n^2$$

$$= 3n^2 - 3n + 3$$

$$= 3(n^2 - n + 1)$$

$n^2 - n + 1$ は自然数だから

$3(n^2 - n + 1)$ は 3 の倍数である。

よって A と B と C の和は 3 の倍数になる。

【問 14】

右の図1のように、縦に 3 段、横に n 列のマス目がある。次の規則にしたがって、各マス目に数を 1 つずつ記入する。記入後、3 段目に並んでいる数の合計と、それぞれの列の縦に並んでいる数の合計について、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2015 年度)

図1

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	・	・	n 列 目
1 段目						
2 段目						
3 段目						

〈規則〉

- ・1 段目には、1 列目から順に、0, 0, 0, 1 の数を繰り返し記入する。
- ・2 段目には、1 列目から順に、0, 0, 1 の数を繰り返し記入する。
- ・3 段目には、1 列目から順に、1, 0 の数を繰り返し記入する。

例えば、 $n=8$ のとき、下の図2のように数が記入され、1 列目から 8 列目までにおいて、3 段目に並んでいる数の合計は 4 である。また、それぞれの列の縦に並んでいる数の合計は、1 列目から順に 1, 0, 2, 1, 1, 1, 1, 1 である。

図2

	1 列 目	2 列 目	3 列 目	4 列 目	5 列 目	6 列 目	7 列 目	8 列 目
1 段目	0	0	0	1	0	0	0	1
2 段目	0	0	1	0	0	1	0	0
3 段目	1	0	1	0	1	0	1	0

問1 $n=12$ とする。

(1) 1 列目から 12 列目までにおいて、3 段目に並んでいる数の合計を求めなさい。

(2) 1 列目から 12 列目までにおいて、縦に並んでいる数の合計が 1 となる列は何列あるか、求めなさい。

問2 n を奇数とする。

(1) 1 列目から n 列目までにおいて、3 段目に並んでいる数の合計を、 n を使った式で表しなさい。

(2) 1 列目から n 列目までにおいて、3 段目に並んでいる数の合計が 27 であるとき、 n の値を求めなさい。また、このとき、縦に並んでいる数の合計が 1 となる列は何列あるか、求めなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	列
問2	(1)	
	(2)	$n=$
		列

解答

問1

(1) 6

(2) 7 列

問2

(1) $\frac{n+1}{2}$

(2)

$n=53$

31 列

解説

問1

(1)

$12 \div 2 = 6$

よって 1 列目から 12 列目までの 3 段目に並んでいる数の合計は 6

(2)

1 列目から 12 列目まで縦に並んだ数の合計は 1, 0, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 0, 1, 2 より

合計が 1 になるのは 7 列

問2

(1)

3 段目において n が奇数のとき

1 列目から $(n-1)$ 列目までの和は $\frac{n-1}{2}$ である。

n 列目に 1 があるので 1 列目から n 列目までの和は $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$

(2)

$\frac{n+1}{2} = 27$ より $n=53$

$53 \div 12 = 4$ あまり 5 より

縦に並んでいる数の合計が 1 になるのは

48 列目までが $7 \times 4 = 28$ 列

49 列目から 53 列目まで和は 1, 0, 2, 1, 1 と並ぶので 3 列あるから

53 列までは $28 + 3 = 31$ 列ある。