

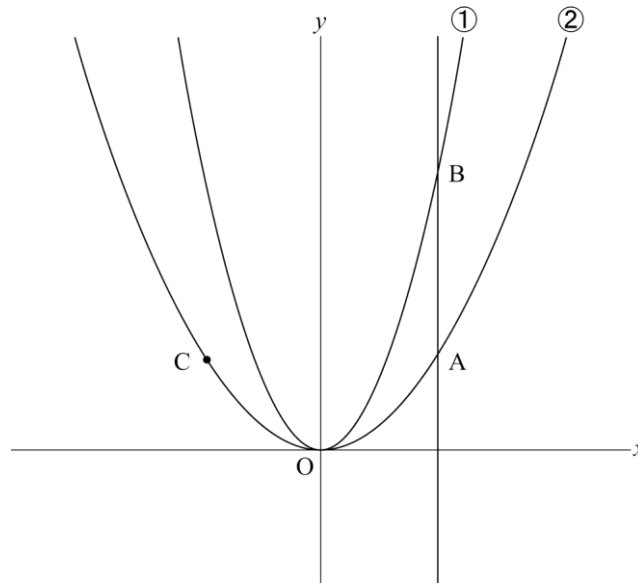
4.二次関数と図形関連の複合問題 2019 年度出題

【問 1】

下の図のように、2 つの関数 $y=x^2$ ……①, $y=\frac{1}{3}x^2$ ……② のグラフがあります。②のグラフ上に点 A があり、点 A の x 座標を正の数とします。点 A を通り、 y 軸に平行な直線と①のグラフとの交点を B とし、点 A と y 軸について対称な点を C とします。点 O は原点とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2019 年度)



問 1 点 A の x 座標が 2 のとき、点 C の座標を求めなさい。

問 2 点 B の x 座標が 6 のとき、2 点 B, C を通る直線の傾きを求めなさい。

問 3 点 A の x 座標を t とします。△ABC が直角二等辺三角形となるとき、 t の値を求めなさい。

解答欄

問 1	C (,)
問 2	
問 3	[計算] (答) $t =$

解答

問1 $C(-2, \frac{4}{3})$

問2 2

問3

[計算]

$A(t, \frac{1}{3}t^2)$ だから, $B(t, t^2), C(-t, \frac{1}{3}t^2)$

AB の長さは $\frac{2}{3}t^2 \dots \textcircled{1}$

AC の長さは $2t \dots \textcircled{2}$

AB=AC より, $\frac{2}{3}t^2=2t \dots \textcircled{3}$

$t(t-3)=0$

$t>0$ より, $t=3$

(答) $t=3$

解説

問1

点 A の y 座標は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=2$ を代入して, $y=\frac{1}{3} \times 2^2 = \frac{4}{3}$

よって, $A(2, \frac{4}{3})$ 点 C は y 軸について点 A と対称な点だから, $C(-2, \frac{4}{3})$

問2

点 B の y 座標は関数 $y=x^2$ に $x=6$ を代入して, $y=6^2=36$ よって, $B(6, 36)$

点 B の x 座標が 6 のとき, 点 A の x 座標も 6 だから, 関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=6$ を代入して,

$y=\frac{1}{3} \times 6^2 = 12$ よって, $A(6, 12)$ よって, 点 C の座標は $(-6, 12)$

したがって, 2 点 B, C を通る直線の傾きは, $\frac{36-12}{6-(-6)}=2$

問3

点 A の x 座標を $t(t>0)$ とすると, 点 B の x 座標も t だから, 関数 $y=x^2$ に $x=t$ を代入して, $y=t^2$

よって, $B(t, t^2)$ 点 A の y 座標は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=t$ を代入して, $y=\frac{1}{3}t^2$ したがって, $A(t, \frac{1}{3}t^2)$

点 C は y 軸について点 A と対称な点だから, $C(-t, \frac{1}{3}t^2)$ であり, 辺 AC は y 軸に垂直である。

辺 AB は y 軸に平行で, 辺 AC は y 軸に垂直であることから, $\angle BAC=90^\circ$ なので, $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形となるには, $AB=AC$ であればよい。

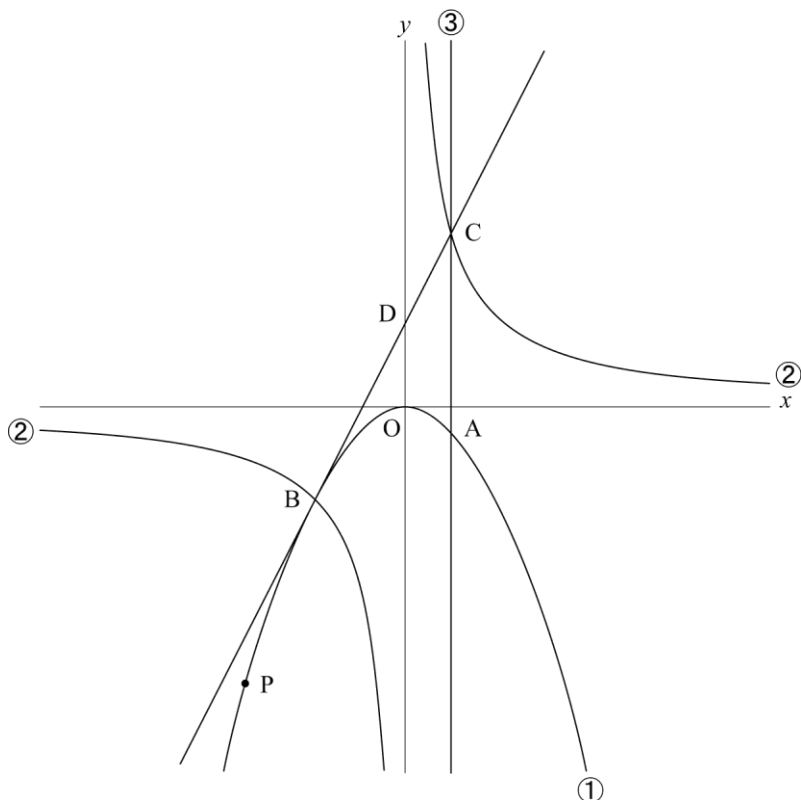
$AB=t^2-\frac{1}{3}t^2=\frac{2}{3}t^2$, $AC=t-(-t)=2t$ だから, $\frac{2}{3}t^2=2t$ 整理すると, $t^2=3t$ $t^2-3t=0$ $t(t-3)=0$

$t=0, 3$ $t>0$ だから, $t=3$ は問題に合う。 $t=0$ は問題に合わない。よって, $t=3$

【問 2】

下の図で、放物線①は $y=ax^2$ ，双曲線②は $y=\frac{16}{x}$ ，直線③は $x=2$ のグラフである。点 A は①と③の交点，点 B は①と②の交点で x 座標は -4 ，点 C は②と③の交点であり，点 D は直線 BC と y 軸の交点である。点 P は①上の点で， x 座標は負である。次の問 1～問 4 に答えなさい。ただし，座標軸の単位の長さを 1 cm とする。

(青森県 2019 年度)



問 1 a の値を求めなさい。

問 2 直線 BC の式を求めなさい。

問 3 ①の関数 $y=ax^2$ の x の変域が $n \leq x \leq 4$ のとき， y の変域は $-4 \leq y \leq 0$ である。 n は整数とすると， n のとりうる値をすべて求めなさい。

問 4 $\triangle ACP$ の面積が $\triangle ACD$ の面積の 5 倍になるとき，点 P の座標を求めなさい。

解答欄

問 1	$a=$
問 2	
問 3	
問 4	

解答

問 1 $a=-\frac{1}{4}$

問 2 $y=2x+4$

問 3 $-4, -3, -2, -1, 0$

問 4 $(-8, -16)$

解説

問 1

点 B は双曲線②上にあるから、点 B の y 座標は、 $y=\frac{16}{x}$ に $x=-4$ を代入して、 $y=-\frac{16}{4}=-4$

よって、 $B(-4, -4)$ また、点 B は放物線①上の点でもあるから、 $y=ax^2$ に $x=-4$ 、 $y=-4$ を代入して、 $-4=a \times (-4)^2$ $a=-\frac{1}{4}$

問 2

点 C の y 座標は、 $y=\frac{16}{x}$ に $x=2$ を代入して、 $y=\frac{16}{2}=8$

$B(-4, -4)$ 、 $C(2, 8)$ を通る直線の傾きは、 $\frac{8-(-4)}{2-(-4)}=2$ したがって、直線 BC の式は $y=2x+b$ とおける。 $C(2, 8)$ を通るから、 $x=2$ 、 $y=8$ を代入して、 $8=2 \times 2+b$ $b=4$ よって、 $y=2x+4$

問 3

y の値が 0 になるのは $x=0$ のときだから、 x の変域には 0 がふくまれる。したがって、 n は 0 以下の整数になる。また、 $B(-4, -4)$ より、 $x < -4$ のとき $y < -4$ となるから、 n は -4 以上であることもわかる。よって、 n のとりうる値は、 $-4, -3, -2, -1, 0$

問 4

$\triangle ACP$ と $\triangle ACD$ は、共通の辺 AC を底辺とするから、高さの比が面積の比になる。

$\triangle ACP$ の高さは 2 点 A、P の x 座標の差だから、点 P の x 座標を t とすると、高さは $2-t(\text{cm})$

また、 $\triangle ACD$ の高さは 2 点 A、D の x 座標の差だから、 $2-0=2(\text{cm})$

よって、 $\triangle ACP$ の面積が $\triangle ACD$ の面積の 5 倍のとき、 $2-t=2 \times 5$ $t=-8$

このとき、点 P の y 座標は、 $y=-\frac{1}{4} \times (-8)^2=-16$ よって、 $P(-8, -16)$

【問 3】

右の図において、①は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ、②は反比例のグラフである。

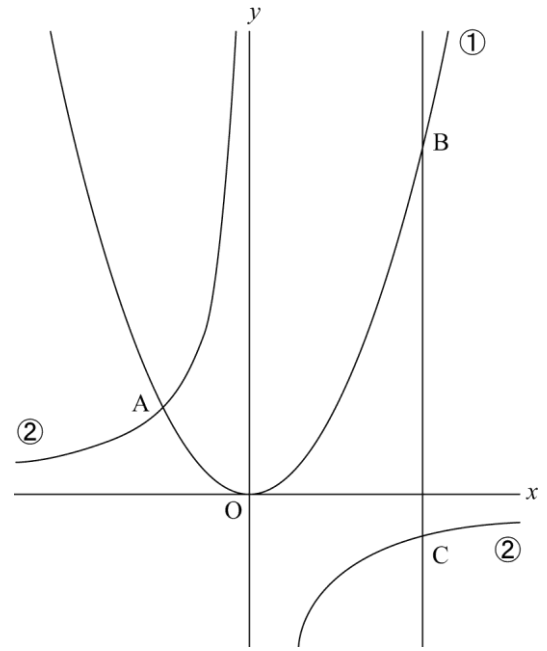
①と②は点 A で交わっていて、点 A の x 座標は -2 である。また、①のグラフ上に x 座標が 4 である点 B をとり、B を通り y 軸に平行な直線と②との交点を C とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(山形県 2019 年度)

- (1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を求めなさい。

- (2) 線分 BC 上に点 P をとる。△ACP の面積が△ABP の面積の 2 倍になるとき、点 P の y 座標として適切なものを、次のア～エから 1 つ選び、記号で答えなさい。

ア 3 イ 4 ウ 5 エ 6



解答欄

(1)	
(2)	

解答

(1) $0 \leq y \leq 8$

(2) ウ

解説

(1)

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ は $-2 \leq x \leq 4$ の範囲で、 $x = 0$ のとき最小値 0 をとる。

また、 $x = 4$ のとき $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ より、 $x = 4$ のとき最大値 8 をとるから、 y の変域は $0 \leq y \leq 8$

(2)

点 A は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり、 x 座標が -2 の点だから、その y 座標は $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$

よって、 $A(-2, 2)$ 点 A は曲線②上の点だから、曲線②の式を $y = \frac{a}{x}$ として、 $x = -2$ 、 $y = 2$ を代入すると、

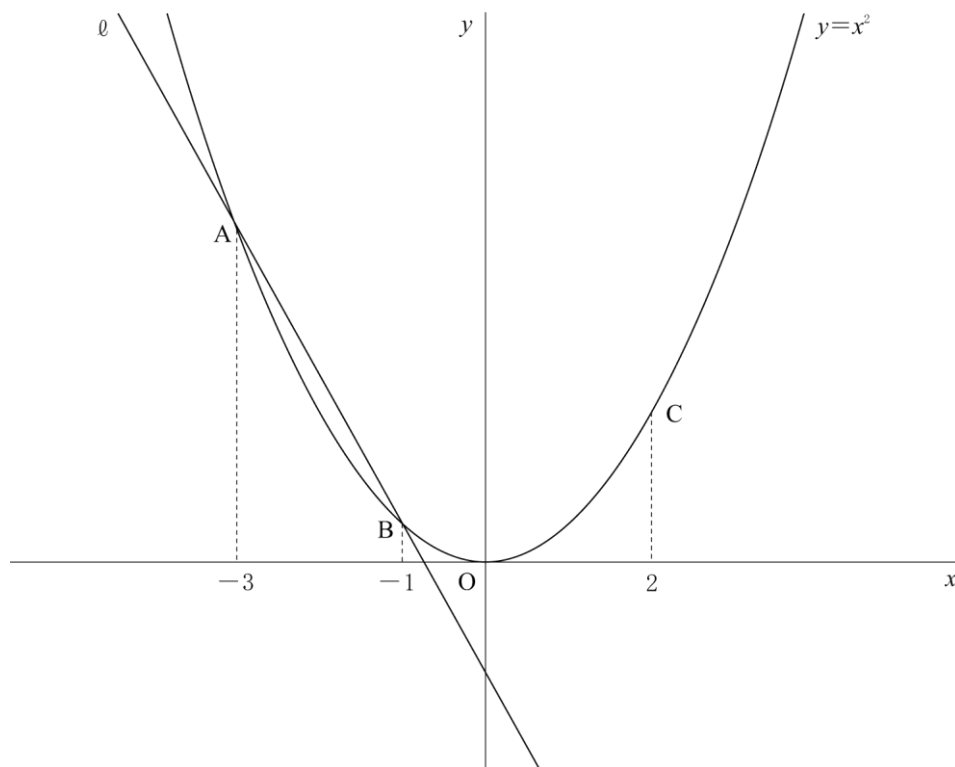
$2 = \frac{a}{-2}$ $a = -4$ よって、曲線②の式は、 $y = -\frac{4}{x}$ 点 B は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあり、

x 座標が 4 の点だから、 $B(4, 8)$ 点 C は曲線②上にあり、 x 座標が 4 の点だから、 $C(4, -1)$ なので、線分 BC の長さは $8 - (-1) = 9$

△ACP : △ABP = 2 : 1 より、CP : BP = 2 : 1 だから、 $BP = 9 \times \frac{1}{3} = 3$ なので、点 P の y 座標は点 B の y 座標より 3 小さく、 $8 - 3 = 5$ となり、答えはウとなる。

【問 4】

下の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に 3 点 A, B, C があり、A, B, C の x 座標はそれぞれ -3 , -1 , 2 である。また、2 点 A, B を通る直線を ℓ とする。



このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

(福島県 2019 年度)

問 1 直線 ℓ の傾きを求めなさい。

問 2 点 C を通り、直線 ℓ に平行な直線を m とし、 m と y 軸との交点を D とする。

(1) $\triangle BCD$ の面積を求めなさい。

(2) 関数 $y=x^2$ のグラフ上に点 P をとり、P の x 座標を t とする。ただし、 $0 < t < 2$ とする。

また、P を通り y 軸に平行な直線と m との交点を Q とする。四角形 BPCQ の面積が四角形 ABCD の面積の $\frac{1}{5}$ となる t の値を求めなさい。

解答欄

問 1		
問 2	(1)	
	(2)	

解答

問 1-4

問 2

(1) 15

(2) $t = -2 + 2\sqrt{3}$

解説

問 1

点 A の x 座標は -3 だから、 y 座標は $y = (-3)^2 = 9$ よって、 $A(-3, 9)$

点 B の x 座標は -1 だから、 y 座標は $y = (-1)^2 = 1$ よって、 $B(-1, 1)$

直線 は、2 点 A, B を通るから、傾きは、 $\frac{1-9}{-1-(-3)} = -4$

問 2

(1)

点 C の x 座標は 2 だから、 y 座標は $y = 2^2 = 4$ よって、 $C(2, 4)$

平行な直線は傾きが等しいから、直線 m の式は $y = -4x + b$ とおける。点 C を通るから $x = 2, y = 4$ を代入して、 $4 = -4 \times 2 + b$ $b = 12$ よって、直線 m の式は $y = -4x + 12$ で、 $D(0, 12)$

次に、直線 BC の式を求める。傾きは、 $\frac{4-1}{2-(-1)} = 1$ したがって、式は $y = x + c$ とおける。

点 C を通るから $x = 2, y = 4$ を代入して、 $4 = 2 + c$ $c = 2$

直線 BC の式は $y = x + 2$ で、 y 軸との交点を E とすると、 $E(0, 2)$

$\triangle BCD = \triangle BED + \triangle CED$ で、 $\triangle BED$ と $\triangle CED$ の底辺を $DE = 12 - 2 = 10$ とすると、高さはそれぞれ点 B, 点 C の x 座標の絶対値になる。

よって、 $\triangle BCD = \triangle BED + \triangle CED = \frac{1}{2} \times 10 \times 1 + \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 15$

(2)

$A(-3, 9), D(0, 12)$ より、直線 AD の傾きは、 $\frac{12-9}{0-(-3)} = 1$

(1) より、直線 BC の傾きも 1 だから、 $AD \parallel BC$

四角形 ABCD は 2 組の対辺が平行だから、平行四辺形になる。平行四辺形は、対角線によって合同な 2 つの三角形に分けられるから、平行四辺形 ABCD の面積は、 $\triangle BCD$ の面積の 2 倍で、 $15 \times 2 = 30$

したがって、四角形 BPCQ の面積が $30 \times \frac{1}{5} = 6$ となる t の値を求めることになる。

2 点 P, Q の座標は、それぞれ $P(t, t^2), Q(t, -4t + 12)$ と表されるから、 $PQ = -4t + 12 - t^2$

四角形 BPCQ = $\triangle BPQ + \triangle CPQ$ で、 $\triangle BPQ$ と $\triangle CPQ$ の底辺を PQ とすると、

$\triangle BPQ$ の高さは $t - (-1) = t + 1$, $\triangle CPQ$ の高さは $2 - t$ となる。

よって、四角形 BPCQ の面積について方程式をつくと、

$$\frac{1}{2} \times (-4t + 12 - t^2) \times (t + 1) + \frac{1}{2} \times (-4t + 12 - t^2) \times (2 - t) = 6$$

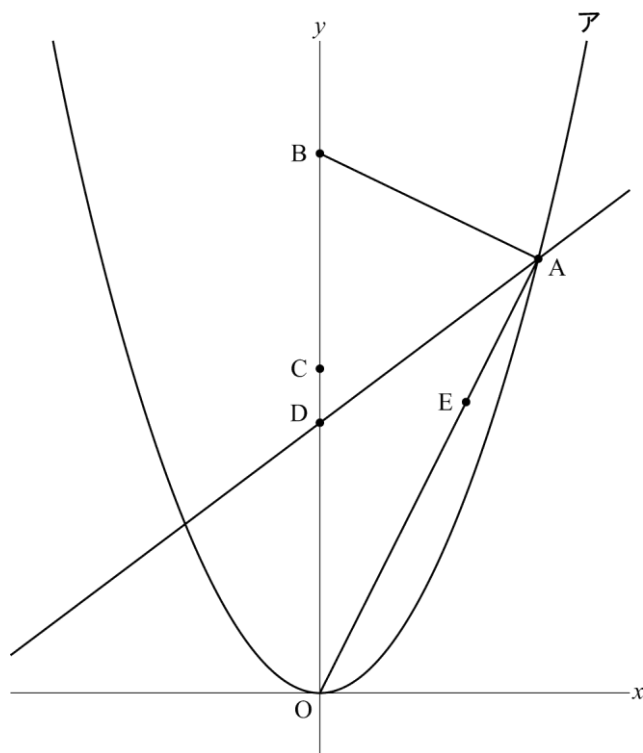
$$\text{整理すると、} \frac{1}{2} \times (-4t + 12 - t^2) \times \{(t + 1) + (2 - t)\} = 6 \quad \frac{3}{2}(-4t + 12 - t^2) = 6 \quad -4t + 12 - t^2 = 4$$

$$t^2 + 4t - 8 = 0 \quad \text{解の公式より、} t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

$0 < t < 2$ だから、 $t = -2 - 2\sqrt{3}$ は問題にあわない。 $t = -2 + 2\sqrt{3}$ は問題にあう。

【問 5】

下の図において、曲線 $\mathcal{A}$ は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。曲線 $\mathcal{A}$ 上の点で x 座標が 4 である点を A, y 軸上の点で y 座標が 10, 6 である点をそれぞれ B, C とし、線分 OB の中点を D とする。また、線分 OA 上に点 E をとる。



このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。ただし、O は原点とする。

(茨城県 2019 年度)

問 1 2 点 A, D を通る直線の式を求めなさい。

問 2 四角形 ABCE の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{2}$ であるとき、点 E の座標を求めなさい。

解答欄

問 1	$y =$
問 2	(,)

解答

問 1 $y = \frac{3}{4}x + 5$

問 2 $\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)$

解説

問 1

点 A の x 座標は 4 だから、 $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = 4$ を代入すると $y = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

よって、2 点 A, D を通る直線の式は $y = \frac{8-5}{4-0}x + 5 = \frac{3}{4}x + 5$ より、 $y = \frac{3}{4}x + 5$

問 2

点 E は線分 OA 上の点だから、点 E の x 座標を t とすると、点 E は直線 $y = 2x$ 上の点だから、点 E の座標は $(t, 2t)$ と表される。四角形 ABCE の面積は $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{2}$ だから、

$$(\text{四角形 ABCE の面積}) = \triangle OEC \quad \text{よって、} \triangle OAB = 2\triangle OEC \quad \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times t \quad t = \frac{10}{3}$$

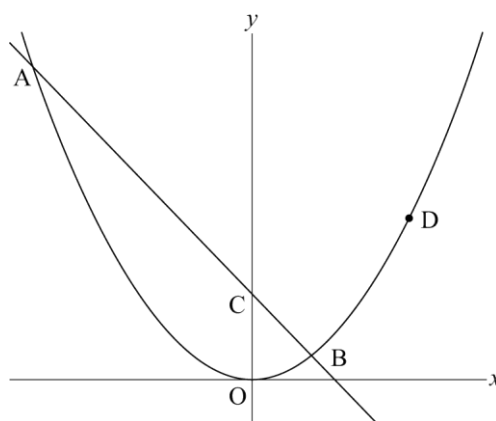
したがって、点 E の座標は $\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)$

【問 6】

右の図において、曲線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフで、直線は関数 $y=ax+2$ ($a<0$) のグラフです。直線と曲線との交点のうち x 座標が負である点を **A**、正である点を **B** とし、直線と y 軸との交点を **C** とします。また、曲線上に x 座標が 3 である点 **D** をとります。

このとき、次の各問に答えなさい。

(埼玉県 2019 年度)



問 1 $\triangle OCD$ の面積を求めなさい。

ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

問 2 $\triangle ADC$ の面積が、 $\triangle CDB$ の面積の 4 倍になるとき、 a の値を求めなさい。

解答欄

問 1	cm^2
問 2	$a =$

解答

問13 (cm²)

問2 $a = -\frac{3}{2}$

解説

問1

直線 $y = ax + 2$ の切片は 2 だから, $C(0, 2)$

$\triangle OCD$ で $OC = 2\text{cm}$ を底辺と見たとき, 高さは点 D の x 座標の値に等しいから 3cm

よって, $\triangle OCD$ の面積は, $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3(\text{cm}^2)$

問2

$\triangle ADC$ と $\triangle CDB$ の底辺をそれぞれ AC , BC とすると, 高さはどちらも D から直線 AB にひいた垂線の長さになるから等しい。

よって, $\triangle ADC : \triangle CDB = 4 : 1$ のとき, $AC : BC = 4 : 1$ となる。

また, 2 点 A , B から y 軸にそれぞれ垂線 AE , BF をひくと, $AE \parallel FB$ より, $AE : BF = AC : BC = 4 : 1$

よって, 点 B の x 座標を t とすると, 点 A の x 座標は $-4t$ となる。

A , B はどちらも放物線上の点だから, $y = \frac{1}{2}x^2$ にそれぞれの x 座標の値を代入し

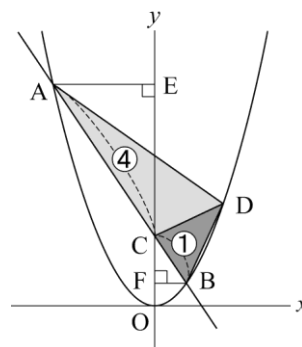
て y 座標を求めると, $A(-4t, 8t^2)$, $B(t, \frac{1}{2}t^2)$

したがって, $E(0, 8t^2)$, $F(0, \frac{1}{2}t^2)$, $C(0, 2)$

$EC : FC = AC : BC = 4 : 1$ だから, $(8t^2 - 2) : (2 - \frac{1}{2}t^2) = 4 : 1$ $8t^2 - 2 = 4(2 - \frac{1}{2}t^2)$ $10t^2 = 10$

$t^2 = 1$ $t = \pm 1$ $t > 0$ だから, $t = 1$

よって, $A(-4, 8)$ だから, $y = ax + 2$ に $x = -4$, $y = 8$ を代入して, $8 = a \times (-4) + 2$ $a = -\frac{3}{2}$

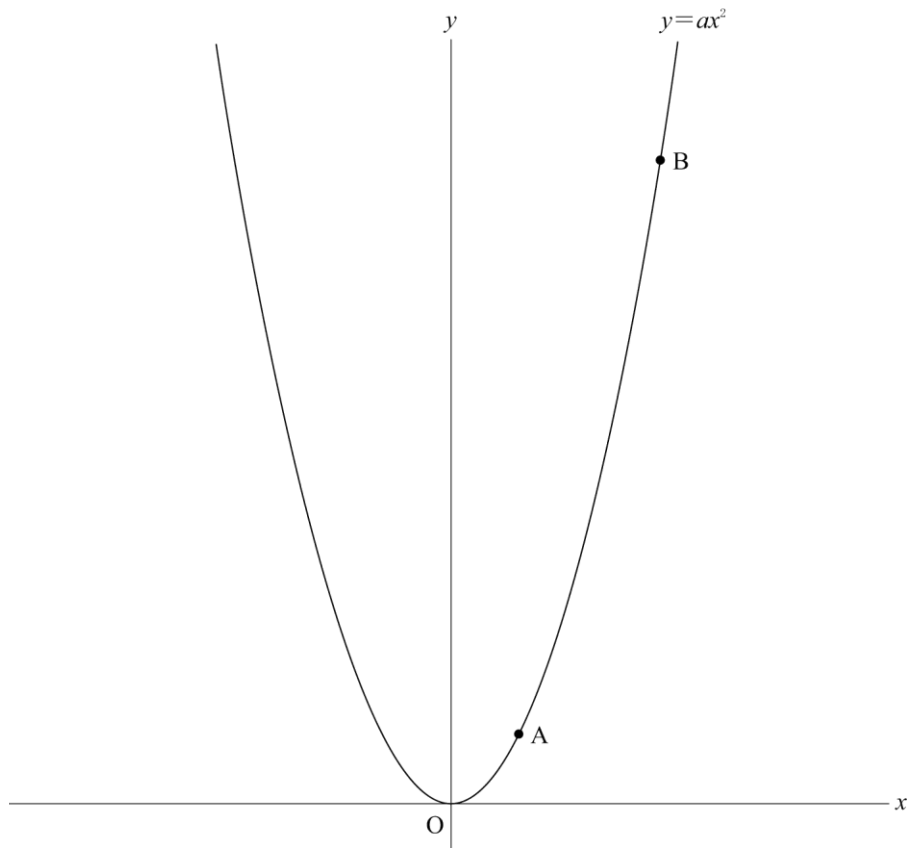


【問 7】

下の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の座標は (2, 2) で、点 B の x 座標は 6 である。

このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。ただし、 $a>0$ とする。

(千葉県 2019 年度 前期)



問 1 a の値を求めなさい。

問 2 点 B を、 y 軸を対称の軸として対称移動させた点を P とし、直線 AP と y 軸との交点を Q とする。このとき、次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 点 Q の y 座標を求めなさい。

(2) x 軸上に点 R を、 $\triangle ABQ$ と $\triangle ABR$ の面積が等しくなるようにとるとき、点 R の x 座標を求めなさい。ただし、点 R の x 座標は正とする。

問 1	$a=$	
問 2	(1)	
	(2)	

解答

問 1 $a=\frac{1}{2}$

問 2

(1) 6

(2) $\frac{9}{2}$

解説

問 1

点 A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点だから、 $y=ax^2$ に $x=2$, $y=2$ を代入すると、 $2=a \times 2^2$ $a=\frac{1}{2}$

問 2

(1)

点 B の y 座標は $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=6$ を代入して、 $y=\frac{1}{2} \times 6^2=18$ B(6, 18)だから、P(-6, 18)

直線 AP の傾きは、 $\frac{2-18}{2-(-6)}=\frac{-16}{8}=-2$ 直線 AP の式を $y=-2x+b$ として $x=2$, $y=2$ を代入する

と、 $2=-2 \times 2+b$ $b=6$ したがって、直線 AP の式は $y=-2x+6$ で、点 Q の y 座標は直線 AP の切片と等しいから 6。

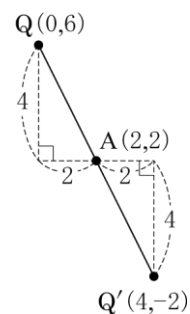
(2)

点 Q の座標は(1)より(0, 6)である。点 Q を、点 A を中心として 180° 回転移動させた点を Q' とすると、右の図より、 $Q'(4, -2)$ 点 A は線分 QQ' の中点だから、 $\triangle ABQ = \triangle ABQ'$ $AB \parallel Q'R$ のとき、 $\triangle ABQ' = \triangle ABR$ となるから、点 Q' を通り直線 AB に平行な直線 ℓ と x 軸との交点が R となる。

直線 AB の傾きは、 $\frac{18-2}{6-2}=4$ だから、直線 ℓ の式を $y=4x+c$ として $x=4$,

$y=-2$ を代入すると、 $-2=4 \times 4+c$ $c=-18$ したがって、直線 ℓ の式は

$y=4x-18$ だから、点 R の x 座標は $y=4x-18$ に $y=0$ を代入して、 $x=\frac{9}{2}$



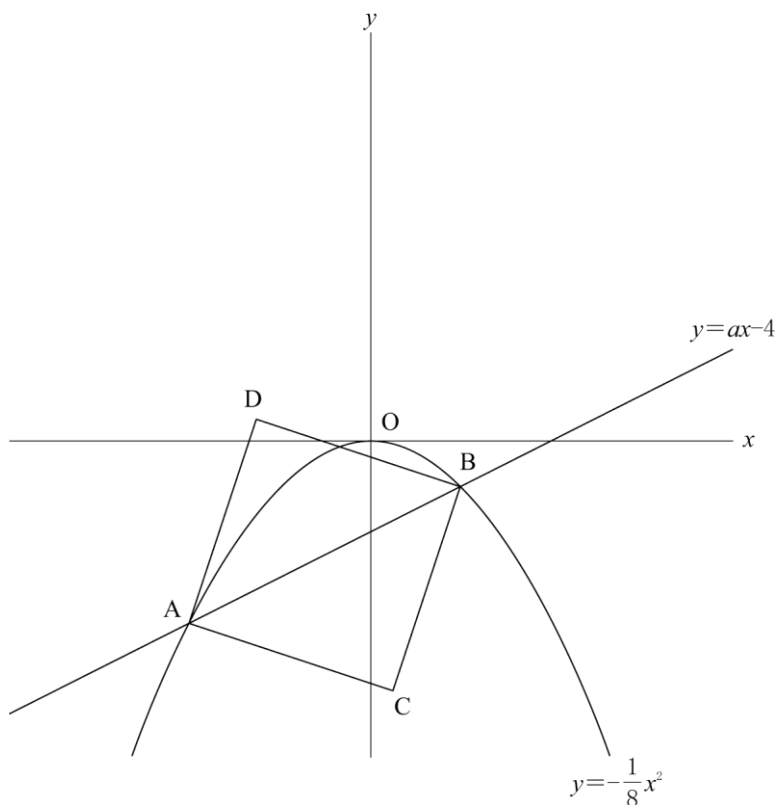
【問 8】

下の図のように、関数 $y = -\frac{1}{8}x^2$ のグラフと直線 $y = ax - 4$ が 2 点 A, B で交わっている。2 点 A, B の x 座標は、それぞれ -8 , 4 である。また、線分 AB を対角線とする正方形 ACBD をつくる。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

ただし、原点 O から点 $(1, 0)$ までの距離及び原点 O から点 $(0, 1)$ までの距離をそれぞれ 1 cm とする。

(千葉県 2019 年度 後期)



問 1 a の値を求めなさい。

問 2 線分 AB の長さを求めなさい。

問 3 y 軸上に点 P をとり、正方形 ACBD と面積の等しい $\triangle PAB$ をつくる。このとき、点 P の y 座標を求めなさい。ただし、点 P の y 座標は正とする。

解答欄

問 1	$a =$
問 2	cm
問 3	

解答

問 1 $a = \frac{1}{2}$

問 2 $6\sqrt{5}$ (cm)

問 3 11

解説

問 1

点 B の y 座標は $y = -\frac{1}{8}x^2$ に $x = 4$ を代入して、 $y = -\frac{1}{8} \times 4^2 = -2$ よって、 $B(4, -2)$

$$y = ax - 4 \text{ に } x = 4, y = -2 \text{ を代入して、} -2 = 4a - 4 \quad a = \frac{1}{2}$$

問 2

点 A の y 座標は $y = -\frac{1}{8}x^2$ に $x = -8$ を代入して、 $y = -\frac{1}{8} \times (-8)^2 = -8$ よって、 $A(-8, -8)$

また、問 1 より、 $B(4, -2)$ である。点 A を通り x 軸に平行な直線と点 B を通り y 軸に平行な直線との交点を E とすると、 $E(4, -8)$ となる。

$\triangle ABE$ は $\angle AEB = 90^\circ$ の直角三角形で、 $AE = 4 - (-8) = 12$ 、 $BE = -2 - (-8) = 6$ だから、三平方の定理より、 $AB^2 = 12^2 + 6^2 = 180$ $AB > 0$ だから、 $AB = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}(\text{cm})$

問 3

正方形の 2 つの対角線は長さが等しく垂直に交わるので

正方形の面積は $\frac{1}{2} \times (\text{対角線の長さ})^2$ で求められる。

問 2 より、 $AB = 6\sqrt{5}$ だから、正方形 ACBD の面積は $\frac{1}{2} \times (6\sqrt{5})^2 = 90(\text{cm}^2)$

直線 AB と y 軸との交点を F とすると、問 1 より、直線 AB の式は $y = \frac{1}{2}x - 4$ だから、 $F(0, -4)$

点 P の y 座標を p とすると、 $PF = p - (-4) = p + 4$ だから、

$$\triangle PAB = \triangle PFA + \triangle PFB = \frac{1}{2} \times (p + 4) \times 8 + \frac{1}{2} \times (p + 4) \times 4 = 6p + 24 \quad \text{よって、} 6p + 24 = 90 \quad p = 11$$

【問 9】

右の図において、直線①は関数 $y = -x$ のグラフであり、曲線②は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ、曲線③は関数 $y = ax^2$ のグラフである。

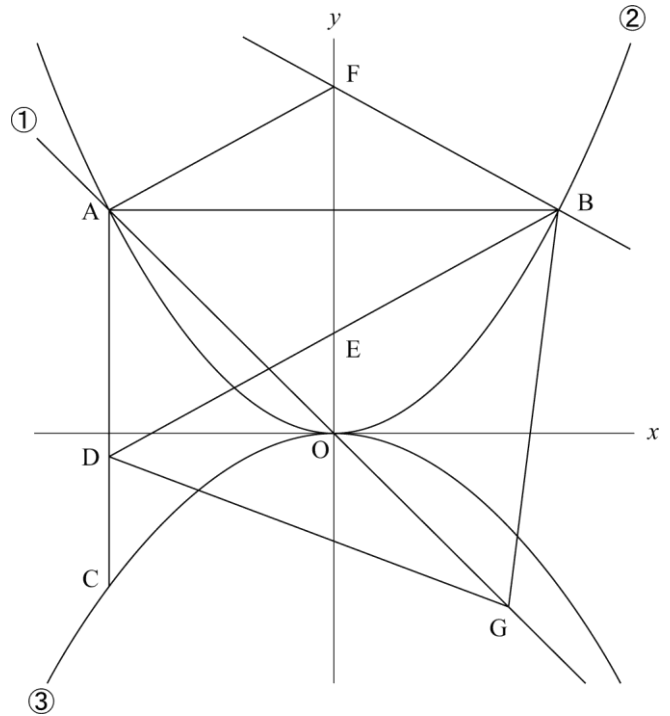
点 A は直線①と曲線②との交点であり、その x 座標は -3 である。点 B は曲線②上の点で、線分 AB は x 軸に平行である。

また、点 C は曲線③上の点で、線分 AC は y 軸に平行であり、点 C の y 座標は -2 である。点 D は線分 AC 上の点で、 $AD : DC = 2 : 1$ である。

さらに、点 E は線分 BD と y 軸との交点である。点 F は y 軸上の点で、 $AD = EF$ であり、その y 座標は正である。

原点を O とするとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2019 年度)



問 1 曲線③の式 $y = ax^2$ の a の値として正しいものを次の 1～6の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1 $a = -\frac{2}{3}$ | 2 $a = -\frac{1}{2}$ | 3 $a = -\frac{4}{9}$ |
| 4 $a = -\frac{1}{3}$ | 5 $a = -\frac{2}{9}$ | 6 $a = -\frac{1}{9}$ |

問 2 直線 BF の式を $y = mx + n$ とするときの (i) m の値と、(ii) n の値として正しいものを、それぞれ次の 1～6の中から 1 つ選び、その番号を答えなさい。

(i) m の値

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1 $m = -\frac{2}{3}$ | 2 $m = -\frac{5}{9}$ | 3 $m = -\frac{4}{9}$ |
| 4 $m = -\frac{1}{3}$ | 5 $m = -\frac{2}{9}$ | 6 $m = -\frac{1}{6}$ |

(ii) n の値

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1 $n = 4$ | 2 $n = \frac{25}{6}$ | 3 $n = \frac{13}{3}$ |
| 4 $n = \frac{14}{3}$ | 5 $n = \frac{29}{6}$ | 6 $n = 5$ |

問 3 点 G は直線①上の点である。三角形 BDG の面積が四角形 ADBF の面積と等しくなるとき、点 G の x 座標を求めなさい。ただし、点 G の x 座標は正とする。

解答欄

問 1		
問 2	(i)	
	(ii)	
問 3		

解答

問 1 5

問 2

(i) 2

(ii) 4

問 3 $\frac{33}{14}$

解説

問 1

線分 AC は y 軸に平行だから、2 点 A, C の x 座標は等しい。よって、点 C の座標は

$(-3, -2)$ だから、 $y=ax^2$ に $x=-3$, $y=-2$ を代入して、 $-2=a \times (-3)^2$ $a=-\frac{2}{9}$

問 2

点 A は直線 $y=-x$ 上の点で、 x 座標が -3 だから、 y 座標は、 $y=-(-3)=3$ よって、 $A(-3, 3)$

$AC=3-(-2)=5$ で、 $AD:DC=2:1$ より、 $AD=AC \times \frac{2}{2+1}=5 \times \frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

よって、点 D の y 座標は、 $3-\frac{10}{3}=-\frac{1}{3}$

また、2 点 A, B は $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあつて、線分 AB は x 軸に平行だから、A, B は y 軸について対称である。よって、 $B(3, 3)$

線分 AB と y 軸の交点を H とすると、H は AB の中点で、 $AD//HE$ より、 $HE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2} \times \frac{10}{3}=\frac{5}{3}$

点 H の y 座標は 3 だから、点 E の y 座標は、 $3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

$AD=EF$ より、点 F の y 座標は、 $\frac{4}{3}+\frac{10}{3}=\frac{14}{3}$ この値が直線 BF の切片だから、 $n=\frac{14}{3}$

$B(3, 3)$ は直線 BF 上の点だから、 $y=mx+\frac{14}{3}$ に $x=3$, $y=3$ を代入して、 $3=m \times 3+\frac{14}{3}$ $m=-\frac{5}{9}$

問 3

$A(-3, 3)$, $B(3, 3)$ より、 $AB=3-(-3)=6$ また、問 2 より $AD=\frac{10}{3}$, $FH=\frac{14}{3}-3=\frac{5}{3}$ だから、

四角形 ADBF $=\triangle ADB+\triangle FAB=\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{10}{3}+\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{5}{3}=15$

ここで、点 G の x 座標が点 B の x 座標と等しい場合を考えると、 $G(3, -3)$ より、 $BG=3-(-3)=6$ で、 $\triangle BDG=\frac{1}{2} \times 6 \times 6=18$ これは四角形 ADBF の面積より大きい。

したがって、四角形 ADBF $=\triangle BDG$ となるとき点 G の x 座標を t とすると、 $0 < t < 3$ であることがわかる。 $G(t, -t)$ を通り x 軸に平行な直線と、直線 AD, B を通り y 軸に平行な直線との交点をそれぞれ I, J とすると $I(-3, -t)$, $J(3, -t)$

四角形 BDIJ は $DI // BJ$ の台形で、 $D(-3, -\frac{1}{3})$ より、 $DI=-\frac{1}{3}-(-t)=t-\frac{1}{3}$, $BJ=3-(-t)=t+3$

$\triangle BDG$ = 台形 BDIJ $-\triangle DIG-\triangle BGJ=\frac{1}{2} \times (DI+BJ) \times IJ-\frac{1}{2} \times IG \times DI-\frac{1}{2} \times GJ \times BJ$

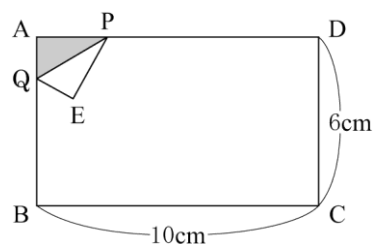
$=\frac{1}{2} \times \left(t-\frac{1}{3}+t+3\right) \times 6-\frac{1}{2} \times (t+3) \times \left(t-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2} \times (3-t) \times (t+3) =\frac{14}{3}t+4$

よって、 $\triangle BDG$ = 四角形 ADBF のとき、 $\frac{14}{3}t+4=15$ $t=\frac{33}{14}$

【問 10】

長方形の台紙に、同じ大きさのシールが貼ってある。このシールを、左上から少しずつはがしていくとき、現れた台紙の面積について考える。右の図 1 は、 $BC=10\text{ cm}$ 、 $CD=6\text{ cm}$ のシール付きの長方形 $ABCD$ の台紙から、シールを、点 A から少しだけはがしたところを示したものである。はがしたシールの、点 A と重なっていた点を E とし、はがしたシールと、現れた台紙との境目の線分の両端の点を P 、 Q とする。

図 1



下の図 2 のように、点 P が点 D に達するまでは、 $PQ \parallel DB$ となるようにはがしていき、その後は、下の図 3 のように、点 P が点 C に達するまでは、点 Q を点 B に固定したまま、はがしていく。点 P を、長方形の辺上を点 A から点 D を通って点 C まで移動する点と考えるとき、点 P の点 A からの道のりを $x\text{ cm}$ 、現れた台紙の面積を $y\text{ cm}^2$ とする。このとき、次の問 1～問 4 に答えなさい。ただし、点 P 、 Q が点 A にあるときは $y=0$ とする。

(新潟県 2019 年度)

図 2

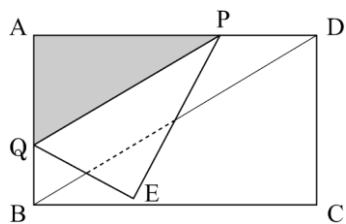
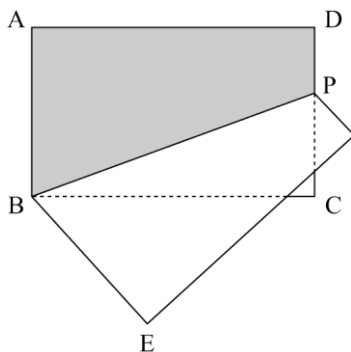


図 3



問 1 $x=4$ のとき、 y の値を答えなさい。

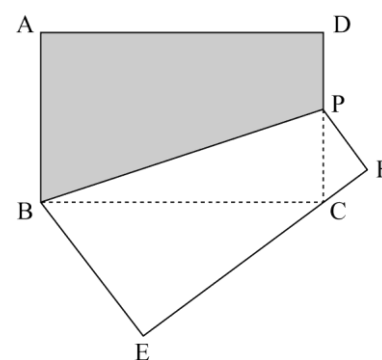
問 2 $10 < x \leq 16$ のとき、線分 DP の長さを x を用いて表しなさい。

問 3 次の (1)、(2) について、 y を x の式で表しなさい。

(1) $0 < x \leq 10$ のとき

(2) $10 < x \leq 16$ のとき

図 4



問 1	$y =$	
問 2	cm	
問 3	(1)	
	(2)	
問 4	[求め方] 答 $x =$, $y =$	

解答

問 1 $y = \frac{24}{5}$

問 2 $x = 10$ cm

問 3

(1) $y = \frac{3}{10}x^2$

(2) $y = 5x - 20$

問 4

〔求め方〕

$\triangle CFP \sim \triangle BEC$ である。

$\triangle BEC$ は、直角三角形で、 $BC = 10$ cm, $BE = 6$ cm だから、 $EC = 8$ cm となる。

このとき、 $CF = 10 - 8 = 2$ cm であり、 $FP = (x - 10)$ cm と表せるので、

$2 : (x - 10) = 6 : 8$ となる。

これを解くと、 $x = \frac{38}{3}$ となる。

また、 $y = 5 \times \frac{38}{3} - 20 = \frac{130}{3}$ となる。

答 $x = \frac{38}{3}$, $y = \frac{130}{3}$

解説

問 1

$\triangle ABD \sim \triangle AQP$ より、 $AQ : AP = AB : AD = 6 : 10 = 3 : 5$ $AQ = \frac{3}{5}AP = \frac{12}{5}$ (cm)

よって、 $y = \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} \times 4 = \frac{24}{5}$

問 2

$x = AD + DP = 10 + DP$ より、 $DP = x - 10$ (cm)

問 3

(1)

問 1 より、同様に、 $AP = x$ cm のとき、 $AQ = \frac{3}{5}x$ cm となり、 $y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}x \times x = \frac{3}{10}x^2$

(2)

$y = \frac{1}{2} \times \{(x - 10) + 6\} \times 10 = 5x - 20$

問 4

$\triangle CFP \sim \triangle BEC$ である。 $\triangle BEC$ において、三平方の定理より、 $EC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (cm)

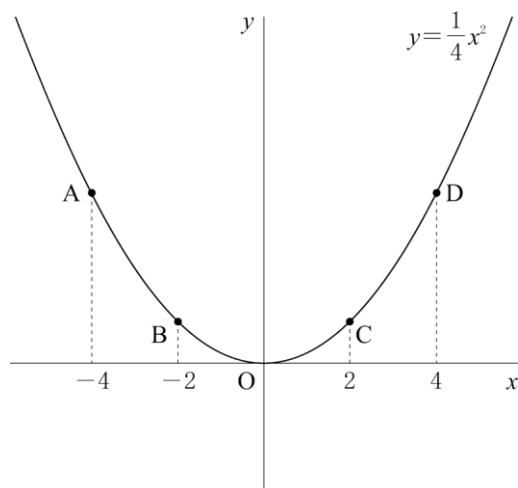
$CF = EF - EC = 10 - 8 = 2$ (cm) であり、 $FP = DP = (x - 10)$ cm であるから $2 : (x - 10) = 6 : 8$

$6(x - 10) = 16$ $x = \frac{38}{3}$ $x = \frac{38}{3}$ を $y = 5x - 20$ に代入して $y = \frac{130}{3}$

【問 11】

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 4 点 A, B, C, D があり、それぞれの x 座標は -4 , -2 , 2 , 4 である。
このとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2019 年度)



問 1 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ について、 x の値が -4 から -2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

問 2 直線 CD と y 軸との交点の座標を求めなさい。

問 3 y 軸と直線 AD, BC との交点をそれぞれ点 E, F とする。四角形 ABFE を y 軸を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。
ただし、円周率は π とする。

解答欄

問 1	
問 2	(,)
問 3	

解答

問 1 $-\frac{3}{2}$

問 2 (0, -2)

問 3 28π

解説

問 1

$x = -4$ のとき $y = \frac{1}{4} \times (-4)^2 = 4$ $x = -2$ のとき $y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$

(変化の割合) = $\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})}$ だから, $\frac{1-4}{-2-(-4)} = -\frac{3}{2}$

問 2

問 1 より, A(-4, 4), B(-2, 1)

また, $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフは y 軸について対称だから

2 点 C, D の y 座標はそれぞれ点 B, A の y 座標と等しい。

よって, C(2, 1), D(4, 4)

直線 CD の傾きは, $\frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$ だから, 直線 CD の式は $y = \frac{3}{2}x + b$ とおける。

C(2, 1) を通るから, $x = 2, y = 1$ を代入して, $1 = \frac{3}{2} \times 2 + b$ $b = -2$

よって, 直線 CD と y 軸の交点の座標は, (0, -2)

問 3

4 点 A, B, E, F の座標は, A(-4, 4), B(-2, 1), E(0, 4), F(0, 1)

直線 AB と y 軸の交点を G とする。直線 AB は直線 DC と y 軸について対称だから, G(0, -2)

四角形 ABFE を y 軸を軸として 1 回転させてできる立体は, $\triangle AGE$ を 1 回転させてできる円錐から $\triangle BGF$ を 1 回転させてできる円錐を取り除いた形になる。

$\triangle AGE$ を 1 回転させてできる円錐は, 底面の半径が $AE = 4$, 高さが $EG = 4 - (-2) = 6$ だから,

体積は, $\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$

$\triangle BGF$ を 1 回転させてできる円錐は, 底面の半径が $BF = 2$, 高さが $FG = 1 - (-2) = 3$ だから,

体積は, $\frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi$

よって, 求める立体の体積は, $32\pi - 4\pi = 28\pi$

【問 12】

右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 ℓ が、2 点 A, B で交わっている。A の座標は $(-1, 2)$ で、B の x 座標は 2 である。

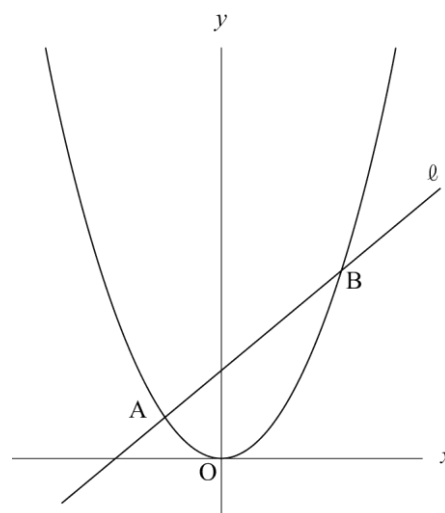
次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(岐阜県 2019 年度)

問 1 a の値を求めなさい。

問 2 直線 ℓ の式を求めなさい。

問 3 $\triangle AOB$ の面積を求めなさい。



解答欄

問 1	$a =$
問 2	$y =$
問 3	

解答

問 1 $a = 2$

問 2 $y = 2x + 4$

問 3 6

解説

問 1

$y = ax^2$ に $x = -1$, $y = 2$ を代入して、 $2 = a \times (-1)^2$ $a = 2$

問 2

$y = 2x^2$ に $x = 2$ を代入すると、 $y = 2 \times 2^2 = 8$ だから、点 B の座標は $(2, 8)$

よって、直線 ℓ の傾きは、 $\frac{8-2}{2-(-1)} = 2$ だから、直線 ℓ の式を $y = 2x + b$ として $x = -1$, $y = 2$ を代入すると、

$2 = 2 \times (-1) + b$ $b = 4$ よって、直線 ℓ の式は $y = 2x + 4$

問 3

直線 ℓ と y 軸との交点を C とすると、 $C(0, 4)$ よって、 $OC = 4$

$\triangle AOB = \triangle AOC + \triangle BOC = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 6$

【問 13】

図 4 において、①は関数 $y=ax^2$ ($0 < a < 1$) のグラフであり、②は関数 $y=x^2$ のグラフである。2 点 A, B は、放物線①上の点であり、その x 座標は、それぞれ -3 , 2 である。点 B を通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点を C とする。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(静岡県 2019 年度)

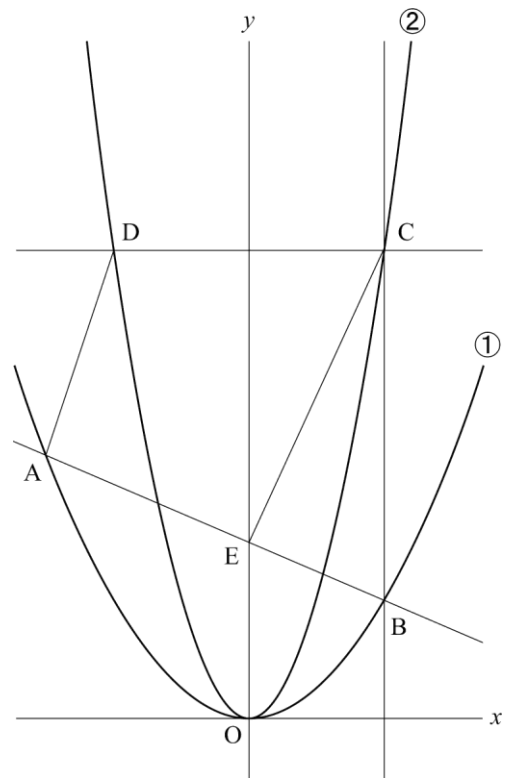
問 1 x の変域が $-1 \leq x \leq 5$ であるとき、関数 $y = ax^2$ の y の変域を、 a を用いて表しなさい。

問2 点Cを通り、傾きが $\frac{5}{2}$ である直線の式を求めなさい。

問3 点Cからy軸に引いた垂線の延長と放物線②との交点をDとする。直線ABとy軸との交点をEとする。

四角形 DAEC が台形となる時の、 a の値を求めなさい。求める過程も書きなさい。

图 4



解答欄

問 1	
問 2	
問 3	[求める過程] (答) $a =$

解答

問1 $0 \leq y \leq 25a$

問2 $y = \frac{5}{2}x - 1$

問3

〔求める過程〕

A(-3, 9a), D(-2, 4) より, 直線 AD の傾きは, $\frac{4-9a}{-2-(-3)} = 4-9a$

また, 直線 AB の式は $y = -ax + 6a$ より, E(0, 6a)

よって, 直線 EC の傾きは, C(2, 4) より,

$$\frac{4-6a}{2-0} = 2-3a$$

AD // EC より, $4-9a = 2-3a$ $a = \frac{1}{3}$

(答) $a = \frac{1}{3}$

解説

問1

$a > 0$ で, x の変域に 0 がふくまれているから, $x=0$ のとき y の値は最小値 0 をとる。

また, $x=5$ のとき最大値をとり, $y = a \times 5^2 = 25a$ よって, $0 \leq y \leq 25a$

問2

直線 BC は y 軸に平行だから, 点 C の x 座標は 2 y 座標は, $y = 2^2 = 4$ よって, C(2, 4)

点 C を通り, 傾きが $\frac{5}{2}$ である直線の式は $y = \frac{5}{2}x + b$ とおけるから, この式に $x=2$, $y=4$ を代入して,

$$4 = \frac{5}{2} \times 2 + b \quad b = -1 \quad \text{よって, } y = \frac{5}{2}x - 1$$

問3

点 A の y 座標は, $y = a \times (-3)^2 = 9a$ よって, A(-3, 9a)

点 B の y 座標は, $y = a \times 2^2 = 4a$ よって, B(2, 4a)

直線 AB の傾きは, $\frac{4a-9a}{2-(-3)} = -a$

$a > 0$ だから, 直線 AB の傾きは負。また, 直線 DC は x 軸に平行。よって, 四角形 DAEC で, 2 辺 DC, AE が平行になることはないから, この四角形が台形になるのは AD // EC のときとわかる。

問2 より C(2, 4) で, 点 D は y 軸について点 C と対称だから, D(-2, 4)

直線 AD の傾きは, $\frac{4-9a}{-2-(-3)} = 4-9a \cdots \text{①}$

また, 直線 AB の式を $y = -ax + e$ とする。B(2, 4a) を通るから, $4a = -a \times 2 + e$ $e = 6a$

よって, E(0, 6a)

直線 EC の傾きは, $\frac{4-6a}{2-0} = 2-3a \cdots \text{②}$

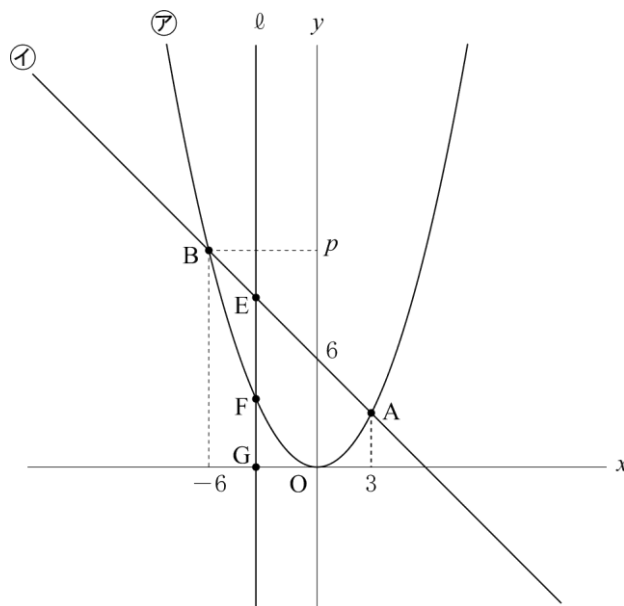
平行な直線の傾きは等しいから, ①, ②より, $4-9a = 2-3a$ $-6a = -2$ $a = \frac{1}{3}$

【問 14】

次の図のように、関数 $y=ax^2\cdots\textcircled{ア}$ のグラフと関数 $y=-x+6\cdots\textcircled{イ}$ のグラフとの交点 A , B があり、点 A の x 座標が 3 、点 B の座標が $(-6, p)$ である。 y 軸に平行な直線 ℓ を $x < 0$ の範囲にひき、 $\textcircled{イ}$ のグラフ、 $\textcircled{ア}$ のグラフ、 x 軸との交点をそれぞれ E , F , G とする。

このとき、あとの各問いに答えなさい。

(三重県 2019 年度)



問 1 a , p の値を求めなさい。

問 2 関数 $\textcircled{ア}$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を求めなさい。

問 3 $EF=2FG$ となるときの、点 E の x 座標を求めなさい。

問 4 x 軸上の $x > 0$ の範囲に点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。 $\triangle ABC$ の面積と $\triangle OAB$ の面積が等しくなるとき、点 C の座標を求めなさい。
ただし、原点を O とする。

解答欄

問 1	$a=$
	$p=$
問 2	$\leq y \leq$
問 3	$x=$
問 4	C(,)

解答

問 1

$$a=\frac{1}{3}$$

$$p=12$$

$$\text{問 2 } 0 \leq y \leq \frac{16}{3}$$

$$\text{問 3 } x=-3$$

$$\text{問 4 } C(12, 0)$$

解説

問 1

点 A は $y=-x+6$ 上の点だから、 $x=3$ を代入して $y=3$ よって、 $A(3, 3)$

点 A は $y=ax^2$ 上の点でもあるから、 $x=3$ 、 $y=3$ を代入して $3=9a$ $a=\frac{1}{3}$ よって、関数㉔の式は

$$y=\frac{1}{3}x^2 \quad \text{また、点 B も } y=\frac{1}{3}x^2 \text{ 上の点だから、} x=-6, y=p \text{ を代入して } p=\frac{1}{3} \times (-6)^2=12$$

問 2

$$-2 \leq x \leq 4 \text{ のとき } y \geq 0 \quad \text{また、} x=-2 \text{ のとき } y=\frac{4}{3}, x=4 \text{ のとき } y=\frac{16}{3} \text{ だから、} y \text{ の変域は } 0 \leq y \leq \frac{16}{3}$$

問 3

$$\text{点 E の } x \text{ 座標を } t(t<0) \text{ とおく。} EF=EG-FG=-t+6-\frac{1}{3}t^2 \text{ で、} EF=2FG \text{ だから } -t+6-\frac{1}{3}t^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$t^2+t-6=0 \quad (t+3)(t-2)=0 \quad t<0 \text{ より、} t=-3 \quad \text{よって、点 E の } x \text{ 座標は } -3$$

問 4

$\triangle ABC$ と $\triangle OAB$ は辺 AB を共通な辺にもつから、 $\triangle ABC=\triangle OAB$ となるとき、辺 AB を底辺と見たときの高さが等しくなる。

直線 AB と平行で点 O を通る直線を m とする。AB から等しい距離にある 2 本の直線のうち、 m でないほうの直線を表す式は $y=-x+12$ である。この直線上に点 P をとると、 $\triangle ABP=\triangle OAB$ となる。点 C は x 軸上($x>0$)にあるから、 $y=-x+12$ と x 軸との交点が点 C になる。よって、 $0=-x+12$

$$x=12 \quad \text{だから、} C(12, 0)$$

【問 15】

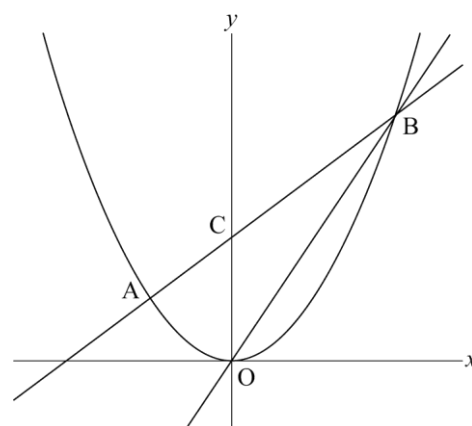
右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があ
り、2 点 A, B の x 座標はそれぞれ -3 , 6 である。

また、2 点 O, B を通る直線の傾きは $\frac{3}{2}$ である。2 点 A, B を
通る直線と y 軸との交点を C とする。

このとき、次の問 1～問 3 に答えよ。

(京都府 2019 年度 前期)

問 1 a の値を求めよ。



問 2 直線 AB の式を求めよ。

問 3 x 軸上に x 座標が正である点 D をとる。点 D を通り、傾きが $\frac{6}{25}$ である直線と y 軸との交点を E
とする。△OCA=△OED であるとき、2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

解答欄

問 1	$a =$
問 2	$y =$
問 3	D (,)
	E (,)

解答

問 1 $a = \frac{1}{4}$

問 2 $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

問 3

D $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$

E $\left(0, -\frac{9}{5}\right)$

解説

問 1

直線 OB は傾きが $\frac{3}{2}$ だから、式は $y = \frac{3}{2}x$

点 B の x 座標は 6 だから、 y 座標は $y = \frac{3}{2} \times 6 = 9$ よって、B(6, 9)

また、点 B は $y = ax^2$ 上の点でもあるから、 $y = ax^2$ に $x = 6$, $y = 9$ を代入して、 $9 = a \times 6^2$ $a = \frac{1}{4}$

問 2

点 A の x 座標は -3 だから、 $y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = -3$ を代入して、 $y = \frac{1}{4} \times (-3)^2 = \frac{9}{4}$ よって、A $\left(-3, \frac{9}{4}\right)$

また、問 1 より、B(6, 9)

直線 AB の式を $y = mx + n$ とすると、傾き m は、 $\left(9 - \frac{9}{4}\right) \div \{6 - (-3)\} = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}x + n$ に点 B の座標の x , y の値を代入して、 $9 = \frac{3}{4} \times 6 + n$ $n = \frac{9}{2}$

よって、直線 AB の式は、 $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

問 3

2 点 D, E の座標を D(d , 0), E(0, e) とする。直線 DE は傾きが $\frac{6}{25}$ だから、式は $y = \frac{6}{25}x + e$

この式に、点 D の座標の x , y の値を代入して、 $0 = \frac{6}{25} \times d + e$ $e = -\frac{6}{25}d$ よって、E $\left(0, -\frac{6}{25}d\right)$

$\triangle OCA$ の底辺を OC とすると、高さは点 A の x 座標の絶対値 3 となる。

問 2 より C $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ だから、OC = $\frac{9}{2}$ よって、 $\triangle OCA = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{27}{4}$

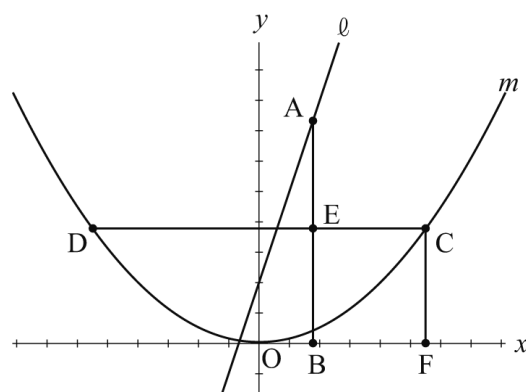
また、 $\triangle OED = \frac{1}{2} \times OD \times OE = \frac{1}{2} \times d \times \frac{6}{25}d = \frac{3}{25}d^2$

よって、 $\triangle OCA = \triangle OED$ のとき、 $\frac{3}{25}d^2 = \frac{27}{4}$ $d^2 = \frac{27}{4} \times \frac{25}{3} = \frac{9 \times 25}{4}$ $d = \pm \sqrt{\frac{9 \times 25}{4}} = \pm \frac{3 \times 5}{2} = \pm \frac{15}{2}$

$d > 0$ だから、 $d = \frac{15}{2}$ したがって、D $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ また、 $-\frac{6}{25}d = -\frac{6}{25} \times \frac{15}{2} = -\frac{9}{5}$ より、E $\left(0, -\frac{9}{5}\right)$

【問 16】

右図において、 m は関数 $y = \frac{1}{8}x^2$ のグラフを表し、 ℓ は関数 $y = 3x + 2$ のグラフを表す。 A は ℓ 上の点であり、その x 座標は正である。 A の x 座標を t とし、 $t > 0$ とする。 B は x 軸上の点であり、 B の x 座標は A の x 座標と等しい。 A と B とを結ぶ。 C 、 D は m 上の点であって、 C の x 座標は正であり、 D の x 座標は負である。 C の y 座標と D の y 座標とは等しい。 C と D とを結ぶ。 E は直線 CD と直線 AB との交点であり、 $DE = AB$ である。このとき、 E の x 座標は C の x 座標より小さい。 F は x 軸上の点であり、 F の x 座標は C の x 座標と等しい。 C と F とを結ぶ。 $EC = CF$ であるときの t の値を求めなさい。求め方も書くこと。ただし、座標軸の 1 目もりの長さは 1 cm であるとする。



(大阪府 C 2019 年度)

解答欄

[求め方]

t の値

解答

〔求め方〕

A(t , $3t+2$) だから $AB=3t+2(\text{cm})$

E の x 座標は t であり, $DE=AB$ だから,

D の x 座標は $t-(3t+2)=-2t-2$

C の x 座標は $2t+2$ だから

$EC=(2t+2)-t=t+2(\text{cm})$

C は m 上の点だから $C\left(2t+2, \frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}\right)$

よって $CF=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}(\text{cm})$

$EC=CF$ だから $t+2=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$

これを解くと, $t>0$ より $t=\sqrt{3}$

t の値 $\sqrt{3}$

解説

$DE=AB$ より, 点 D の x 座標は, 点 A の x 座標 t から点 A の y 座標 $3t+2$ をひいた値になるから,

$t-(3t+2)=-2t-2$

また, 放物線は y 軸について対称だから, 点 C の x 座標は点 D の x 座標の符号を反対にした値になり,

$-(-2t-2)=2t+2$

よって, 点 C の y 座標は, $y=\frac{1}{8}\times(2t+2)^2=\frac{1}{8}\times(4t^2+8t+4)=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$

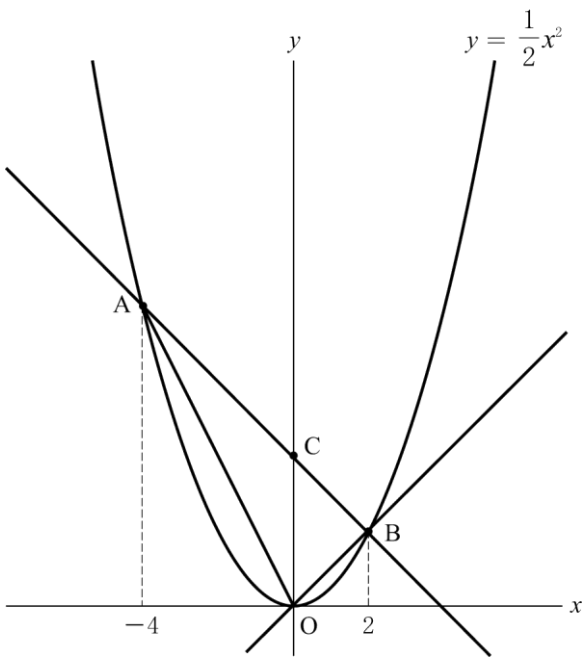
これが, $EC=(2t+2)-t=t+2$ と等しくなるとして, 方程式をつくって解けばよい。

【問 17】

図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、その x 座標はそれぞれ -4 , 2 である。
また、直線 AB と y 軸の交点を C とする。

次の問いに答えなさい。ただし、座標軸の単位の長さは 1 cm とする。

(兵庫県 2019 年度)



- 問 1 直線 OB の傾きを求めなさい。
- 問 2 $\triangle OAC$ の面積は何 cm^2 か、求めなさい。
- 問 3 $\triangle OAC$ と $\triangle BCD$ の面積が等しくなるように、 y 軸上の正の部分に点 D をとる。
- (1) 点 D の y 座標を求めなさい。
- (2) 点 B を通り、四角形 OADB の面積を 2 等分する直線と、直線 AD の交点の座標を求めなさい。

解答欄

問 1		
問 2	cm^2	
問 3	(1)	$y =$
	(2)	(,)

解答

問 1 1

問 2 8 (cm²)

問 3

(1) $y=12$

(2) $(-3, 9)$

解説

問 1

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=2$ を代入すると $y=2$ となるから、 $B(2, 2)$

よって、直線 OB の傾きは 1 である。

問 2

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-4$ を代入すると、 $y=8$ となるから、 $A(2, 2)$ で、問 1 より、 $B(2, 2)$ で、直線 AB の傾きは

$\frac{2-8}{2-(-4)}=-1$ なので、直線 AB を表す式を $y=-x+b$ において $x=2$, $y=2$ を代入すると、

$2=-2+b$ $b=4$ よって、 $y=-x+4$ であるから、 $C(0, 4)$

よって、 $\triangle OAC=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8(\text{cm}^2)$

問 3

(1)

点 D の y 座標を t とおく。 $\triangle OAC$ と $\triangle BCD$ の面積が等しいから、 $\triangle BCD$ の面積も 8cm^2 となる。よって、

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times (t-4)\times 2$ より、 $t-4=8$ $t=12$

(2)

四角形 $OADB$ の面積は $\frac{1}{2}\times 12\times \{2-(-4)\}=36(\text{cm}^2)$ また、 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 4\times \{2-(-4)\}=12(\text{cm}^2)$

であるから、 $\triangle BAD=36-12=24(\text{cm}^2)$ 点 B を通り、四角形 $OADB$ の面積を 2 等分する直線と辺 AD との交点を E とする。直線 BE は四角形 $OADB$ の面積を 2 等分するから、 $\triangle BAE=24-18=6(\text{cm}^2)$ であればよい。直線 AD を表す式は $y=x+12$ であるから、直線 OB と平行である。 $\triangle BAE$ と $\triangle BED$ について、 $AD\parallel OB$ より、辺 AE , ED をそれぞれ底辺とみると、高さは等しいから面積比と底辺の長さの比は等しくなる。したがって、 $AE:ED=\triangle BAE:\triangle BED=6:18=1:3$ となるから、点 E の x 座標は -3 である。よって、点 E の座標は $(-3, 9)$ である。

【問 18】

図 1 のように、

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \cdots \text{①}$$

$$y = -\frac{12}{x} \quad (x > 0) \quad \cdots \text{②}$$

のグラフがある。

①のグラフ上に 2 点 A, B があり, それぞれの座標は $(-2, 2)$, $(2, 2)$ である。また, ②のグラフ上に点 P があり, P を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を Q とし, 四角形 ABPQ をつくる。

次の問 1 ～問 4 に答えなさい。

(和歌山県 2019 年度)

問 1 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について, x の値が 0 から 2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

問 2 図 2 のように, 四角形 ABPQ が平行四辺形になるとき, 直線 AQ の式を求めなさい。

問 3 図 3 のように, ①のグラフと四角形 ABPQ の対角線 BQ が B 以外で交わっている。その交点を R とする。

R の x 座標が 1 のとき, P の座標を求めなさい。

問 4 図 4 のように, $\angle ABP = 90^\circ$ のとき, 四角形 ABPQ を, 辺 BP を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

ただし, 円周率は π とする。

図 1

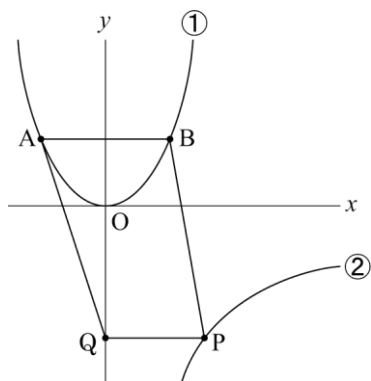


図 2

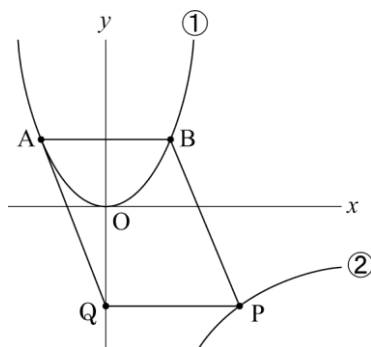


図 3

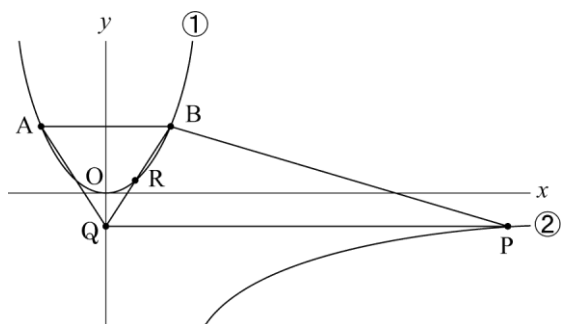
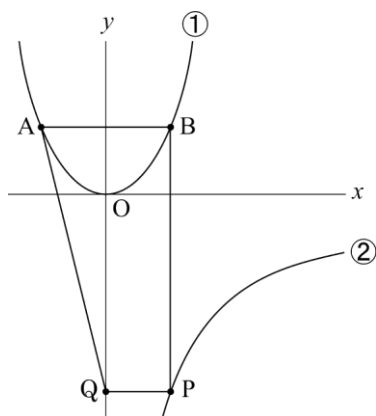


図 4



解答欄

問 1	
問 2	
問 3	P (,)
問 4	

解答

問 1 1

問 2 $y = -\frac{5}{2}x - 3$

問 3 P (12, -1)

問 4 $\frac{224}{3}\pi$

解説

問 1

変化の割合 = $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ であり、 y の増加量 = $\frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 = 2$ だから、変化の割合は 1

問 2

点 P の x 座標を p とすると、 y 座標は $-\frac{12}{p}$ である。平行四辺形の向かいあう辺は等しいから

$QP = AB = 4$ $p = 4$ よって、P(4, -3) $AB \parallel QP$ より Q(0, -3)

したがって、直線 AQ を表す式は $y = \frac{-3-2}{0-(-2)}x - 3 = -\frac{5}{2}x - 3$

問 3

点 R は①上の点で x 座標が 1 だから y 座標は $\frac{1}{2}$ である。よって、直線 BR の傾きは

$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2-1} = \frac{3}{2}$ だから、直線 BR の式は $y = \frac{3}{2}x + b$ とおける。これに点 B の座標 $x=2, y=2$ を代入すると、

$2 = \frac{3}{2} \times 2 + b$ $b = -1$ よって、直線 BR の式は $y = \frac{3}{2}x - 1$ だから、点 Q(0, -1) 点 P の y 座標は点 Q の y 座標と等しいから $y = -1$ を②の式に代入して $x=12$ したがって、P(12, -1)

問 4

$\angle ABP = 90^\circ$ より、点 P の x 座標は点 B の x 座標と等しいから、 $x=2$ を②の式に代入すると $y = -6$ となり点 P(2, -6) である。直線 AQ と直線 BP の交点を S とする。 $\triangle SQP \sim \triangle SAB$ で $QP : AB = 1 : 2$ だから、辺 SB を軸として 1 回転させてできる円錐（これを円錐 X とする）と辺 SP を軸として 1 回転させてできる円錐（これを円錐 Y とする）の体積比は $2^3 : 1^3 = 8 : 1$

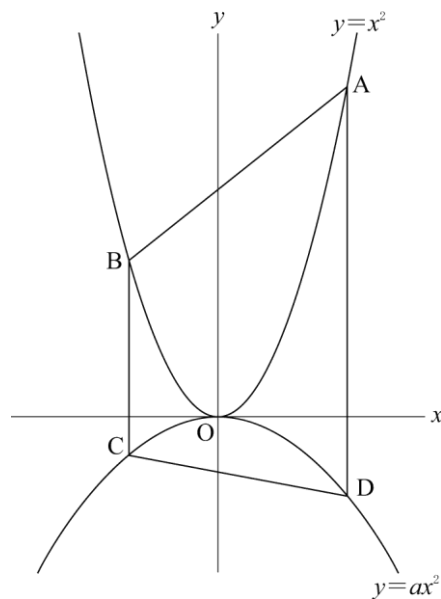
円錐 X の体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times \{2 - (-6)\} \times 2 = \frac{256}{3}\pi$ だから、円錐 Y の体積は $\frac{256}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \frac{32}{3}\pi$

よって、求める立体の体積は $\frac{256}{3}\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{224}{3}\pi$

【問 19】

右の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B が、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 C, D があり、点 A と点 D の x 座標は 3、点 B と点 C の x 座標は -2 である。点 A と点 B、点 B と点 C、点 C と点 D、点 D と点 A をそれぞれ結ぶ。問 1、問 2 のに適当な数または式を書き入れなさい。問 3 は指示に従って答えなさい。ただし、 $a < 0$ とする。

(岡山県 2019 年度 特別)



問 1 点 A の座標は (3,) である。

問 2 2 点 A, B を通る直線の式は $y =$ である。

問 3 四角形 ABCD の面積が 50 であるような a の値は、次のように求めることができる。

(1) , (2) には適当な式を書き入れなさい。また、 (3) には a の値を求めなさい。ただし、 (3) は答えを求めるまでの過程も書きなさい。

点 C の y 座標は a を使って (1) と表すことができる。また、点 B と点 C の x 座標は等しいので、線分 BC の長さは a を使って (2) と表すことができる。同様に、線分 AD の長さも a を使って表すことができる。

このとき、 (3)

解答欄

問 1		
問 2		
問 3	(1)	
	(2)	
	(3)	

解答

問 19

問 2 $x+6$

問 3

(1) $4a$

(2) $4-4a$

(3)

四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形であり、その面積は 50 であるから、

$$\frac{1}{2}\{(4-4a)+(9-9a)\} \times 5 = 50$$

$$13-13a=20$$

$$-13a=7$$

$$a=-\frac{7}{13}$$

これは $a < 0$ を満たす。

解説

問 1

点 A の y 座標は、 $y=x^2$ に $x=3$ を代入して、 $y=3^2=9$ よって、 $A(3, 9)$

問 2

点 B の y 座標は、 $y=x^2$ に $x=-2$ を代入して、 $y=(-2)^2=4$ よって、 $B(-2, 4)$

2 点 A, B を通る直線の傾きは、 $\frac{9-4}{3-(-2)}=1$ よって、直線の式は $y=x+b$ とおくことができる。

$A(3, 9)$ を通るから、 $x=3, y=9$ を代入して、 $9=3+b$ $b=6$ よって、 $y=x+6$

問 3

(1)

点 C の y 座標は、 $y=ax^2$ に $x=-2$ を代入して、 $y=a \times (-2)^2=4a$

(2)

$B(-2, 4), C(-2, 4a)$ より、 $BC=4-4a$

(3)

点 D の y 座標は、 $y=ax^2$ に $x=3$ を代入して、 $y=a \times 3^2=9a$ $A(3, 9), D(3, 9a)$ より $AD=9-9a$

四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形で、BC を上底、AD を下底とすると、高さは 2 点 A, D と 2 点 B, C の x 座標の差になるから、 $3-(-2)=5$

よって、台形 ABCD の面積に着目して方程式をつくると、 $\frac{1}{2} \times \{(4-4a)+(9-9a)\} \times 5 = 50$

これを解いて a の値を求める。

【問 20】

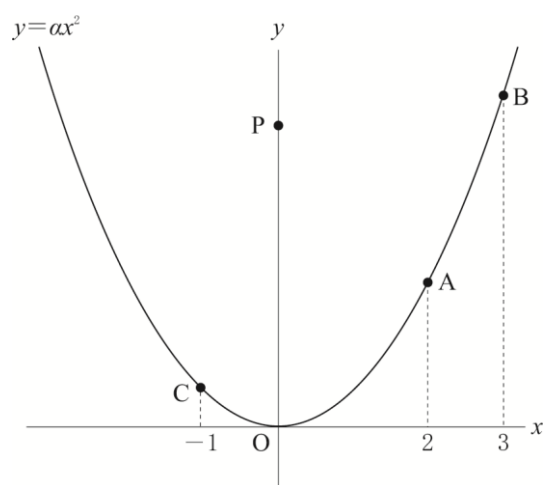
下の図のように、関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフ上に 3 点 A, B, C があり、点 A の x 座標は 2、点 B の x 座標は 3、点 C の x 座標は -1 である。また、点 P は y 軸上の点である。問 1～問 4 に答えなさい。

(徳島県 2019 年度)

問 1 $a=1$ のとき、点 A の座標を求めなさい。

問 2 $a=1$ 、点 P の y 座標が 6 のとき、直線 BP の式を求めなさい。

問 3 $a=2$ のとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle ABP$ の面積が等しくなる点 P の y 座標を求めなさい。



問 4 AP+BP の長さが最短になる点 P の y 座標が 5 である。このとき、 a の値を求めなさい。

解答欄

問 1	A(,)
問 2	
問 3	
問 4	$a=$

解答

問1 A(2, 4)

問2 $y=x+6$

問3 12

問4 $a=\frac{5}{6}$

解説

問1

点Aのy座標は、 $y=x^2$ に $x=2$ を代入して、 $y=2^2=4$ よって、A(2, 4)

問2

点Bのy座標は、 $y=x^2$ に $x=3$ を代入して、 $y=3^2=9$ よって、B(3, 9)

P(0, 6)より、直線BPの式は $y=mx+6$ とおける。点Bを通るから、 $x=3$, $y=9$ を代入して、 $9=m \times 3+6$ $m=1$ よって、 $y=x+6$

問3

点Aのy座標は、 $y=2x^2$ に $x=2$ を代入して、 $y=2 \times 2^2=8$ よって、A(2, 8)

同様に、点B、点Cの座標を求めると、B(3, 18), C(-1, 2)

$\triangle ABC$ と $\triangle ABP$ で、共通な辺ABをそれぞれの底辺とすると、面積が等しいとき高さも等しいから、

CP//AB 直線ABの傾きは $\frac{18-8}{3-2}=10$ で、平行な直線は傾きが等しいから、直線CPの傾きも10

点Pの座標を(0, p)とすると、直線CPの傾きは、 $\frac{p-2}{0-(-1)}=p-2$

よって、 $p-2=10$ より、 $p=12$

問4

点Aのy座標は、 $y=ax^2$ に $x=2$ を代入して、 $y=a \times 2^2=4a$ よって、A(2, 4a)

同様に、点Bの座標を求めると、B(3, 9a)

点Bとy軸について対称な点をB'とすると、B'(-3, 9a)

PB=PB'だから、AP+PBの長さが最短になるのは、AP+PB'の長さが最短になるとき。

また、AP+PB'の長さが最短になるのは、3点A, P, B'が一直線上に並ぶときだから、点Pは直線

AB'とy軸の交点になる。直線AB'の式を $y=rx+s$ とおくと、P(0, s) 傾きrは、 $\frac{4a-9a}{2-(-3)}=-a$

直線はA(2, 4a)を通るから、 $y=-ax+s$ に $x=2$, $y=4a$ を代入して、 $4a=-a \times 2+s$ $s=6a$

よって、P(0, 6a) 点Pのy座標は5だから、 $6a=5$ $a=\frac{5}{6}$

【問 21】

下の図 1 において、放物線①は関数 $y=ax^2$ のグラフであり、放物線②は関数 $y=x^2$ のグラフである。
また、点 A は放物線①上の点であり、点 A の座標は (2, 2) である。

このとき、次の問いに答えなさい。

(愛媛県 2019 年度)

図 1

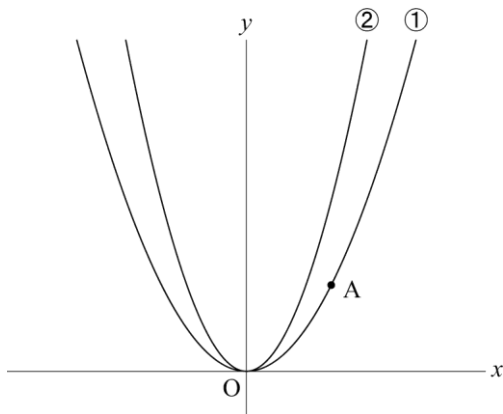
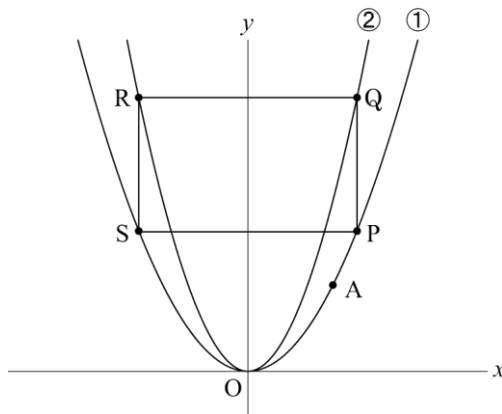


図 2



問 1 a の値を求めよ。

問 2 関数 $y=x^2$ について、 x の変域が $-5 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めよ。

問 3 下の図 2 において、点 P は放物線①上の $x > 0$ の範囲を動く点である。点 P を通り x 軸に垂直な直線と放物線②との交点を Q、点 Q を通り x 軸に平行な直線と②との交点のうち、点 Q と異なる点を R、点 R を通り x 軸に垂直な直線と放物線①との交点を S とし、四角形 PQRS をつくる。また、点 P の x 座標を t とする。

(1) 四角形 PQRS の周の長さを t を使って表せ。

(2) 四角形 PQRS の周の長さが 60 であるとき、

ア t の値を求めよ。

イ 点 A を通り、四角形 PQRS の面積を 2 等分する直線の傾きを求めよ。

解答欄

問 1	$a=$		
問 2			
問 3	(1)		
	(2)	ア	$t=$
		イ	

解答

問 1 $(a=)\frac{1}{2}$

問 2 $0 \leq y \leq 25$

問 3

(1) $t^2 + 4t$

(2)

ア $(t=)6$

イ $-\frac{25}{2}$

解説

問 1

A(2, 2)は放物線①上の点だから、 $y=ax^2$ に $x=2$, $y=2$ を代入して、 $2=a \times 2^2$ $a=\frac{1}{2}$

問 2

y の値は、 $x=0$ のとき最小値 0 をとり、 $x=-5$ のとき $y=5^2=25$ で、最大値 25 をとる。

よって、 $0 \leq y \leq 25$

問 3

(1)

四角形 PQRS は長方形になる。また、放物線は y 軸について対称だから、点 P の x 座標が t の

とき、4 点 P, Q, R, S の座標は、 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$, $Q(t, t^2)$, $R(-t, t^2)$, $S\left(-t, \frac{1}{2}t^2\right)$ と表される。

よって、 $PQ=t^2-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t^2$, $PS=t-(-t)=2t$ 長方形 PQRS の周の長さは、 $\left(\frac{1}{2}t^2+2t\right) \times 2=t^2+4t$

(2)

ア (1)の式を使って方程式をつくると、 $t^2+4t=60$ $t^2+4t-60=0$ $(t-6)(t+10)=0$ $t=6, -10$
 $t>0$ だから、 $t=-10$ は問題にあわない。 $t=6$ は問題にあう。

イ 長方形は、対角線の交点を中心とする点対称な図形だから、その面積を 2 等分する直線は、必ず対角線の交点を通る。4 点 P, Q, R, S の座標は、P(6, 18), Q(6, 36), R(-6, 36), S(-6, 18)

だから、対角線 PR, QS の交点を T とすると、T の x 座標は 0, y 座標は $18+\frac{36-18}{2}=27$

よって、求める直線は 2 点 A(2, 2), T(0, 27)を通るから、傾きは、 $\frac{2-27}{2-0}=-\frac{25}{2}$

【問 22】

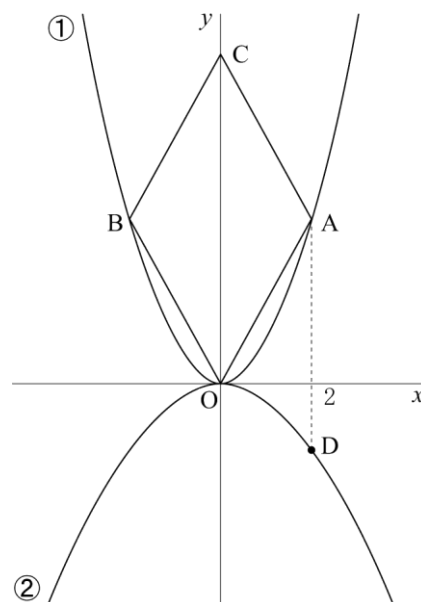
下の図において、①は関数 $y=x^2$ ，②は関数 $y=ax^2$ のグラフであり， $a<0$ である。点 A，B は①のグラフ上にあり，点 A の x 座標は 2 で，点 A と点 B の y 座標は等しい。点 C を y 軸上にとり，点 O と点 A，点 O と点 B，点 A と点 C，点 B と点 C をそれぞれ結んで，ひし形 OACB をつくる。また，②のグラフ上に，点 A と x 座標が等しい点 D をとる。このとき，次の問 1～問 3 に答えなさい。

(高知県 A 2019 年度)

問 1 点 C の座標を求めよ。

問 2 x 軸上に点(3, 0)をとる。点(3, 0)を通り，ひし形 OACB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

問 3 点 O と点 D を結んだ線分 OD を 1 辺とする正方形をつくる。この正方形とひし形 OACB の面積の比が 25 : 64 であるとき， a の値を求めよ。



解答欄

問 1	(,)
問 2	
問 3	$a=$

解答

問1 (0, 8)

問2 $y = -\frac{4}{3}x + 4$

問3 $a = -\frac{3}{8}$

解説

問1

点Aのy座標は、 $y = x^2$ に $x = 2$ を代入して、 $y = 2^2 = 4$ よって、A(2, 4)

点Bの座標はB(-2, 4)だから、線分ABとy軸の交点をEとすると、E(0, 4)

また、点Eはひし形OACBの対角線の交点でもある。ひし形の対角線は、それぞれの中点で交わるから、 $OC = 2OE = 2 \times 4 = 8$ よって、C(0, 8)

問2

ひし形の面積を2等分する直線は対角線の交点Eを通るから、直線の式は $y = ax + 4$ とおける。

点(3, 0)を通るから、 $x = 3$, $y = 0$ を代入して、 $0 = a \times 3 + 4$ $a = -\frac{4}{3}$ よって、 $y = -\frac{4}{3}x + 4$

問3

$AB = 2 - (-2) = 4$, $OC = 8$ だから、ひし形OACBの面積は、 $\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$

ODを1辺とする正方形の面積をSとすると、 $S : 16 = 25 : 64$ $64S = 16 \times 25$ $S = \frac{25}{4}$

よって、 $OD^2 = \frac{25}{4}$

また、点Dのy座標は、 $y = ax^2$ に $x = 2$ を代入して、 $y = 4a$ よって、D(2, 4a)

線分ADとx軸の交点をFとするとF(2, 0) $OF = 2$, $DF = 0 - 4a = -4a$

$\triangle ODF$ は $\angle F = 90^\circ$ の直角三角形だから、三平方の定理より、

$$OF^2 + DF^2 = OD^2 \quad 2^2 + (-4a)^2 = \frac{25}{4} \quad 4 + 16a^2 = \frac{25}{4} \quad 16a^2 = \frac{9}{4} \quad a^2 = \frac{9}{64} \quad a = \pm \frac{3}{8}$$

$a < 0$ だから、 $a = -\frac{3}{8}$

【問 23】

図 1, 図 2 のように, 関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり, 2 点 A, B の x 座標はそれぞれ $-1, 2$ である。原点を O として, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2019 年度)

問 1 点 B の y 座標を求めよ。

問 2 直線 AB の式を求めよ。

問 3 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

問 4 図 2 のように, 原点 O を通り直線 AB に平行な直線上に, x 座標が正である点 P をとる。四角形 OABP の面積が $\frac{11}{2}$ のとき, 点 P の x 座標を求めよ。

図 1

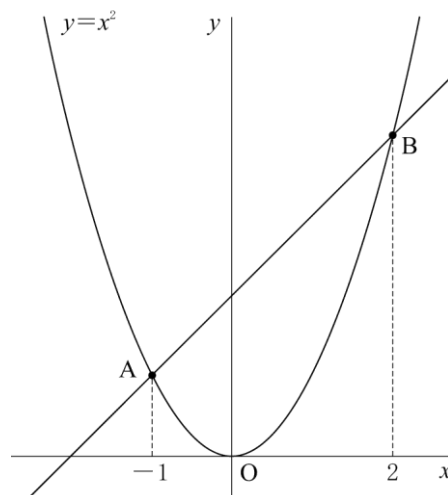
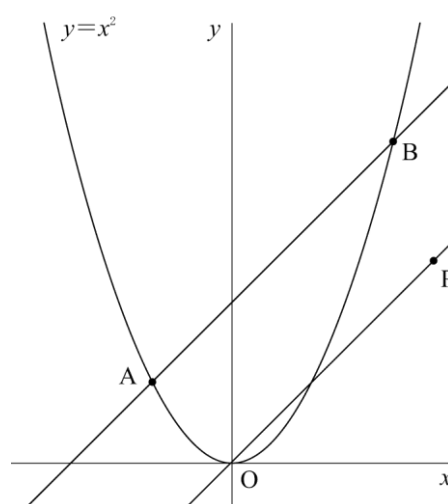


図 2



解答欄

問 1	
問 2	$y =$
問 3	
問 4	

解答

問 1 4

問 2 $y=x+2$

問 3 3

問 4 $\frac{5}{2}$

解説

問 1

$y=x^2$ に $x=2$ を代入して、 $y=2^2=4$

問 2

点 A の y 座標は、 $y=(-1)^2=1$ よって、 $A(-1, 1)$ また、問 1 より、 $B(2, 4)$

直線 AB の傾きは、 $\frac{4-1}{2-(-1)}=1$ したがって、直線 AB の式は $y=x+b$ とおける。

$A(-1, 1)$ を通るから、 $x=-1, y=1$ を代入して、 $1=-1+b$ $b=2$ よって、 $y=x+2$

問 3

直線 AB と y 軸の交点を C とすると、 $C(0, 2)$

また、 $\triangle OAB$ の面積は、 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ の面積の和に等しい。 $\triangle OAC$ 、 $\triangle OBC$ の底辺を OC とすると、高さはそれぞれ点 A、点 B の x 座標の絶対値だから、1 と 2

よって、 $\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 3$

問 4

四角形 OABP = $\triangle OAB + \triangle OBP$

問 3 より $\triangle OAB = 3$ だから、四角形 OABP の面積が $\frac{11}{2}$ のとき、 $\triangle$

$OBP = \frac{11}{2} - 3 = \frac{5}{2}$

$\triangle OAB$ と $\triangle OBP$ は、それぞれ AB、OP を底辺としたとき、 $AB \parallel OP$ より高さが等しいから、面積の比は AB と OP の長さの比になる。

よって、 $AB : OP = 3 : \frac{5}{2}$

ここで、右の図のように、点 B から x 軸にひいた垂線に、点 A から垂線 AH をひいて $\triangle ABH$ をつくる。また、点 P から x 軸に垂線 PI をひいて $\triangle OPI$ をつくる。

$\triangle ABH$ と $\triangle OPI$ で、 $\angle AHB = \angle OIP = 90^\circ$

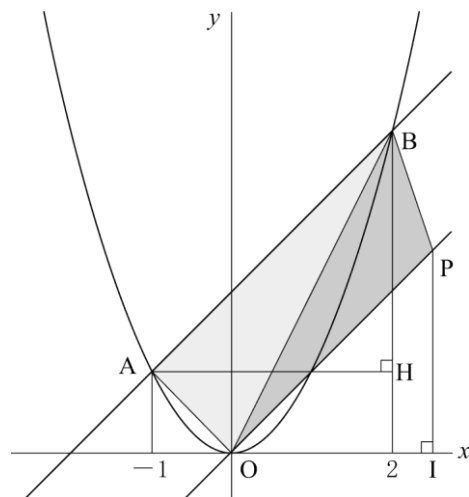
2 直線 AB、OP は傾きが等しいから、 $\angle BAH = \angle POI$

2 組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABH \sim \triangle OPI$

よって、 $AB : OP = AH : OI$ が成り立つから、

$AH : OI = 3 : \frac{5}{2}$

$AH = 2 - (-1) = 3$ だから、 $OI = \frac{5}{2}$ したがって、点 P の x 座標は $\frac{5}{2}$



【問 24】

図 1，図 2 のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B が
あり，2 点 A，B の x 座標はそれぞれ -2 ， 4 である。原点を O と
して，次の問いに答えなさい。

(長崎県 2019 年度)

問 1 点 A の y 座標を求めよ。

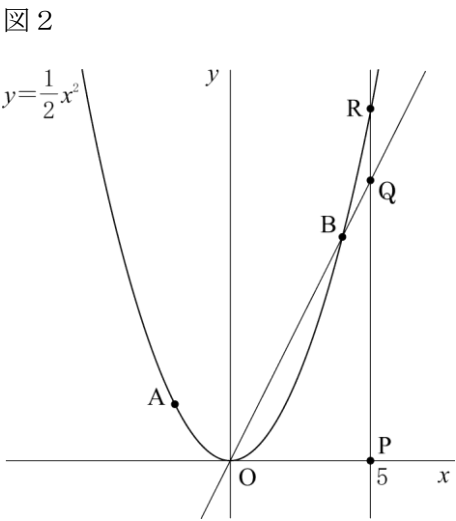
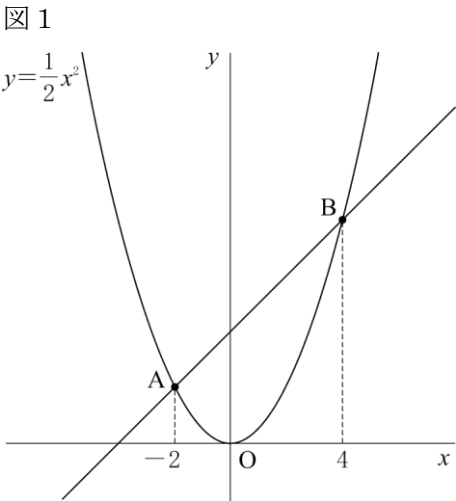
問 2 直線 AB の式を求めよ。

問 3 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について， x の変域が $-2\leq x\leq 4$ のときの
 y の変域を求めよ。

問 4 x 軸上を動く点 P がある。点 P を通り y 軸に平行な直線
と直線 OB，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフとの交点をそれぞれ
点 Q，R とする。このとき，次の (1)，(2) に答えよ。

(1) 図 2 のように，点 P の x 座標が 5 であるとき，線分
PQ と線分 QR の長さの比を最も簡単な整数の比で表
せ。

(2) 線分 PQ の長さが線分 QR の長さの 5 倍になるとき，点 P の x 座標をすべて求めよ。ただし，
点 P の x 座標は正とする。



解答欄

問 1		
問 2	$y=$	
問 3	$\leq y \leq$	
問 4	(1)	$PQ : QR =$:
	(2)	

解答

問 1 2

問 2 $y=x+4$

問 3 $0 \leq y \leq 8$

問 4

(1) $PQ : QR = 4 : 1$

(2) $\frac{16}{5}, \frac{24}{5}$

解説

問 1

$y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = -2$ を代入して、 $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$

問 2

点 B の y 座標は、 $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ よって、 $B(4, 8)$ また、問 1 より、 $A(-2, 2)$

直線 AB の傾きは、 $\frac{8-2}{4-(-2)} = 1$ したがって、直線 AB の式は $y = x + b$ とおける。

$A(-2, 2)$ を通るから、 $x = -2, y = 2$ を代入して、 $2 = -2 + b$ $b = 4$ よって、 $y = x + 4$

問 3

y の値は、 $x = 0$ のとき最小値 0 をとる。また、 $x = 4$ のとき最大値 8 をとる。

よって、 y の変域は、 $0 \leq y \leq 8$

問 4

(1)

直線 OB の式を $y = ax$ とする。 $B(4, 8)$ を通るから、 $x = 4, y = 8$ を代入して、 $8 = a \times 4$ $a = 2$

よって、 $y = 2x$ 点 Q の y 座標は、 $y = 2x$ に $x = 5$ を代入して、 $y = 2 \times 5 = 10$

また、点 R の y 座標は、 $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = 5$ を代入して、 $y = \frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{25}{2}$

$P(5, 0), Q(5, 10), R\left(5, \frac{25}{2}\right)$ より、 $PQ : QR = 10 : \left(\frac{25}{2} - 10\right) = 10 : \frac{5}{2} = 20 : 5 = 4 : 1$

(2)

点 P の x 座標を t とすると、 $P(t, 0), Q(t, 2t), R\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ よって、 $PQ = 2t$

また、 $B(4, 8)$ は $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 OB の交点だから、 $0 < t < 4$ のとき点 Q の y 座標は点 R の y 座標より

大きく、 $t > 4$ のとき点 R の y 座標は点 Q の y 座標より大きい。よって、 $0 < t < 4$ のときと $t > 4$ のときに分けて、 $PQ = 5QR$ となる t の値を求めればよい。

・ $0 < t < 4$ のとき $QR = 2t - \frac{1}{2}t^2$ だから、 $2t = 5\left(2t - \frac{1}{2}t^2\right)$ これを整理すると、 $5t^2 - 16t = 0$

$t(5t - 16) = 0$ $t = 0, \frac{16}{5}$ $0 < t < 4$ だから、 $t = 0$ は条件にあわない。 $t = \frac{16}{5}$ は条件にあう。

・ $t > 4$ のとき $QR = \frac{1}{2}t^2 - 2t$ だから、 $2t = 5\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t\right)$ これを整理すると、 $5t^2 - 24t = 0$

$t(5t - 24) = 0$ $t = 0, \frac{24}{5}$ $t > 4$ だから、 $t = 0$ は条件にあわない。 $t = \frac{24}{5}$ は条件にあう。

【問 25】

右の図のように，2つの関数

$$y = -\frac{1}{3}x^2 \dots\dots \textcircled{\mathcal{P}}$$

$$y = ax^2 \text{ (} a \text{ は定数)} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

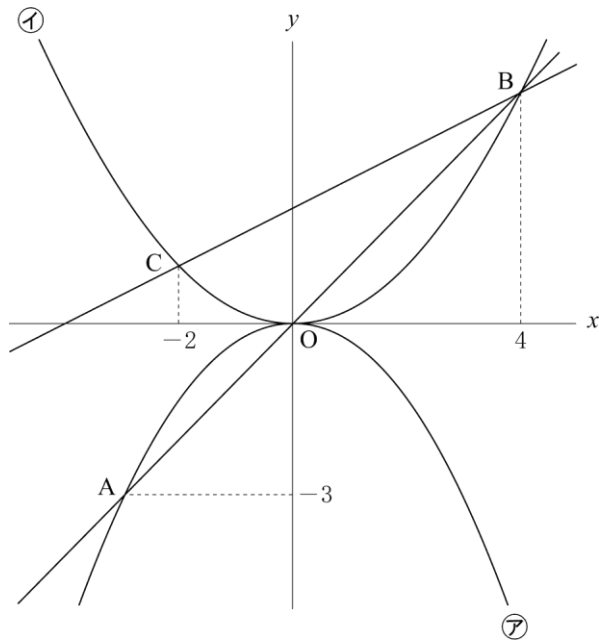
のグラフがある。

点 A は関数⑦のグラフ上にあり、A の y 座標は -3 で、A の x 座標は負である。2 点 B, C は関数①のグラフ上にあり、B の x 座標は 4 、C の x 座標は -2 である。また、直線 AB は原点 O を通る。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2019 年度)

問1 a の値を求めなさい。



問2 直線 BC の式を求めなさい。

問3 線分 BC 上に 2 点 B, C とは異なる点 P を, $\triangle OPC$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{3}$ となるようにとるとき,

(1) 点 P の座標を求めなさい。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と関数②のグラフとの交点を Q とする。四角形 AQBC の面積は、 $\triangle OPC$ の面積の何倍であるか、求めなさい。

解答欄

問 1	$a =$	
問 2	$y =$	
問 3	(1)	(,)
	(2)	倍

解答

問 1 $a = \frac{1}{4}$

問 2 $y = \frac{1}{2}x + 2$

問 3

(1) $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$

(2) $\frac{21}{4}$ 倍

解説

問 1

点 A の x 座標は、 $y = -\frac{1}{3}x^2$ に $y = -3$ を代入して、 $-3 = -\frac{1}{3}x^2$ $x^2 = 9$ $x = \pm 3$

$x < 0$ だから、 $x = -3$ よって、 $A(-3, -3)$ 直線 AO の式は $y = x$ だから、点 B の y 座標は 4

よって、 $B(4, 4)$ $y = ax^2$ に $x = 4$, $y = 4$ を代入して、 $4 = a \times 4^2$ $a = \frac{1}{4}$

問 2

点 C の y 座標は、 $y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$ $C(-2, 1)$, $B(4, 4)$ だから、直線 BC の傾きは、 $\frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$

よって、直線 BC の式は $y = \frac{1}{2}x + b$ とおける。 $B(4, 4)$ を通るから、 $x = 4$, $y = 4$ を代入して、

$4 = \frac{1}{2} \times 4 + b$ $b = 2$ よって、直線 BC の式は $y = \frac{1}{2}x + 2$

問 3

(1)

点 A を通り y 軸に平行な直線と、点 B を通り x 軸に平行な直線との交点を D とする。

$A(-3, -3)$, $B(4, 4)$, $C(-2, 1)$, $D(-3, 4)$ で、

$AD = 4 - (-3) = 7$, $DB = 4 - (-3) = 7$ だから、

$\triangle ABC = \triangle ABD - \triangle ACD - \triangle DCB$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 - \frac{1}{2} \times 7 \times 1 - \frac{1}{2} \times 7 \times 3 = \frac{21}{2}$$

$$\text{よって、} \triangle OPC = \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{1}{3} \times \frac{21}{2} = \frac{7}{2}$$

直線 BC と y 軸の交点を E とすると、問 2 より $E(0, 2)$

点 P の x 座標を t とすると、

$$\triangle OPC = \triangle OPE + \triangle OCE \text{ で、} \triangle OCE = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$\text{よって、} \triangle OPE = \triangle OPC - \triangle OCE = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times t = \frac{3}{2} \quad t = \frac{3}{2}$$

y 座標は、直線 BC の式 $y = \frac{1}{2}x + 2$ に $x = \frac{3}{2}$ を代入して、 $y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 2 = \frac{11}{4}$ よって、 $P(\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$

別解

$A(-3, -3)$, $B(4, 4)$, $C(-2, 1)$ より、 $OA : OB = 3 : 4$ よって、 $\triangle OBC = \frac{4}{7} \triangle ABC$

$\triangle OPB = \triangle OBC - \triangle OCP = \frac{4}{7} \triangle ABC - \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{5}{21} \triangle ABC$ よって、 $CP : PB = \frac{1}{3} : \frac{5}{21} = 7 : 5$ 点 B, C の

x 座標の差が $4 - (-2) = 6$ だから、 $6 \times \frac{7}{7+5} = \frac{7}{2}$ より、点 P の x 座標 $t = -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$ y 座標は、直線 BC の

式 $y = \frac{1}{2}x + 2$ に $x = \frac{3}{2}$ を代入して、 $y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 2 = \frac{11}{4}$ よって、 $P(\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$

(2)

点 Q の y 座標は、 $y = -\frac{1}{3} \times (\frac{3}{2})^2 = -\frac{3}{4}$ よって、 $Q(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$

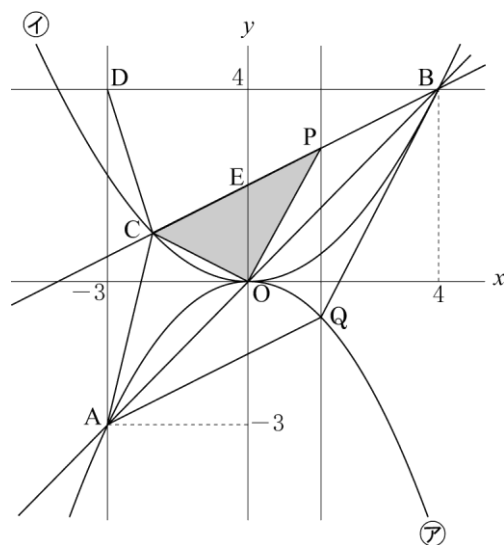
線分 AQ の傾きは、 $\left\{ -\frac{3}{4} - (-3) \right\} \div \left\{ \frac{3}{2} - (-3) \right\} = \frac{9}{4} \div \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ したがって、 $AQ \parallel BC$

$\triangle ABC$ と $\triangle BAQ$ は、それぞれ CB, AQ を底辺としたときの高さが等しいから、

$\triangle ABC : \triangle BAQ = CB : AQ$ ここで、 $B(4, 4)$, $C(-2, 1)$, $Q(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$, $A(-3, -3)$ より、

$CB : AQ = \{4 - (-2)\} : \left\{ \frac{3}{2} - (-3) \right\} = 6 : \frac{9}{2} = 12 : 9 = 4 : 3$ よって、 $\triangle BAQ = \frac{3}{4} \triangle ABC$ だから、

$$\text{四角形 AQBC} = \triangle ABC + \triangle BAQ = \triangle ABC + \frac{3}{4} \triangle ABC = \frac{7}{4} \triangle ABC = \frac{7}{4} \times 3 \triangle OPC = \frac{21}{4} \triangle OPC$$



【問 26】

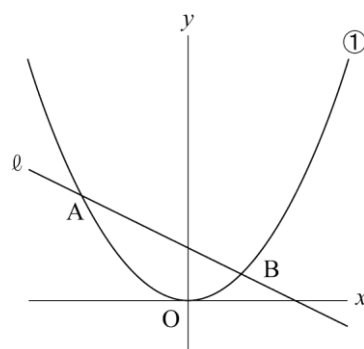
図 1 のように、関数 $y=ax^2\cdots$ ① のグラフと直線 ℓ が 2 点 A, B で交わっている。点 A の座標は $(-2, 2)$ 、点 B の x 座標は 1 である。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(宮崎県 2019 年度)

問 1 a の値を求めなさい。

図 1



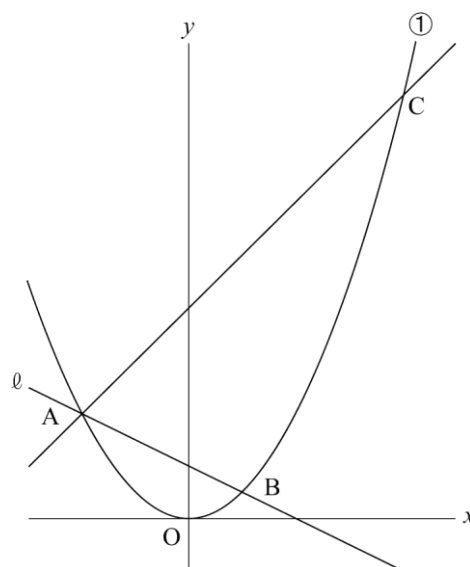
問 2 直線 ℓ の式を求めなさい。

図 2

問 3 図 2 は、図 1 において、関数①のグラフ上に点 C をとり、2 点 A, C を通る直線をひいたものである。点 C の x 座標は自然数で、線分 AC 上の点で x 座標が整数となる点の個数は 7 個である。

このとき、次の (1), (2) の問いに答えなさい。

(1) 点 C の座標を求めなさい。



(2) 直線 ℓ と直線 OC の交点を P とするとき、 $\triangle AOP$ と $\triangle PBC$ の面積の比を、最も簡単な整数の比で答えなさい。

解答欄

問 1	$a =$	
問 2		
問 3	(1)	(,)
	(2)	$\triangle AOP : \triangle PBC =$:

解答

問 1 $a = \frac{1}{2}$

問 2 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

問 3

(1) (4, 8)

(2) $\triangle AOP : \triangle PBC = 4 : 9$

解説

問 1

$y = ax^2$ に $x = -2$, $y = 2$ を代入して, $2 = a \times (-2)^2$ $2 = 4a$ $a = \frac{1}{2}$

問 2

問 1 より, 関数①の式は $y = \frac{1}{2}x^2$ だから, 点 B の y 座標は, $y = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$ となり, $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$

直線 l の傾きは, $\left(\frac{1}{2} - 2\right) \div \{1 - (-2)\} = \left(-\frac{3}{2}\right) \div 3 = -\frac{1}{2}$ 求める直線の式を $y = -\frac{1}{2}x + b$ として,

$x = -2$, $y = 2$ を代入すると, $2 = -\frac{1}{2} \times (-2) + b$ $b = 1$ よって, 直線 l の式は $y = -\frac{1}{2}x + 1$

問 3

(1)

線分 AC 上にあり, x 座標が整数である点について, x 座標が -2 である点 A を 1 個目とすると, 2 個目の点の x 座標は -1 , 3 個目の点の x 座標は 0 , $\dots$, 7 個目の点の x 座標は 4 となる。

よって, 点 C の x 座標は 4 , 点 C の y 座標は $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ だから, $C(4, 8)$

(2)

問 2 より, 直線 l の式は $y = -\frac{1}{2}x + 1 \dots \textcircled{1}$, 問 3 (1) より, 点 C の座標は $(4, 8)$ だから, 直線 OC の式は $y =$

$2x \dots \textcircled{2}$ ①, ②を連立方程式として解くと $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ だから, 点 P の座標は $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

よって, $AP : PB = \left\{\frac{2}{5} - (-2)\right\} : \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{12}{5} : \frac{3}{5} = 4 : 1$ よって, $\triangle OBP : \triangle AOP = 1 : 4 \dots \textcircled{3}$

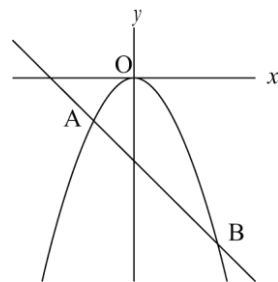
$OP : PC = \frac{2}{5} : \left(4 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} : \frac{18}{5} = 1 : 9$ よって, $\triangle OBP : \triangle PBC = 1 : 9 \dots \textcircled{4}$

③, ④より, $\triangle AOP : \triangle PBC = 4 : 9$

【問 27】

右の図のように、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、A, B の x 座標はそれぞれ -2 , 4 である。直線 AB 上に点 P があり、直線 OP が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分しているとき、点 P の座標を求めよ。

(鹿児島県 2019 年度)



解答欄

P(,)

解答

P(1, -5)

解説

点 A の y 座標は、 $y = -\frac{1}{2} \times (-2)^2 = -2$ 点 B の y 座標は、 $y = -\frac{1}{2} \times 4^2 = -8$

よって、A(-2 , -2), B(4 , -8)

直線 OP が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分するとき、点 P は辺 AB の中点になる。

ここで、点 B を通り x 軸に平行な直線に、点 A から垂線 AC をひいて直角三角形 ACB をつくと、点 C の座標は(-2 , -8) よって、 $BC = 4 - (-2) = 6$ $AC = -2 - (-8) = 6$

点 P から辺 BC に垂線 PH をひくと、 $PH \parallel AC$ より、 $BH : HC = BP : PA = 1 : 1$

よって、点 H は辺 BC の中点で、 $BH = BC \div 2 = 6 \div 2 = 3$ だから、点 H の x 座標は、点 B の x 座標より 3 小さく、 $4 - 3 = 1$ したがって、点 P の x 座標も 1

また、点 P から辺 AC に垂線 PI をひくと、 $PI \parallel BC$ より、 $AI : IC = AP : PB = 1 : 1$

よって、点 I は辺 AC の中点で、 $AI = AC \div 2 = 6 \div 2 = 3$ だから、点 I の y 座標は、点 A の y 座標より 3 小さく、 $-2 - 3 = -5$ したがって、点 P の y 座標も -5

以上より、点 P の座標は(1, -5)

【問 28】

関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の座標は $(-2, 2)$, 点 B の x 座標は 6 である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2019 年度)

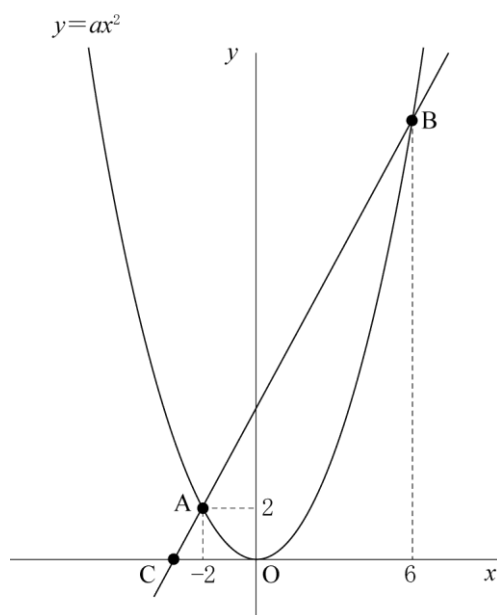
問 1 a の値を求めなさい。

問 2 点 B の y 座標を求めなさい。

問 3 直線 AB の式を求めなさい。

問 4 直線 AB と x 軸との交点を C とする。線分 AB 上に点 P をとると、 $\triangle COP$ の面積は $\triangle AOB$ の面積と等しくなった。

このとき、点 P の座標を求めなさい。



解答欄

問 1	$a =$
問 2	B (6 ,)
問 3	$y =$
問 4	P (,)

解答

問 1 $a = \frac{1}{2}$

問 2 B(6, 18)

問 3 $y = 2x + 6$

問 4 P(5, 16)

解説

問 1

$y = ax^2$ に $x = -2$, $y = 2$ を代入すると $4a = 2$ $a = \frac{1}{2}$

問 2

$y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = 6$ を代入すると $y = 18$

問 3

直線 AB の傾きは $\frac{18-2}{6-(-2)} = 2$ 直線 AB の式を $y = 2x + b$ とおいて $x = -2$, $y = 2$ を代入すると

$2 = 2 \times (-2) + b$ $b = 6$ よって, $y = 2x + 6$

問 4

点 C の x 座標は $0 = 2x + 6$, $x = -3$ $\triangle AOB = \frac{1}{2} \times 6 \times (6+2) = 24$ 点 P の y 座標を y とおくと,

$\triangle COP = \triangle AOB$ より, $\triangle COP = \frac{1}{2} \times 3 \times y = 24$ $\frac{3}{2}y = 24$ $y = 16$ $y = 16$ を $y = 2x + 6$ に代入すると

$16 = 2x + 6$ $2x = 10$ $x = 5$ よって, 点 P の座標は (5, 16)