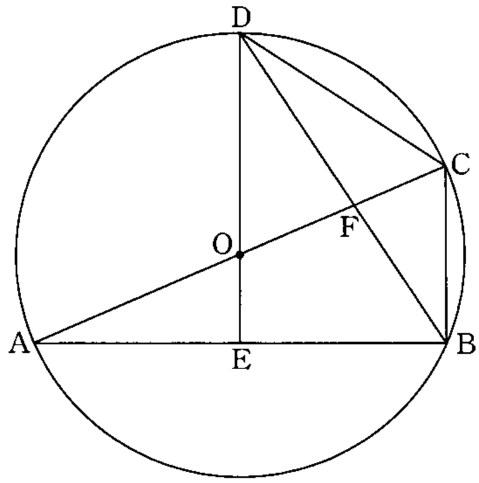
4．相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2004 年度出題】

【問 1】

右の図で，4 点 A，B，C，D は円 O の周上にあり，線分 AC は円 O の直径である。線分 DO を延長した直線と線分 AB の交点が E であり，AB⊥DE である。線分 AC と線分 BD の交点を F とする。

（秋田県　2004 年度）



① 図の中から相似である三角形の組を **2 組**書きなさい。

② OA ＝ 3cm，DE ＝ 4cm のとき，DF：FB を求めなさい。

解答欄

①	
②	:

解答

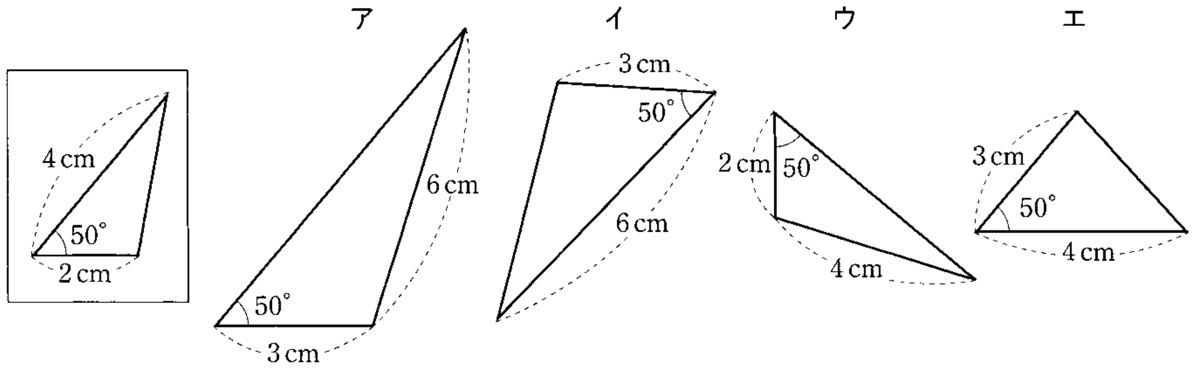
① △ABF∽△DCF，△AOE∽△ACB，△BCF∽△DOF　などから 2 組選ぶ。

② 3：2

【問 2】

下の図で，□内の三角形と相似な三角形は，ア～エのうちどれか。あてはまるものを 1 つ選び，記号で答えなさい。

（福島県　2004 年度）



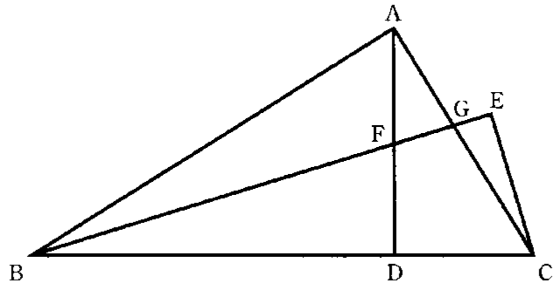
解答欄

解答
イ

【問 3】

図のように，∠BAC＝90°の直角三角形 ABC がある。頂点 A から辺 BC に垂線をひき，辺 BC との交点を D とする。また，頂点 C から∠ABC の二等分線に垂線をひき，∠ABC の二等分線との交点を E とする。さらに，線分 BE と線分 AD との交点を F，線分 BE と線分 AC との交点を G とする。

このとき，△FBD∽△GCE であることを証明しなさい。



（茨城県　2004 年度）

解答欄

証明

解答

（証明）

△FBD と△GCE において

∠FDB＝∠GEC＝90°…①

∠BFD＝90°－∠FBD

∠BGA＝90°－∠GBA

仮定より∠FBD＝∠GBA だから

∠BFD＝∠BGA…②

対頂角より∠BGA＝∠CGE…③

②，③より∠BFD＝∠CGE…④

①，④より

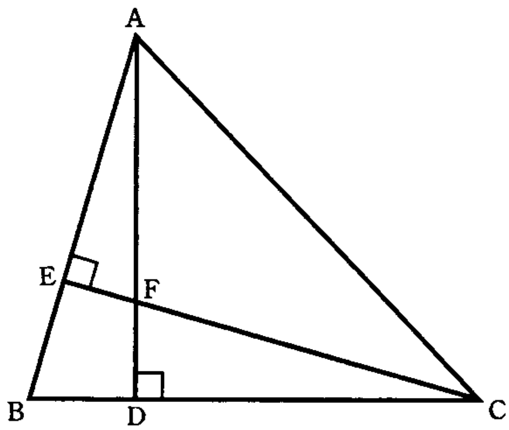
2 組の角がそれぞれ等しいので

△FBD∽△GCE

【問 4】

右の図のように，△ABC の 2 点 A，C から辺 BC，AB にそれぞれ垂線 AD，CE をひく。AD，CE の交点を F とするとき，△ABD ∽ △CFD であることを証明しなさい。

（栃木県　2004 年度）



解答欄

証明

解答
△ABD と△CFD において
仮定より
∠ADB＝∠CDF＝90° …①
また△ABD と△CBE は直角三角形だから
∠BAD＝90° －∠ABD
∠BCE＝90° －∠CBE
∠ABD＝∠CBE より
∠BAD＝∠BCE＝∠FCD‥②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△CFD

【問 5】

右の図１で，△ABCはAB＝AC，∠BACが鋭角の二等辺三角形である。∠BACの二等分線と辺BCとの交点をDとする。

次の各問に答えよ。

（東京都　2004 年度）

〔問 1〕右の図 2 は，図 1 において，頂点Bから辺ACにひいた垂線と，辺ACとの交点をEとした場合を表している。

次の①，②に答えよ。

① ∠BAD＝a°とするとき，∠ABEの大きさを a を用いた式で表せ。

② △ABD∽△BCEであることを証明せよ。

〔問 2〕右の図 3 は，図 1 において，辺ACの中点をFとし，頂点Bと点Fを結んだ場合を表している。

AB＝6 cm，BC＝4 cm のとき，線分BFの長さは何 cm か。

ただし，答えに根号がふくまれるときは，根号をつけたままで表せ。

図 1

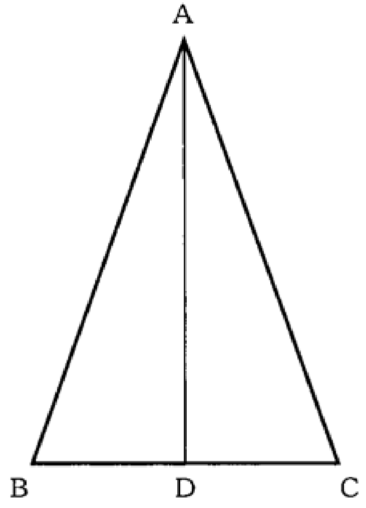


図 2

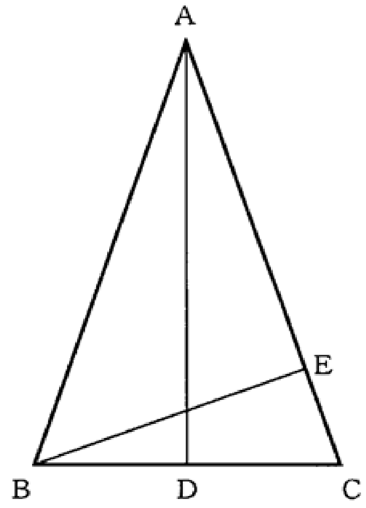
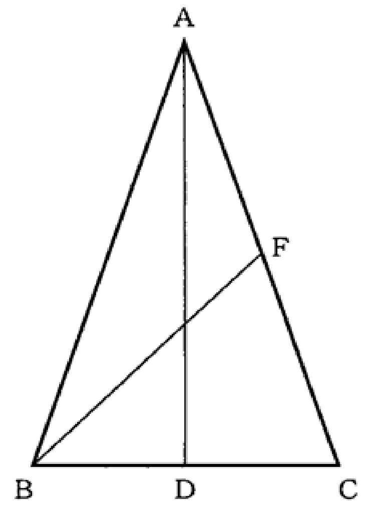


図 3



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">〔問1〕</td><td>①</td><td>度</td></tr>
<tr><td>②</td><td>〔証明〕
△ABDと△BCEにおいて，

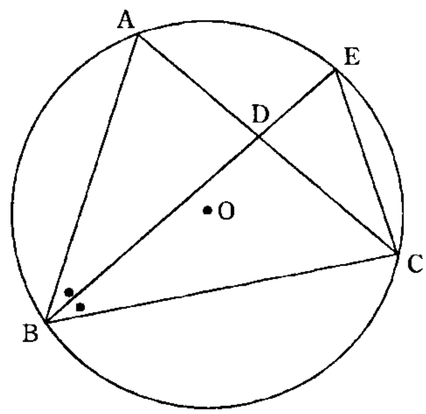
△ABD∽△BCE</td></tr>
<tr><td>〔問2〕</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

解答
〔問1〕
① $90-2a$ 度
②
〔証明〕
△ABD と△BCE において
二等辺三角形 ABC の頂角の二等分線は底辺 BC と垂直に交わるから∠BDA＝90°
仮定から∠CEB＝90°
よって∠BDA＝∠CEB…①
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから
∠ABD＝∠BCE…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△BCE
〔問2〕
$\sqrt{17}$ cm
解説
〔問1〕
①
∠BAD＝∠EAD＝a° より∠BAC＝$2a$°
∠AEB＝90° より∠ABE＝180°－90°－$2a$°
＝90°－$2a$°
〔問2〕
中点連結定理より
AB∥FD
$FD=6\times\frac{1}{2}=3$
$AD^2=6^2-2^2=32$
$AD=4\sqrt{2}$
F より BC に垂線 FG をひくと
△FDG∽△ABD より
$3:FG=6:4\sqrt{2}$
$FG=2\sqrt{2}$
また同様に DG＝1
△BFG で
三平方の定理より
$BF^2=(2+1)^2+(2\sqrt{2})^2=9+8=17$
$BF=\sqrt{17}$ cm

【問 6】

右の図のように，円 O の周上の点 A, B, C を結んでできる△ABC がある。∠ABC の二等分線と辺 AC，円 O との交点をそれぞれ D，E とする。

（富山県　2004 年度）



① △DCE に相似な三角形を，△DCE 以外に 2 つあげなさい。

② BE＝16cm，DE＝4cm とするとき，CE の長さを求めなさい。

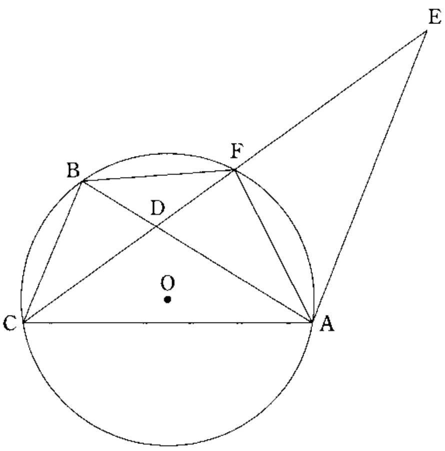
解答欄

①	△DCE ∽ △
	△DCE ∽ △
②	CE＝　　　　　　cm

解答
① △DCE∽△DBA　△DCE∽△CBE
② CE＝8cm
解説
①
∠DCE＝∠DBA，∠DEC＝∠DAB より△DCE∽△DBA
∠DCE＝∠CBE，∠DEC＝∠CEB より△DCE∽△CBE
②
△DCE∽△CBE より
CE : 16＝4 : CE
$CE^2＝64$
CE＞0 より
CE＝8cm

【問 7】

右の図のように，円 O の周上の 3 点 A, B, C を頂点とする鋭角三角形 ABC をつくる。辺 AB 上に点 D をとり，点 A を通り辺 BC に平行な直線と直線 CD との交点を E，CE と円周との交点を F とし，A と F，B と F を結ぶ。



このとき，次の問いに答えよ。

（福井県　2004 年度）

(1) ア　△AEC と相似な三角形を答えよ。

△AEC　∽　△

イ　アの答を証明せよ。

(証明)

(2) AB＝AC＝6cm，CF＝5cm，∠ACD＝∠BCD のとき，

ア　AF の長さを求めよ。

イ　△AFC の面積を求めよ。

解答欄

(1)	ア	△
	イ	(証明)
(2)	ア	cm
	イ	cm^2

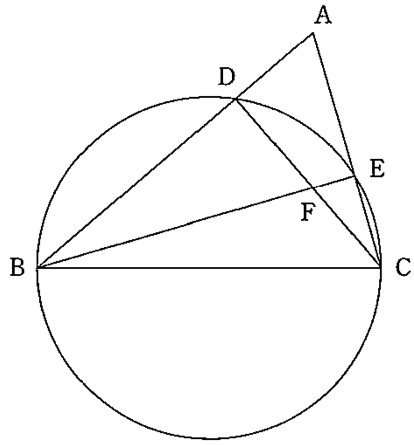
解答
(1)
ア
△AEC∽△FAB
イ
（証明）
△AECと△FABにおいて
AE//BCより錯角は等しいので
∠AEC＝∠BCF…①
弧BFの円周角は等しいので
∠FAB＝∠BCF…②
①，②より
∠AEC＝∠FAB…③
また弧AFの円周角は等しいので
∠ACE＝∠FBA…④
③，④より
2組の角がそれぞれ等しいので
△AEC∽△FAB
(2)
ア　4cm
イ　$\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm^2
解説
(2)
ア
∠ACD＝∠BCD＝a°とおくとAB＝ACより∠ABC＝∠ACB＝2a°
弧ACに対する円周角より∠AFC＝∠ABC＝2a°
また
∠AEC＝∠BCD＝a°
∠AEC＝∠ACFとなり
AE＝AC＝6cm
△AEFにおいて
∠FAE＝∠AFC－∠AEF＝2a°－a°＝a°
よって∠AEF＝∠FAEとなるので
AF＝EF
ここでAF＝EF＝x cmとおくと
△AEC∽△FABより
EA:AF＝EC:AB
$6:x=(x+5):6$
これを整理すると
$x^2+5x-36=0$
$(x+9)(x-4)=0$
$x>0$より
$x=4$
よってAF＝4cm
イ
FからACへ垂線FHをひく。
CH＝t cmとおくとAH＝6－t cm
△FCHで三平方の定理より$FH^2=5^2-t^2=25-t^2$
△FAHで三平方の定理より$FH^2=4^2-(6-t)^2=-20+12t-t^2$
よって$25-t^2=-20+12t-t^2$　これを解いて$t=\frac{15}{4}$
$FH=\sqrt{25-\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$　したがって△AFC$=6\times\frac{5\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm^2

【問 8】

図のように，△ABC とその辺 BC を直径とする円がある。この円と辺 AB，AC とは，それぞれ点 D，E で交わっていて，AD＝1 cm，DB＝AC＝2 cm である。CD と BE の交点を F とするとき，次の各問いに答えなさい。

ただし，答えに $\sqrt{}$ をふくむ場合は，分母に $\sqrt{}$ をふくまない形で答えなさい。また，$\sqrt{}$ の中は，最も小さな自然数となる形で答えなさい。

（長野県　2004 年度）



⑴ △ACD∽△FBD を証明しなさい。

⑵ CD の長さを求めなさい。

⑶ BE の長さを求めなさい。

⑷ △BCF の面積を求めなさい。

解答欄

⑴	証明
⑵	cm
⑶	cm
⑷	cm^2

解答

(1)

［証明］

△ACD と△FBD において

BC は直径だから

$\angle$BDC＝90°

よって

$\angle$ADC＝$\angle$FDB＝90° …①

また$\angle$ECD と$\angle$EBD は $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ に対する円周角で等しいから

$\angle$ACD＝$\angle$FBD…②

①, ②から

2 組の角がそれぞれ等しいので

△ACD∽△FBD

(2) $\sqrt{3}$ cm

(3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm²

解説

(3)

△ABE∽△ACD より

BE:AB＝CD:AC

BE:3＝$\sqrt{3}$:2

BE＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

(4)

△ACD∽△FBD より

CD:BD＝DA:DF

$\sqrt{3}$:2＝1:DF

DF＝$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm

また CF＝CD－DF＝$\sqrt{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm

$\angle$BDC＝90° だから

△BCF＝$\dfrac{1}{2}\times$CF$\times$BD＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm²

【問 9】

2つの線分 AB と CD が点 O で交わっていて，AO＝2CO，DO＝2BO ならば，△AOD∽△COB であることを証明したい。 ア ， イ をうめて証明を完成せよ。

（愛知県 2004 年度 A）

（証明） △AOD と△COB で，AO＝2CO，DO＝2BO から，

AO：CO＝2：1， ア

よって，AO：CO＝DO：BO …①

また，対頂角は等しいから，

イ …②

①，②から，2組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，

△AOD∽△COB

解答欄

ア	
イ	

解答

ア DO：BO＝2：1

イ ∠AOD＝∠COB

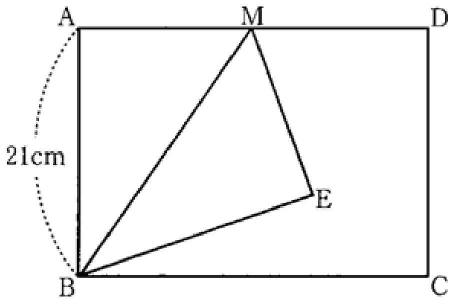
【問 10】

私たちの身のまわりには，教科書，ノート，コピー用紙など，隣り合う 2 辺の長さの比が $1:\sqrt{2}$ である長方形の紙を用いたものがたくさんある。

図 I において，四角形 ABCD は AB:AD＝$1:\sqrt{2}$，AB＝21cm の長方形である。M は辺 AD の中点である。M と B とを結ぶ。△MBE は，△MBA を直線 MB を軸として折り返してできる三角形である。このとき，E は長方形 ABCD の内部の点である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

図 I



（大阪府 2004 年度 後期）

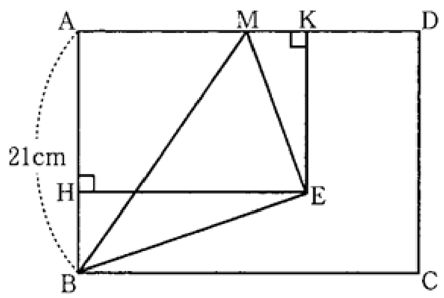
(1) 線分 ME の長さを求めなさい。

(2) 解答欄の図の長方形 ABCD は，図 I で示した長方形 ABCD と同じものとする。△MBE を定規とコンパスを使って解答欄の図中に作図しなさい。作図の方法がわかるように，作図に用いた線は残しておくこと。

(3) E から辺 AB にひいた垂線と辺 AB との交点を H とし，E から辺 AD にひいた垂線と辺 AD との交点を K とする。図Ⅱは，図 I に点 H，K と線分 HE，KE をかき加えたものである。

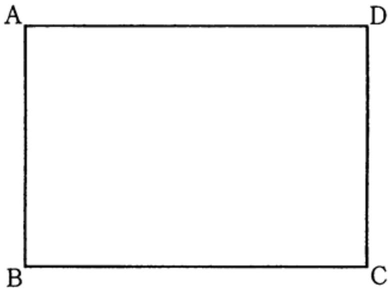
① △BEH∽△MEK であることを証明しなさい。

図Ⅱ



② 線分 AH の長さは辺 AB の長さの何倍ですか。また，線分 AK の長さは辺 AD の長さの何倍ですか。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td>①</td><td>(証明)</td></tr>
<tr><td>②</td><td>(求め方)

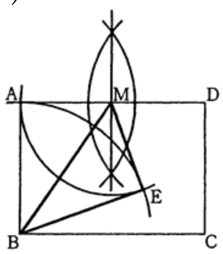
AH は AB の　　　　倍

AK は AD の　　　　倍</td></tr>
</table>

解答

(1) $\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$ cm

(2)



(3)

①

（証明）

△BEH と△MEK において

EH⊥AB，EK⊥AD だから

∠BHE＝90°＝∠MKE…㋐

△MBE は△MBA を直線 MB を軸として折り返してできる三角形であるから

∠MEB＝∠MAB＝90°

よって∠BEH＝90°－∠HEM…㋑

四角形 AHEK は長方形だから∠KEH＝90°

よって∠MEK＝90°－∠HEM…㋒

㋑，㋒より

∠BEH＝∠MEK…㋓

㋐，㋓より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△BEH∽△MEK

②

（求め方）

BE:ME＝$\sqrt{2}$:1 だから△BEH と△MEK の相似比は$\sqrt{2}$:1 である。

AH＝x cm とすると AK＝HE＝$\sqrt{2}\,x$ cm，HB＝AB－AH＝21－x cm，BE＝21cm であり

∠BHE＝90° だから $HB^2+HE^2=BE^2$ より$(21-x)^2+(\sqrt{2}\,x)^2=21^2$

これを解くと $0<x<21$ より $x=14$

だから AH＝14cm，AK＝14$\sqrt{2}$ cm

AB＝21cm，AD＝21$\sqrt{2}$ cm だから，AH，AK はそれぞれ AB，AD の$\dfrac{2}{3}$倍である。

AH は AB の$\dfrac{2}{3}$倍

AK は AD の$\dfrac{2}{3}$倍

解説

(1)

AB:AD＝1:$\sqrt{2}$ より

AD＝$21\sqrt{2}$

M は辺 AD の中点であるから AM＝$\dfrac{1}{2}$AD＝$\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$

△MBE は△MBA を直線 MB を軸として折り返してできる三角形であるから

△ABM≡△EBM

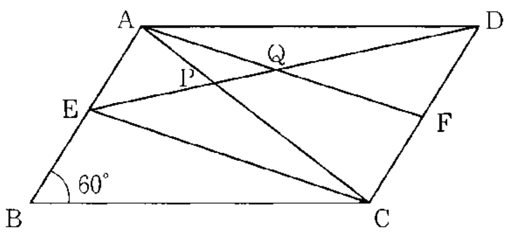
よって ME＝AM＝$\dfrac{21\sqrt{2}}{2}$ cm

【問 11】

図のように，AB ＝ 4 cm，BC ＝ 6 cm，∠ABC ＝ 60° の平行四辺形 ABCD がある。辺 AB の中点を E，辺 CD の中点を F とし，ED と AC，AF との交点をそれぞれ P，Q とする。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県　2004 年度）



(1) △APQ と△CPE が相似であることを次のように証明した。次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ にあてはまるものを，下の語群のア～シから選んで，その記号を書きなさい。

（証明）

△APQ と△CPE において，

$\boxed{1}$ は等しいから，∠APQ ＝∠ $\boxed{2}$ …①

また，点 E，F はそれぞれ辺 AB，CD の中点であるから，AE ＝ FC，AE ∥ FC

したがって，四角形 AECF は $\boxed{3}$ となるので，AF ∥ EC

平行線の錯角は等しいから，∠AQP ＝ ∠ $\boxed{4}$ …②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△APQ ∽ △CPE

語群

ア　対頂角	イ　同位角	ウ　錯角	エ　長方形	オ　正方形	カ　平行四辺形
キ　ABC	ク　ECP	ケ　EPA	コ　CPE	サ　ADE	シ　CEP

(2) 四角形 AECF の面積を求めなさい。

(3) 線分 DQ の長さを求めなさい。

(4) 線分 PQ の長さを求めなさい。

解答欄

⑴	1		2		3		4	
⑵	cm^2							
⑶	cm							
⑷	cm							

解答

(1)

1　ア　 2　コ　 3　カ　 4　シ

(2)　$6\sqrt{3}$ cm^2

(3)　$\sqrt{13}$ cm

(4)　$\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ cm

解説

(2)

点 C から AB に垂線 CG をひくと△CBG は∠CBG＝60°の三角形だから

CG＝$3\sqrt{3}$ cm

四角形 AECF＝2× $3\sqrt{3}$ ＝ $6\sqrt{3}$ cm^2

(3)

EF を F の方向へ延長し点 D からの垂線との交点を H とすると

△DFH において

∠DFH＝60°　DF＝2cm より DH＝ $\sqrt{3}$ cm，FH＝1cm となる。

Q は平行四辺形の対角線の交点だから DE の中点である。

DE＝$\sqrt{7^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$ ＝ $\sqrt{52}$ ＝ $2\sqrt{13}$ cm

よって DQ＝ $\sqrt{13}$ cm。

(4)

四角形 AEFD は平行四辺形なので AQ＝QF である。

AF＝EC より AQ：EC＝1：2

(1)より PQ：PE＝1：2 であるから

PQ＝QE×$\dfrac{1}{3}$＝DQ×$\dfrac{1}{3}$＝$\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ cm

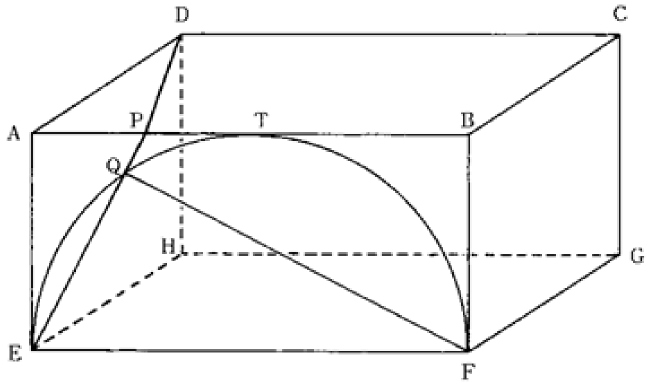
【問 12】

図１のように，AE＝AD，AB＝2AEの直方体ABCD－EFGHがあり，面AEFB上に辺EFを直径とする半円をかき，この半円と辺ABとの接点をTとする。点Pを線分ATの両端をのぞいた部分にとり，点Pと点D，点Pと点Eをそれぞれ結び，線分EPと弧$\overset{\frown}{\mathrm{ET}}$との交点のうち，点Eと異なる点をQとする。また，点Fと点Qを結ぶ。

このとき，次の①，②では指示に従って答え，③では［　　］に適当な数を書き入れなさい。

（岡山県　2004 年度）

図１



① △AEP≡△ADPとなることを，次のように証明した。

［　　］に適当な記号またはことばを書き入れなさい。

［証明］

△AEPと△ADPにおいて，四角形AEFBと四角形ABCDは長方形であるから，

∠EAP＝∠［(ア)］ … (1)

仮定より，AE＝AD … (2)

APは共通 … (3)

(1)，(2)，(3)より，［(イ)］がそれぞれ等しいから，△AEP≡△ADP

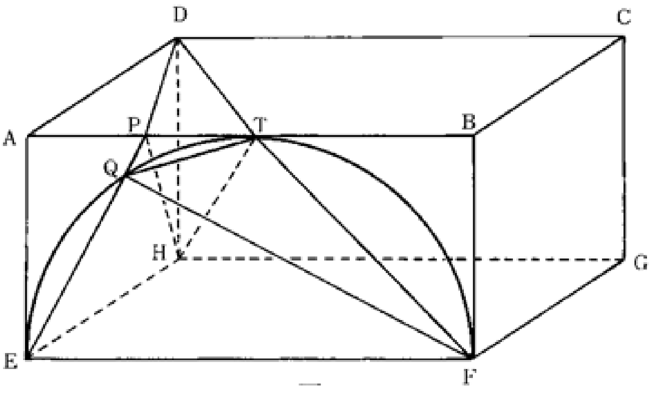
② △QFE∽△ADPを証明しなさい。

③ 図２は，さらに，点Tと点D，点Tと点F，点Tと点Q，点Tと点H，点Pと点Hをそれぞれ結んだものである。

EF＝2 cm とし，EQ＝1 cm であるとき，FQ＝［(ア)］cm，∠TFQ＝［(イ)］°であり，弧$\overset{\frown}{\mathrm{QT}}$と弦ＱＴで囲まれた部分の面積は［(ウ)］$cm^2$ である。

また，三角錐HDPTの体積は［(エ)］cm^3 である。

図２



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="2">①</td><td>(ア)</td><td></td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td></td></tr>
<tr><td>②</td><td colspan="2">（証明）</td></tr>
<tr><td rowspan="4">③</td><td>(ア)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td>°</td></tr>
<tr><td>(ウ)</td><td>cm²</td></tr>
<tr><td>(エ)</td><td>cm³</td></tr>
</table>

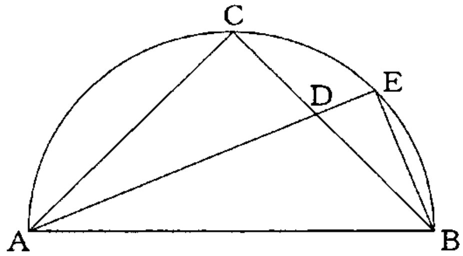
解答
①
(ア) DAP
(イ) 2 辺とその間の角
②
（証明）
△QFE と△ADP において
辺 EF が半円の直径で点 Q が弧$\overset{\frown}{\mathrm{ET}}$ 上にあるから
∠EQF＝90°
また四角形 ABCD は長方形だから
∠PAD＝90°
よって∠EQF＝∠PAD…(1)
次に AB∥EF で錯角は等しいから
∠FEQ＝∠EPA…(2)
①より△AEP≡△ADP であるから
∠EPA＝∠DPA…(3)
(2)，(3)より
∠FEQ＝∠DPA…(4)
(1)，(4)より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△QFE∽△ADP
③
(ア) $\sqrt{3}$ cm
(イ) 15 °
(ウ) $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}$ cm^2
(エ) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ cm^3
解説
③
(ア)
△QFE は直角三角形で $\mathrm{FQ}^2+\mathrm{EQ}^2=\mathrm{EF}^2$ が成り立つ。
$\mathrm{FQ}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ cm
(イ)
辺 EF の中点を O とすると△TOF は OT＝OF の直角二等辺三角形であるから∠TFO＝45° となる。
△QFE は EF:EQ＝2:1 の直角三角形なので∠QFE＝30° である。
したがって∠TFQ＝45° −30° ＝15° となる。
(ウ)
∠TFQ＝15° より∠TOQ＝30° となる。
よって求める部分の面積は中心角が 30° のおうぎ形 OQT から，△OQT の面積をひいたものである。
おうぎ形 OQT の面積＝$1^2\times\pi\times\dfrac{30}{360}=\dfrac{\pi}{12}$ cm
点 Q から OT へ垂線 QS をひくと OQ:QS＝2:1 であるから QS＝$\dfrac{1}{2}$ cm
よって△OQT＝$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$　したがって求める面積は$\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{4}$ cm^2
(エ)
△QFE は EQ:QF＝1: $\sqrt{3}$ の直角三角形であるから②より△ADP も PA:AD＝1: $\sqrt{3}$
よって PA＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm である。よって PT＝AT−PA＝$1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
三角錐 HDPT の底面を△DPT とすると
求める体積は$\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times1\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ cm^3となる。

【問 13】

右の図のように，線分 AB を直径とする半円があり，点 C は，CA＝CB となる$\overset{\frown}{AB}$上の点である。∠CAB の二等分線をひき，線分 CB との交点を D，$\overset{\frown}{CB}$との交点を E とし，点 E と点 B を結ぶ。

このとき，次の (1)，(2) の問いに答えなさい。

（香川県　2004 年度）



(1)　△AEB∽△BED　であることを証明せよ。

(2)　線分 AD の中点を F とする。点 F を通り，線分 AD に垂直な直線をひき，線分 AC との交点を G とするとき，△AFG≡△BED であることを証明せよ。

解答欄

(1)	証明
(2)	証明

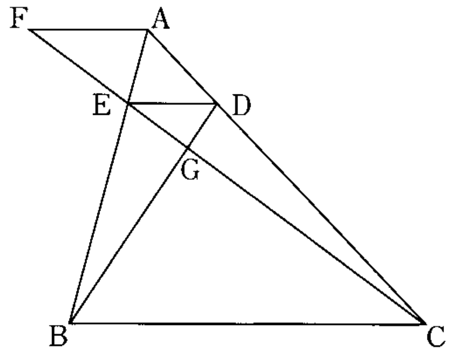
解答
(1)
（証明）
△AEB と△BED において
∠E は共通…①
仮定より
∠BAE＝∠CAE
$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$ に対する円周角は等しいから
∠CAE＝∠CBE
∠CBE＝∠DBE だから
∠BAE＝∠DBE…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△AEB∽△BED
(2)
（証明）
点 G と点 D を結ぶ。
△GAF と△GDF において
GF は共通。
仮定より
AF＝DF,
∠GFA＝∠GFD＝90°…①
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△GAF≡△GDF
よって∠GAF＝∠GDF
仮定より
∠GAF＝∠DAB だから∠GDF＝∠DAB
錯角が等しいから GD∥AB …②
△CAB において
②より GD∥AB だから
CG : CA＝CD : CB
仮定より CA=CB だから CG=CD
したがって GA＝CA－CG＝CB－CD＝DB…③
△AFG と△BED において
AB は直径だから
∠AEB＝90°…④
∠AEB＝∠DEB だから
①, ④より∠GFA＝∠DEB＝90°
$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$ に対する円周角は等しいから∠GAF＝∠DBE
③より GA＝DB
直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから
△AFG≡△BED

【問 14】

AB＝6cm，BC＝7cm，CA＝8cm の三角形ABCがある。図のように，辺AC上にAD＝2cm となる点Dをとる。点Dを通り辺BCに平行な直線をひき，辺ABとの交点をEとする。点Aを通り辺BCに平行な直線をひき，点Cと点Eを通る直線との交点をFとする。また，点Bと点Dを結び，線分BDと線分CEとの交点をGとする。

次の(1)は指示にしたがって答え，(2)，(3)は [　　] の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

（福岡県　2004 年度）



(1) 上の図において，相似な三角形を 1 組選び，その 2 つの三角形が相似であることを [　　] の中に証明せよ。

(証明)

(2) 線分AFの長さは [　　cm] である。

(3) △AEDの面積は，△DGCの面積の [　　倍] である。

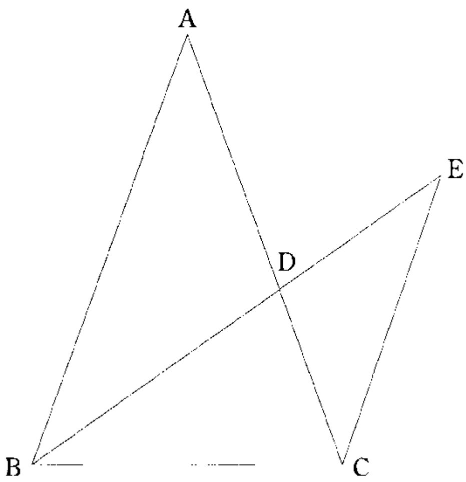
解答欄
答は問題用紙の解答欄に記入
解答
(1)
（証明）
（△AEDと△ABCにおいての例）
△AEDと△ABCにおいて
共通な角だから
∠EAD＝∠BAC…①
平行線の同位角は等しいから
∠AED＝∠ABC…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいので
△AED∽△ABC
(2) $\frac{7}{3}$cm
(3) $\frac{5}{12}$倍
解説
(2)
△ABC∽△AED
(ED∥BCより)だから
AD:AC＝AE:AB
8:2＝6:AE
AE＝$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$
△EAF∽△EBCより
AE:EB＝AF:BC
$\frac{3}{2}:\left(6-\frac{3}{2}\right)$＝AF:7
AF＝$\frac{7}{3}$
(3)
△AEDの面積:△EDCの面積＝AD:DC＝2:6＝1:3
△EDG∽△BCGなので
EG:GC＝ED:BC＝1:4
ゆえに△EDCの面積:△DGCの面積＝5:4
だから△AEDの面積＝$\frac{1}{3}$△EDCの面積＝$\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}$×△DGCの面積＝$\frac{5}{12}$×△DGCの面積

【問 15】

右の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC があり，∠B の二等分線と辺 AC との交点を D とする。また，線分 BD の延長線上に BC = CE となる点 E をとる。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（佐賀県 2004 年度 後期）



(1) △ABD ∽ △CED であることを証明しなさい。

(2) AB＝6 cm，BC＝4 cm のとき，次の(ア)～(ウ)の各問いに答えなさい。

(ア) 線分 AD の長さを求めなさい。

(イ) △ABC の面積を求めなさい。

(ウ) △CED の面積は△ABC の面積の何倍か。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>(ア)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(ウ)</td><td>倍</td></tr>
</table>

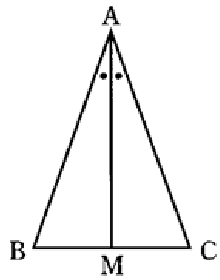
解答
(1)
△ABD と△CED において
対頂角は等しいから
∠ADB＝∠CDE…①
仮定から
∠ABD＝∠CBD…②
△BCE は二等辺三角形だから
∠CBD＝∠CED…③
②, ③から
∠ABD＝∠CED…④
①, ④から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△CED
(2)
(ア) $\frac{18}{5}$ cm
(イ) $8\sqrt{2}$ cm^2
(ウ) $\frac{4}{15}$ 倍
解説
(2)
(ア)
(1)より AD : CD＝3 : 2 だから AD＝$6\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$ cm
(ウ)
AD : CD＝3 : 2 より
△BCD＝△ABC×$\frac{2}{5}$
また BD : ED＝3 : 2 より
△CED＝△BCD×$\frac{2}{3}$
したがって△CED＝△ABC×$\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}$＝△ABC×$\frac{4}{15}$

【問 16】

問1 図 1、図 2 のように、二等辺三角形 ABC の頂角∠A の二等分線をひき、辺 BC との交点を M とする。このとき、次の (1)〜(3) に答えよ。

（長崎県　2004 年度）

図 1



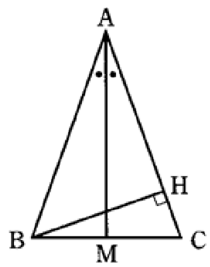
(1) 二等辺三角形には、一般に次の性質がある。$\boxed{\quad}$ の中に適当な記号を書き入れよ。

〔二等辺三角形の性質〕

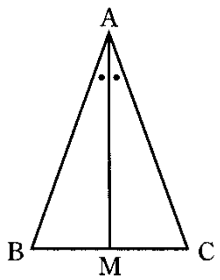
> 二等辺三角形 ABC の頂角∠A の二等分線をひき、辺 BC との交点を M とすると、BM＝CM、AM $\boxed{\quad}$ BC となる。

(2) 図 2 のように、点 B から辺 AC にひいた垂線と辺 AC との交点を H とする。線分 BH を定規とコンパスを用いて作図せよ。
ただし、定規は直線や線分をひくときに使い、長さを測ったり角度を利用したりしてはならない。なお、作図に用いた線は消さずに残しておくこと。

図 2



（作図）

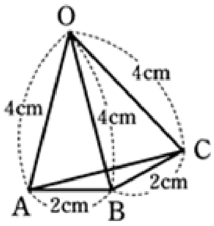


(3) 図 2 において、△ACM∽△BCH であることを証明せよ。

（証明）

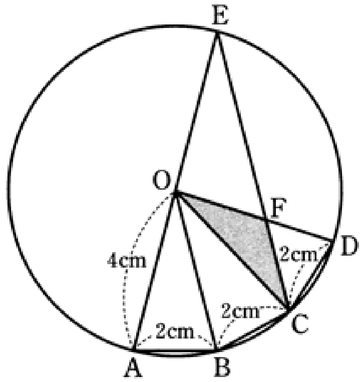
問２ 図３のように、三角形 OAB と三角形 OBC が同じ平面上にあり、OA＝OB＝OC＝4 cm、AB＝BC＝2 cm である。このとき、線分 AC の長さは何 cm か。

図３

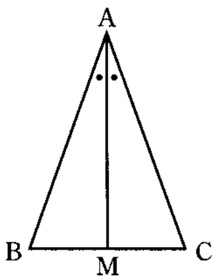


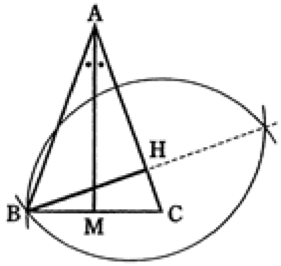
問３ 図４のように、点 O を中心とする半径 4 cm の円の周上に、異なる４点 A、B、C、D があり、３つの線分 AB、BC、CD の長さは、AB＝BC＝CD＝2 cm である。線分 AO の延長と円 O との交点を E とし、線分 OD と線分 CE との交点を F とする。このとき、三角形 OCF の面積は何 cm^2 か。

図４



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>（証明）</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

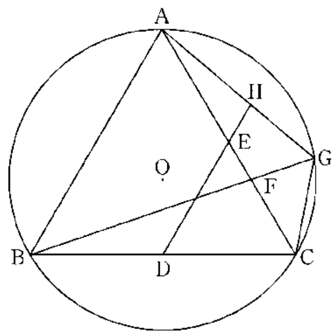
解答
問1
(1) ⊥
(2)


(3)
（証明）
△ACM と△BCH において
∠AMC＝∠BHC＝90° …①
∠C は共通…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ACM∽△BCH
問2 $\sqrt{15}$ cm
問3 $\dfrac{4\sqrt{15}}{7}$ cm²
解説
問2
AC と OB の交点を D とし BD＝x, OD＝$4-x$ とする。
△OAB と△OCB は線分 OB について対称だから AC⊥OB である。
△ABD において
三平方の定理より $AD^2=AB^2-BD^2=4-x^2$…①
また△OAD においても同様にして
$AD^2=OA^2-OD^2=16-(4-x)^2$…②
①, ②より
$4-x^2=16-(4-x)^2$, $8x=4$, $x=\dfrac{1}{2}$
よって $AC=2AD=2\sqrt{4-x^2}=\sqrt{16-4x^2}=\sqrt{16-4\times\dfrac{1}{4}}=\sqrt{15}$ cm
問3
△ACE において
AE は直径だから∠ACE＝90°
$EC^2=AE^2-AC^2=8^2-(\sqrt{15})^2=49$ より EC＝7
一方△OCE∽△FOC で
相似比は CE:OC＝7:4 である。
よって$\triangle OCF=\left(\dfrac{4}{7}\right)^2\times\triangle OCE=\dfrac{16}{49}\times\triangle OCE$…①
また$\triangle OCE=\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\times\triangle ACE=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{15}\times7\right)=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$…②
①, ②より$\triangle OCF=\dfrac{16}{49}\times\dfrac{7\sqrt{15}}{4}=\dfrac{4\sqrt{15}}{7}$ cm²

【問 17】

右の図のように，△ABC の 3 つの頂点は円 O の周上にある。点 D は辺 BC の中点，点 E は辺 CA の中点である。また，線分 CE 上に 2 点 C，E とは異なる点 F をとり，BF の延長と円 O との交点を G，DE の延長と線分 AG との交点を H とする。このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2004 年度）



(1) △BCG∽△AHE であることを証明しなさい。

(2) AB＝BC＝CA＝7cm，CG＝$\sqrt{7}$ cm のとき，線分 DH の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

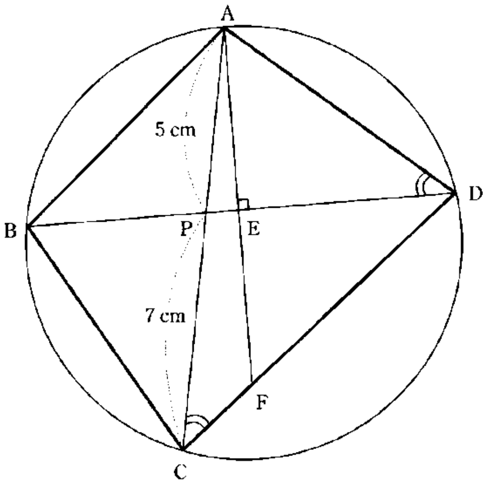
解答
(1)
（証明）
△BCG と△AHE において
∠GBC と∠EAH は $\overset{\frown}{\mathrm{CG}}$ に対する円周角だから
∠GBC＝∠EAH…①
∠CGB と∠CAB は $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角だから
∠CGB＝∠CAB…②
また中点連結定理より AB∥HD だから
∠HEA＝∠CAB…③
②, ③より
∠CGB＝∠HEA…④
①, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△BCG∽△AHE
(2) $\dfrac{14}{3}$ cm
解説
(2)
BF＝a, FC＝b, FG＝c, FA＝d とする。
△CGB∽△FCB より
$a:b=7:\sqrt{7}$ …①
$a+c:\sqrt{7}=7:b$…②
△CGB∽△FGA より
$d:c=7:\sqrt{7}$ …③
$b+d=7$…④
①より
$a=\dfrac{7}{\sqrt{7}}b$…⑤
③より
$c=\dfrac{\sqrt{7}}{7}d$
④より
$d=7-b$ だから
$c=\dfrac{\sqrt{7}}{7}\times(7-b)=\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{7}}{7}b$…⑥
⑤, ⑥を②に代入すると
$\dfrac{7}{\sqrt{7}}b+\left(\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{7}}{7}b\right):\sqrt{7}=7:b$
これを整理すると$\dfrac{6\sqrt{7}}{7}b^2+\sqrt{7}b-7\sqrt{7}=0$
因数分解して$(2b+7)(3b-7)=0$
$b>0$ より
$b=\dfrac{7}{3}$
△HAE∽△FBC より
AE：BC＝EH：CF
$\dfrac{7}{2}:7=\mathrm{EH}:\dfrac{7}{3}$
$\mathrm{EH}=\dfrac{7}{3}\times\dfrac{7}{2}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{7}{6}$
$\mathrm{DH}=\mathrm{DE}+\mathrm{EH}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{6}=\dfrac{14}{3}$

【問 18】

右の図で，四角形 ABCD の頂点はすべて同じ円周上にあり，∠ACD＝∠ADB，BC＜DC となっている。点 E は，点 A から線分 BD にひいた垂線と BD との交点であり，点 F は，線分 AE の延長と線分 CD との交点である。また，点 P は線分 AC と BD との交点である。

AP＝5 cm，PC＝7 cm であるとき，次の（1）～（3）の問いに答えなさい。

（大分県　2004 年度）



（1）△ABP∽△ACB であることを証明しなさい。

（2）線分 AB の長さを求めなさい。

（3）AB＝BC のとき，線分 CF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	【証明】
(2)	cm
(3)	cm

解答

(1)

【証明】

△ABP と△ACB において

$\overset{\frown}{AD}$ に対する円周角は等しいから

∠ABP＝∠ACD…①

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいから

∠ACB＝∠ADB…②

仮定から

∠ACD＝∠ADB…③

①，②，③より

∠ABP＝∠ACB…④

共通な角だから

∠BAP＝∠CAB…⑤

④，⑤より，

2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABP∽△ACB

(2)　$2\sqrt{15}$ cm

(3)　$\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$ cm

解説

(2)

(1)より△ABP∽△ACB だから

AP：AB＝AB：AC

AB^2＝AP×AC

AB^2＝5×(5＋7)＝60

したがって AB＝$\sqrt{60}$ ＝$2\sqrt{15}$ cm

(3)

BF を結んだときできる四角形 ABFD はひし形である。…①

（対角線が直交し△AED≡△FED より，隣り合う二辺 AD と FD の長さが等しいから）

△PAB と△PCD とにおいて

∠BPA＝∠DPC（対頂角）…②

①より AB∥CD だから

∠ABP＝∠CDP（錯角）…③

②，③より

△PAB∽△PCD となる。

AP：CP＝AB：CD

5：7＝$2\sqrt{15}$ ：CD

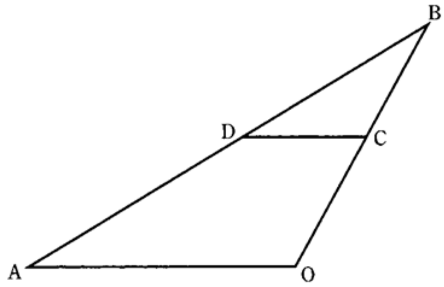
CD＝$\dfrac{14\sqrt{15}}{5}$

CF＝CD－FD＝$\dfrac{14\sqrt{15}}{5}-2\sqrt{15}=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$ cm

【問 19】

右の図のような OA＝OB である二等辺三角形 OAB の辺 OB 上に点 C, 辺 AB 上に点 D をとる。CB＝CD のとき△OAB∽△CDB を証明しなさい。

（沖縄県　2004 年度）



解答欄

（証明）

解答
(証明)
△OAB と△CDB において
△OAB は二等辺三角形だから
∠A＝∠B…①
△CDB は二等辺三角形だから
∠CDB＝∠B…②
①, ②より
∠A＝∠CDB…③
また, ∠B は共通…④
③, ④より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△OAB∽△CDB