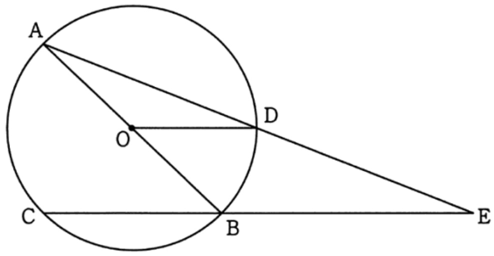
4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2007 年度出題】

【問 1】

図のように, 線分 AB を直径とする円 O の円周上に, 2 点 C, D を CB∥OD となるようにとります。CB の延長と AD の延長との交点を E とします。



次の問いに答えなさい。

（北海道 2007 年度）

問1. 線分 OB と線分 BE の長さの比を, もっとも簡単な整数の比で求めなさい。

問2. △ACE∽△BDA を証明しなさい。

解答欄

問1	OB : BE＝　　　　:
問2	証明

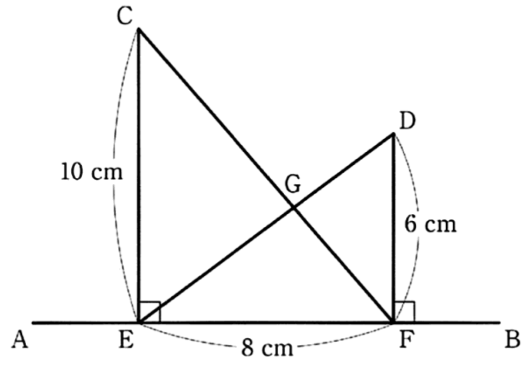
解答
問1　OB:BE＝1:2
問2
証明
△ACEと△BDAにおいて
∠ACE＝∠BDA＝90°(円周角)…①
∠AEC＝∠ADO　(同位角)…②
△ODAは二等辺三角形だから
∠ADO＝∠DAB…③
②, ③から
∠AEC＝∠DAB…④
①, ④から
2組の角がそれぞれ等しいので
△ACE∽△BDA
解説
問1
△ABEにおいて
OD∥BEより
OD:BE＝AO:AB＝1:2
また円の半径より
OD＝OBだから
OB:BE＝OD:BE＝1:2

【問 2】

図のように，線分 AB に点 C，D から垂線をひき，その交点をそれぞれ E，F とする。また、線分 CF と DE の交点を G とする。EF＝8 cm，CE＝10 cm，DF＝6 cm のとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

（青森県 2007 年度）

(1) △CGE と△FGD が相似になることを証明しなさい。



(2) △EFG の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm^2

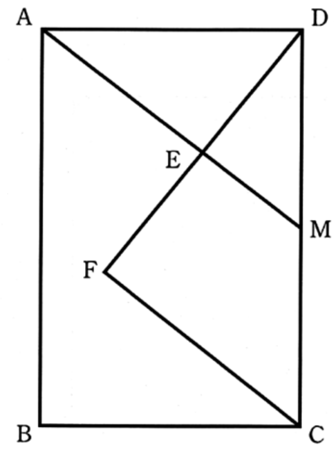
解答
(1)
証明
△CGE と△FGD で
仮定より
∠CEF＝∠DFB＝90°
同位角が等しいから
CE∥DF
平行線の錯覚は等しいから
∠ECG＝∠DFG…①
∠CEG＝∠FDG…②
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△CGE∽△FGD
(2) 15cm^2
解説
問2
(2)
△CGE∽△FGD より
EG:DG＝CE:FD＝10:6＝5:3
よって△EFG＝$\frac{5}{8}$
△DEF＝$\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\times8\times6=15\text{cm}^2$

【問 3】

図のような長方形 ABCD がある。辺 CD の中点を M とし，点 D から線分 AM に垂線をひき，線分 AM との交点を E とする。また，線分 DE の延長上に点 F を DE＝EF となるようにとる。

このとき，△ADM∽△DFC であることを証明しなさい。

（茨城県　2007 年度）



解答欄

証明

解答

証明

△DFC で

仮定から DE＝EF, DM＝MC なので

中点連結定理から EM∥FC…①

△ADM と△DFC で

①から平行線の同位角なので

∠DMA＝∠FCD…②

∠DEM＝∠DFC…③

仮定から∠ADM＝∠DEM＝90°…④

③, ④から∠ADM＝∠DFC…⑤

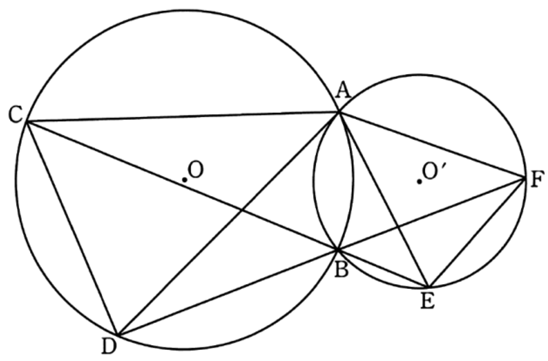
②, ⑤から

2 組の角がそれぞれ等しいので
△ADM∽△DFC
解説
△DFC で,
DE＝EF, DM＝MC だから
中点連結定理より EM∥FC
△ADM と△DFC で
平行線の同位角は等しいので
∠DMA＝∠FCD…①
∠DEM＝∠DFC＝90°…②
∠ADM＝90°より
∠ADM＝∠DFC＝90°…③
①, ③より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ADM∽△DFC

【問 4】

図の円 O, O′ は 2 点 A, B で交わっている。2 点 C, D は AC＝AD となる円 O の周上の点である。直線 CB, DB が円 O′と交わる点で B と異なる交点をそれぞれ E, F とするとき，三角形 ACD と三角形 AEF が相似となることを証明しなさい。

（群馬県 2007 年度）



解答欄

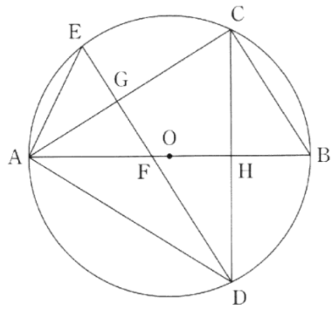
証明

解答
証明
△ACE と△ADF において
仮定より AC＝AD…①
円 O の$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠ACB＝∠ADB
すなわち∠ACE＝∠ADF…②
円 O′ の$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから
∠AEB＝∠AFB
すなわち∠AEC＝∠AFD…③
また∠CAE＝180°－(∠ACE＋∠AEC)
∠DAF＝180°－(∠ADF＋∠AFD)
②, ③より∠CAE＝∠DAF…④
①, ②, ④より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ACE≡△ADF
ゆえに AE＝AF…⑤
①, ⑤より
AC∶AE＝AD∶AF…⑥
また∠CAD＝∠CAE－∠DAE
∠EAF＝∠DAF－∠DAE
④より∠CAD＝∠EAF…⑦
⑥, ⑦より
2 組の辺の比が等しくその間の角が等しいから
△ACD∽△AEF
解説
△ACE と△ADF において
仮定より AC＝AD…①
円 O の弧 AB に対する円周角より
∠ACE＝∠ADF…②
円 O′ の弧 AB に対する円周角より
∠AEC＝∠AFD…③
三角形の内角の和は 180°だから
∠CAE＝180°－(∠ACE＋∠AEC)　∠DAF＝180°－(∠ADF＋∠AFD)
②, ③より
∠CAE＝∠DAF…④
①, ②, ④より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ACE≡△ADF
よって AE＝AF
したがって△ACD と△AEF において
AC∶AE＝AD∶AF…⑤
④より
∠CAD＝∠CAE－∠DAE＝∠DAF－∠DAE＝∠EAF…⑥
⑤, ⑥より
2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから
△ACD∽△AEF

【問 5】

図のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に，2 点 A，B とは異なる点 C を AC＞BC となるようにとり，点 C をふくまない$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$上に点 D を AC＝AD となるようにとる。また，点 B をふくまない$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$上に点 E を BC // DE となるようにとり，線分 AB と線分 DE との交点を F，線分 AC と線分 DE との交点を G とする。さらに，線分 AB と線分 CD との交点を H とする。このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県 2007 年度）



問1．三角形 AEG と三角形 DFH が相似であることを次のように証明した。

空欄にあてはまるものとして，$\boxed{a}$ には最も適する弧を記号 $\frown$ を用いて書き，$\boxed{b}$ には最も適する角を記号∠を用いて書き，$\boxed{\text{あ}}$ ， $\boxed{\text{い}}$ には最も適するものを【選択群】からそれぞれ 1 つずつ選び，その番号を書きなさい。

証明

△AEG と DFH において，

まず，$\boxed{a}$ に対する円周角は等しいから，

∠CAE＝∠CDE

よって，∠EAG＝∠FDH …①

次に，$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$に対する円周角は等しいから，

∠AED＝∠ACD …②

また，△ACD は AC＝AD の二等辺三角形だから，

∠ACD＝ $\boxed{b}$ …③

さらに，$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角は等しいから，

∠ADC＝∠ABC …④

ここで，$\boxed{\text{あ}}$ から，

∠CBF＝∠BFD

よって，∠ABC＝∠BFD …⑤

②，③，④，⑤より，

∠AED＝∠BFD

よって，∠AEG＝∠DFH …⑥

①，⑥より，$\boxed{\text{い}}$ から，

△AEG∽△DFH

【選択群】

1. 対頂角は等しい
2. 平行線の同位角は等しい
3. 平行線の錯角は等しい
4. 3 組の辺の比が等しい
5. 2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しい
6. 2 組の角がそれぞれ等しい

問2．∠BAE＝64° のとき，∠ADE の大きさを求めなさい。

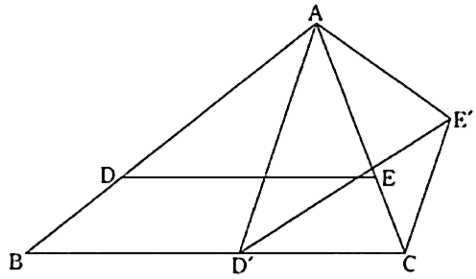
解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(あ)	
	(い)	
問2	∠ADE＝　　　　　　°	

解答
問1
(a) $\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$
(b) ∠ADC
(あ) 3
(い) 6
問2 ∠ADE＝26°
解説
問2
AB は円 O の直径より∠AHD＝90°，DH＝CH
また△ADC は AD=AC の二等辺三角形だから
底辺の垂直二等分線は頂角を 2 等分するので
∠DAH＝∠CAH
△AEG∽△DFH より
∠EAG＝∠FDH
よって
∠ADE＝180°－(∠AHD＋∠DAH＋∠FDH)
＝180°－(90°＋∠CAH＋∠EAG)
＝180°－(90°－∠BAE)
＝180°－(90°＋64°)
＝26°

【問 6】

図のように，△ABC の辺 AB，AC 上に BC∥DE となるようにそれぞれ点 D，点 E をとる。次に△ADE を点 A を中心に，頂点 D が辺 BC 上にくるように回転させ，回転後の点をそれぞれ D′，E′ とする。このとき，次の問いに答えよ。



（福井県 2007 年度）

問1．△ABD′ ∽△ACE′ であることを証明せよ。

問2．AB＝BC＝6 cm，AC＝AD＝4 cm のとき，

(1) CE′ の長さを求めよ。

(2) △ACE′ の面積を求めよ。

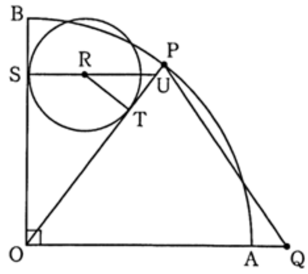
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">証明
△ ABD′ と△ACE′ において</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm²</td></tr>
</table>

解答
問1
証明
$\triangle ABD'$と$\triangle ACE'$において
$BC \parallel DE$から
$AB:AD=AC:AE$
$AD=AD'$, $AE=AE'$から
$AB:AD'=AC:AE'$
よって
$AB:AC=AD':AE'$…①
また$\angle BAD'=\angle BAC-\angle D'AC$…②
$\angle CAE'=\angle D'AE'-\angle D'AC$…③
仮定から $\angle BAC=\angle D'AE'$…④
②, ③, ④から
$\angle BAD'=\angle CAE'$…⑤
①, ⑤から
2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
$\triangle ABD' \backsim \triangle ACE'$
問2
(1) $\dfrac{20}{9}$ cm
(2) $\dfrac{160\sqrt{2}}{81}$ cm^2
解説
問2
(1)
$\triangle ABC$において
$AB=BC$より$\angle BAC=\angle BCA$…(ⅰ)
また$AD'=AD=AC$より
$\triangle AD'C$において$\angle ACD'=\angle AD'C$…(ⅱ)
同じ角なので$\angle BCA=\angle ACD'$…(ⅲ)
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)より
$\angle BAC=\angle AD'C$…(ⅳ)
(ⅲ), (ⅳ)より
2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle BCA \backsim \triangle ACD'$
$AB:D'A=AC:D'C$
$6:4=4:D'C$
$D'C=4\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{8}{3}$
よって$BD'=6-\dfrac{8}{3}=\dfrac{10}{3}$
問1より,$\triangle ABD' \backsim \triangle ACE'$
$BD':CE'=AB:AC$ $\dfrac{10}{3}:CE'=6:4$ $CE'=\dfrac{10}{3}\times4\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{20}{9}$ cm
(2)
①と同様にして$AD':AE'=AB:AC$ $4:AE'=6:4$ $AE'=\dfrac{8}{3}$ E'からACに垂線$E'H$をひく。
$AH=x$ cmとすると$CH=4-x$ cmとおけるから
三平方の定理を利用して$\left(\dfrac{8}{3}\right)^2-x^2=\left(\dfrac{20}{9}\right)^2-(4-x)^2$ $x=\dfrac{184}{81}$
よって$E'H=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2-\left(\dfrac{184}{81}\right)^2}=\dfrac{80\sqrt{2}}{81}$ $\triangle ACE'=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{80\sqrt{2}}{81}=\dfrac{160\sqrt{2}}{81}$ cm^2

【問 7】

図Ⅱにおいて，R はおうぎ形 OAB の内部の点であり，R を中心とし半径が 4 cm の円 R は線分 OB，OP に接している。S は円 R と線分 OB との接点であり，OS＝12 cm である。T は，円 R と線分 OP との接点である。このとき，OS＝OT となる。R と S，R と T とをそれぞれ結ぶ。U は，直線 OP と直線 SR との交点である。



（大阪府 2007 年度 前期）

(1) △SOU∽△TRU であることを証明しなさい。

(2) 線分 OQ の長さを求めたい。

① 線分 RU の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

② 線分 OQ の長さを求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="1">(1)</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>①</td><td>求め方

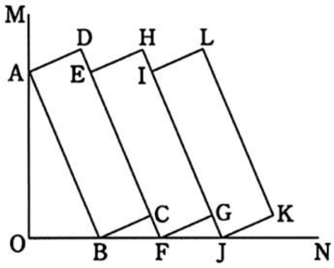
cm</td></tr>
<tr><td>②</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
(1)
証明
△SOUと△TRUにおいて
∠OUS＝∠RUT (共通)…①
Sが円Rと線分OBとの接点だから
∠USO＝90°…②
Tが円Rと線分OPとの接点だから
∠UTR＝90°…③
②③より∠USO＝∠UTR…④
①④より
2組の角がそれぞれ等しいから
△SOU∽△TRU
(2)
①
求め方
△SOU∽△TRUでありSO＝12 cm
TR＝4 cmだから△SOUと△TRUの相似比は3:1である。
よってOU＝3RU, SU＝3TU
RU＝x cmとすると
SU＝SR＋RU＝4＋x cm
TU＝OU－OT＝3RU－OS＝3x－12 cm
よって4＋x＝3 (3x－12)
これを解くと
x＝5
5cm
② $\frac{96}{5}$
解説
(2)
②
①より
RU＝5
SU＝4＋5＝9
TU＝3×5－12＝3
OU＝3×5＝15
PからOQに垂線PMをひく。
△POMと△OUSにおいて
∠PMO＝∠OSU＝90°…(ⅰ)
また∠BOM＝∠PMQ＝90°より
同位角が等しいのでBO∥PM
したがって
∠MPO＝∠SOU…(ⅱ)
(ⅰ), (ⅱ)より
2組の角がそれぞれ等しいので
△POM∽△OUS
OM:US＝PO:OUより
OM:9＝16:15
15OM＝9×16
OM＝$\frac{48}{5}$
△POQはPO＝PQの二等辺三角形だから
OQ＝2OM＝2×$\frac{48}{5}$＝$\frac{96}{5}$ cm

【問 8】

本棚の本を何冊か抜き取ったら，右の写真のようになった。次の図は，この様子をもとにしてかいたものである。3 つの四角形 ABCD，EFGH，IJKL はすべて合同な長方形であり，AB＝EF＝IJ＝26 cm，AD＝EH＝IL＝8 cm である。点 A は線分 OM 上に，3 点 B，F，J は線分 ON 上にあり，∠MON＝90° である。また，2 点 E，C は線分 DF 上に，2 点 I，G は線分 HJ 上にある。各問いに答えよ。

（奈良県 2007 年度）



問1．EC＝a cm とするとき，線分 DF の長さを a を用いて表せ。

問2．△AOB∽△BCF であることを証明せよ。

問3．OA＝24 cm のとき線分 OJ の長さを求めよ。

解答欄

問1	cm
問2	証明
問3	cm

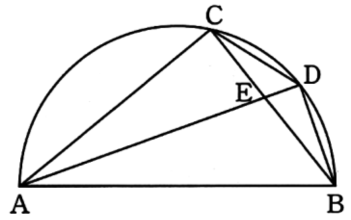
解答
問1　$52-a$ cm
問2
証明
△AOBと△BCFにおいて
仮定から
$\angle AOB=\angle BCF=90^\circ$ …①
また仮定から
$AB /\!/ DF$
平行線の同位角は等しいから
$\angle ABO=\angle BFC$…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいから
$\triangle AOB \backsim \triangle BCF$
問3　$\dfrac{82}{3}$ cm
解説
問1
$DE=26-a$
よって $DF=DE+EF=26-a+26=52-a$ cm
問3
△AOBで三平方の定理より
$OB=\sqrt{26^2-24^2}=10$
$\triangle AOB \backsim \triangle BCF$ より
$AB:BF=AO:BC$
$26:BF=24:8$
$24BF=26\times 8$
$BF=\dfrac{26}{3}$
△BCFと△FGJは
2辺とその間の角がそれぞれ等しいので
$\triangle BCF \equiv \triangle FGJ$
合同な三角形の対応する辺は等しいので
$FJ=BF=\dfrac{26}{3}$
よって $OJ=OB+BF+FJ=10+\dfrac{26}{3}+\dfrac{26}{3}=\dfrac{82}{3}$ cm

【問 9】

図のように，線分 AB を直径とする半円の周上に 2 点 C，D があり，線分 AD は∠CAB を二等分している。また，線分 AD と線分 BC の交点を E とする。

次の問1，問2に答えなさい。

（山口県 2007 年度）



問1．△ACD∽△CED であることを証明しなさい。

問2．AB＝3 cm，BD＝1 cm のとき，△ABE の面積を求めなさい。

解答欄

問1	証明
問2	cm^2

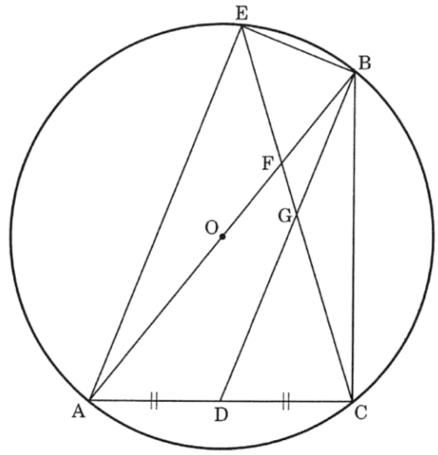
解答
問1．
証明
△ACDと△CEDにおいて
共通な角だから
∠ADC＝∠CDE…①
仮定から
∠CAD＝∠BAD…②
孤BDに対する円周角は等しいから
∠BCD＝∠BAD…③
②，③から
∠CAD＝∠BCD
よって∠CAD＝∠ECD…④
①，④から
2組の角がそれぞれ等しいので
△ACD∽△CED
問2　$\frac{7\sqrt{2}}{8}$ cm^2
解説
問2
三平方の定理より
AD＝$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
△ACD∽△CEDより
AD:CD＝CD:ED
CD＝BD＝1だから
$2\sqrt{2}:1=1:$ED
ED＝$\frac{\sqrt{2}}{4}$
AE＝$2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$
＝$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
よって△ABE＝$\frac{1}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{4}\times1=\frac{7\sqrt{2}}{8}$ cm^2

【問 10】

図のように，点 O を中心とし，線分 AB を直径とする半径 5 cm の円がある。$\overset{\frown}{AB}$上に AC＝6 cm となる点 C をとり B と結ぶ。線分 AC の中点を D とし，円 O の周上に，DB∥AE となる点 E をとる。また，線分 EC が線分 AB，DB と交わる点をそれぞれ F，G とする。

次の問1～問4に答えなさい。

（徳島県 2007 年度）



問1．線分 BC の長さを求めなさい。

問2．△ADB∽△EBC を証明しなさい。

問3．∠BAC の大きさを a 度とするとき，∠DGC の大きさを，a を用いて表しなさい。

問4．線分 BE の長さを求めなさい。

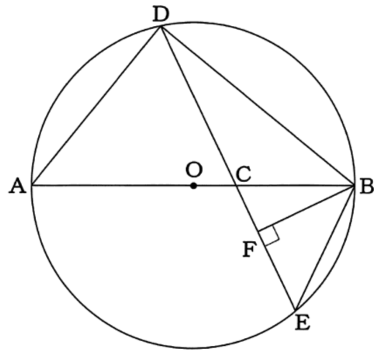
解答欄

問1	cm
問2	証明
問3	度
問4	cm

解答
問1　8cm
問2
証明
△ADB と△EBC で
$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角の大きさは等しいから
∠DAB＝∠BEC…①
また DB∥AE で，錯角は等しいから
∠ABD＝∠BAE…②
$\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$に対する円周角の大きさは等しいから
∠BAE＝∠ECB…③
②，③から
∠ABD＝∠ECB…④
①，④から
2 組の角が，それぞれ等しいので
△ADB∽△EBC
問3　$90-a$　度
問4　$\dfrac{24\sqrt{73}}{73}$ cm
解説
問3
弧 BC の円周角より
$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{BAC}=a^\circ$
AB は直径より$\angle\mathrm{AEB}=90^\circ$
よって$\angle\mathrm{AEC}=90-a$ °
また DB∥AE より
$\angle\mathrm{DGC}=\angle\mathrm{AEC}=90-a^\circ$
問4
△BCD で，$\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$　だから
三平方の定理より $\mathrm{BD}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$
△ADB∽△EBC より
DA：BE＝BD：CB
$3:\mathrm{BE}=\sqrt{73}:8$
$\mathrm{BE}=\dfrac{24}{\sqrt{73}}=\dfrac{24\sqrt{73}}{73}$ cm

【問 11】

図のような，線分 AB を直径とする円 O がある。線分 AB 上に，2 点 A，B と異なる点 C をとり，円周上に，AC＝AD となる点 D をとる。また，直線 DC と円との交点のうち，点 D と異なる点を E とする。点 B から線分 DE に垂線をひき，その交点を F とする。点 B と点 D，点 B と点 E をそれぞれ結ぶとき，次の 1，2の問いに答えなさい。



（香川県 2007 年度）

問1．△ABD∽△EBF であることを証明せよ。

問2．点 A と点 E を結ぶ。線分 AE と直線 BF との交点を G とし，点 O と点 G を結ぶとき，△OAG≡△OBG であることを証明せよ。

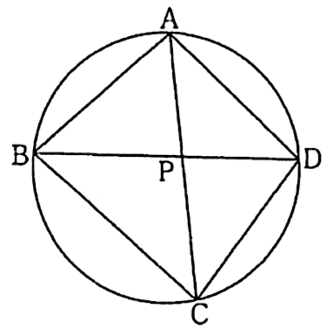
解答欄

問1	証明
問2	証明

解答
問1
証明
△ABDと△EBFにおいて
$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角は等しいから
∠BAD＝∠BED
∠BED＝∠BEFだから
∠BAD＝∠BEF…①
ABは直径だから
∠ADB＝90°
仮定より
∠EFB＝90°
よって∠ADB＝∠EFB…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいから
△ABD∽△EBF
問2
証明
$\overset{\frown}{BE}$に対する円周角は等しいから
∠BAE＝∠BDE…①
∠ADB＝90° だから
∠BDE＝90°－∠ADC…②
仮定より
△ACDは二等辺三角形だから
∠ACD＝∠ADC
対頂角は等しいから
∠ACD＝∠BCF
よって
∠BCF＝∠ADC …③
△BCFにおいて
仮定より,
∠BFC＝90° で三角形の内角の和は180° だから
③より∠CBF＝90°－∠BCF＝90°－∠ADC…④
①, ②, ④より
∠BAE＝∠CBF
∠BAE＝∠BAG, ∠CBF＝∠ABGだから
∠BAG＝∠ABG
2つの角が等しいから△AGBは二等辺三角形
よってAG＝BG…⑤
△OAGと△OBGにおいて
OGは共通
仮定より
OA=OB
⑤よりAG＝BG
3辺がそれぞれ等しいから
△OAG≡△OBG
解説
問1
△ABDと△EBFにおいて
弧BDに対する円周角より∠BAD＝∠BEF…①
直径に対する円周角は90° だから∠ADB＝90°
よって∠ADB＝∠EFB…②
①, ②より2組の角がそれぞれ等しいので
△ABD∽△EBF

【問 12】

図のように，四角形 ABCD がある。この四角形の頂点はすべて同じ円の周上にあり，点 P は対角線 AC と対角線 BD との交点である。∠ABD＝∠BCA であるとき，次の1･2の問いに答えなさい。



（高知県 2007 年度）

問1．△ACD∽△ADP を証明せよ。

問2．AP＝6 cm，PC＝7 cm のとき，辺 AD の長さを求めよ。

解答欄

問1	証明 △ACD と△ADP において ゆえに　△ACD∽△ADP
問2	cm

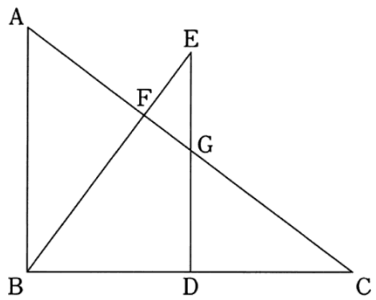
解答
問1
証明
△ACDと△ADPにおいて
∠CAD＝∠DAP (共通)…①
$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$ に対する円周角は等しいから
∠ACD＝∠ABD
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角は等しいから
∠ADP＝∠BCA
∠ABD＝∠BCAであるから
∠ACD＝∠ADP…②
①, ②, より
2組の角がそれぞれ等しい
ゆえに△ACD∽△ADP
問2 $\sqrt{78}$ cm
解説
問2
△ACD∽△ADPより
AC：AD＝AD：AP
(6＋7)：AD＝AD：6
$\mathrm{AD}^2=78$
AD＞0より
AD＝$\sqrt{78}$ cm

【問 13】

AB＝6 cm, BC＝8 cm, ∠ABC＝90° の直角三角形 ABC がある。図のように, 辺 BC の中点 D をとり, 点 D を通り辺 BA に平行な直線と, 点 B を通り辺 AC に垂直な直線との交点を E とする。辺 AC と直線 BE, DE との交点を, それぞれ F, G とする。

次の問1は指示にしたがって答え, 問2, 問3は $\boxed{}$ の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

（福岡県　2007 年度）



問1. 図において, 相似な三角形を 1 組選び, その 2 つの三角形が相似であることを右の $\boxed{}$ の中に証明せよ。

証明

問2. 線分 EG の長さは $\boxed{\text{cm}}$ である。

問3. 線分 BC 上に点 P を, △FBP の面積が四角形 FBDG の面積と等しくなるようにとる。このとき, 線分 BP の長さは $\boxed{\text{cm}}$ である。

解答欄

問1	証明
問2	cm
問3	cm

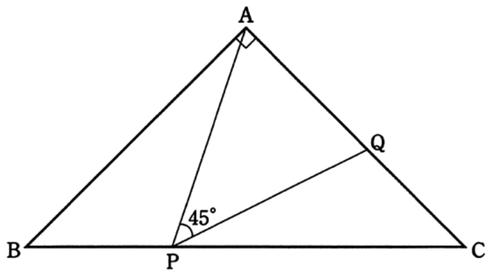
解答
問1
証明
△ABCと△GDCにおいて
共通な角だから
∠ACB＝∠GCD…①
平行線の同位角は等しいから
∠BAC＝∠DGC…②
①, ②より
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△GDC
問2　$\frac{7}{3}$または$2\frac{1}{3}$
問3　$\frac{39}{8}$または$4\frac{7}{8}$または4.875
解説
問3
FDを結ぶ。
四角形FBDG＝△FBD＋△GFD
△FBP＝△FBD＋△PFD
四角形FBDG＝△FBPより
△GFD＝△PFD
よってGを通り, FDに平行な直線とBCとの交点が点Pとなる。
△GDCにおいて
三平方の定理より $CG=\sqrt{3^2+4^2}=5$
△GDC∽△GFEより
CG : EG＝GD : GF
$5:\frac{7}{3}=3:GF$
$5GF=7$
$GF=\frac{7}{5}$
よって $CP:PD=CG:GF=5:\frac{7}{5}=25:7$
$PD=\frac{7}{32}CD=\frac{7}{32}\times 4=\frac{7}{8}$
$BP=4+\frac{7}{8}=\frac{39}{8}$ cm

【問 14】

図のように，∠BAC＝90°，AB＝$3\sqrt{2}$ cm の直角二等辺三角形 ABC がある。辺 BC 上に BP＝2 cm となる点 P をとり，辺 CA 上に∠APQ＝45° となる点 Q をとる。

このとき，次の1～4の各問いに答えなさい。

（佐賀県 2007 年度 後期）



問1．BC の長さを求めなさい。

問2．△ABP∽△PCQ であることを証明しなさい。

問3．CQ の長さを求めなさい。

問4．△APQ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	証明
問3	cm
問4	cm^2

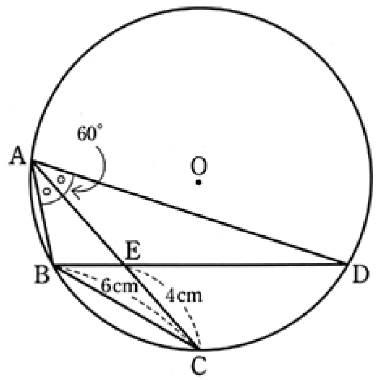
解答
問1　6cm
問2
証明
△ABPと△PCQで
△ABCは直角二等辺三角形だから
∠ABP＝∠PCQ＝45°…①
また∠ABP＋∠BAP＝∠APC
∠ABP＋∠BAP＝∠APQ＋∠CPQ
∠ABP＝45°，∠APQ＝45°なので
45°＋∠BAP＝45°＋∠CPQより
∠BAP＝∠CPQ…②
①，②から
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABP∽△PCQ
問3　$\frac{4\sqrt{2}}{3}$cm
問4　$\frac{10}{3}$cm^2
解説
問4
A，QからBCに垂線AH，QKをひく。
△ABH，△QCKは直角二等辺三角形だから
$AH=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 3\sqrt{2}=3$
$QK=\frac{1}{\sqrt{2}}CQ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}$
よって△APQ＝△ABC－△ABP－△PCQ
$=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{3}$
$=9-3-\frac{8}{3}$
$=\frac{10}{3}$cm^2

【問 15】

図 1, 図 2 のように, 点 O を中心とする円の周上に 4 点 A, B, C, D があり, 線分 AC は∠BAD を 2 等分している。また, 線分 AC と線分 BD との交点を E とする。∠BAD＝60°, BC＝6 cm, CE＝4 cm であるとき, 次の問いに答えなさい。

（長崎県 2007 年度）

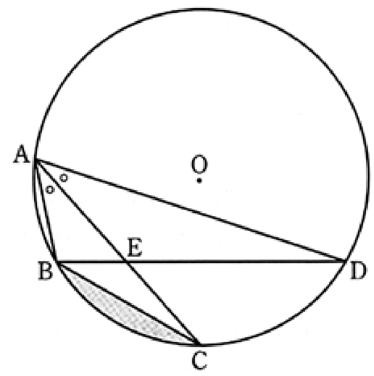
図 1



問1. ∠CBE の大きさは何度か。

問2. △ABC∽△BEC であることを証明せよ。

図 2



問3. 線分 AE の長さは何 cm か。

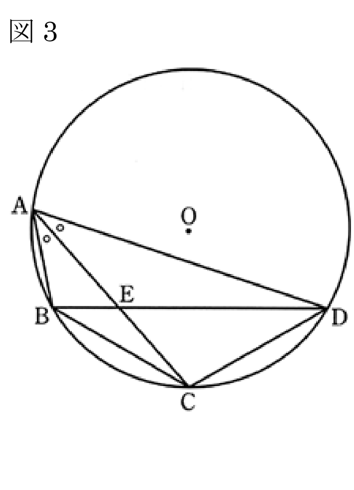
問4. 次の(1), (2)に答えよ。

(1) 円 O の半径は何 cm か。

(2) 図 2 のように点 A をふくまない弧 BC と線分 BC で囲まれた部分(図 2 の影をつけた部分)の面積は何 cm^2 か。

問5. 図 3 において, 四角形 ABCD の面積は何 cm^2 か。

図 3



解答欄

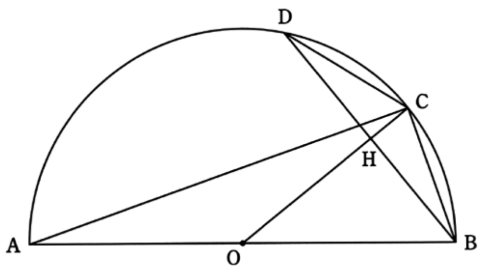
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">°</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問4</td><td>(1)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>問5</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1 30°
問2
証明
△ABC と△BEC において
$$\begin{cases} \angle BAC = \angle EBC = 30^\circ & \cdots ① \\ \angle ACB = \angle BCE(\text{共通}) & \cdots ② \end{cases}$$
①, ②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABC∽△BEC
問3 5cm
問4
(1) 6cm
(2) $6\pi - 9\sqrt{3}$ cm^2
問5 $\dfrac{81\sqrt{3}}{4}$ cm^2
解説
問4
(1)
OB, OC を結ぶ。
円周角の定理より$\angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ$
円の半径より OB＝OC
よって△OBC は正三角形だから
円の半径は OB＝BC＝6cm
問5
A, C から直線 BD に垂線 AK, CH をひく。
△CBD は CB＝CD, 底角が 30° の二等辺三角形だから
$CH = \dfrac{6}{2} = 3$, $BH = DH = 3\sqrt{3}$
AK$/\!/$CH より
AK : CH＝AE : CE
AK : 3＝5 : 4
$AK = \dfrac{15}{4}$
よって四角形 ABCD の面積は
$$\triangle ABD + \triangle CBD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times \frac{15}{4} + \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 3 = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

【問 16】

図のように，線分 AB を直径とする半径 3 cm の半円 O がある。点 C，D は半円の周上にあり，線分 BD と線分 OC の交点を H とするとき，次の1～3の問いに答えなさい。ただし，BC＝CD＝2 cm とする。

（大分県 2007 年度）



問1. 線分 AC の長さを求めなさい。

問2. △ABC∽△BCH であることを，次のように証明した。ア には適する記号を書き，イ には証明の続きを書いて，証明を完成させなさい。

【証明】

△ABC と△BCH において

△OBC は OB＝OC＝3 cm より二等辺三角形であるから

ア	∠　　　　＝∠	…①

イ

問3. 四角形 ABCD の面積を求めなさい。

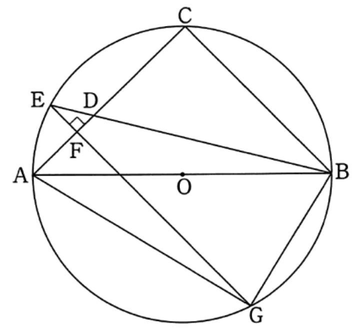
解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td colspan="2">【証明】
△ABC と△BCH において
△OBC は OB＝OC＝3 cm より二等辺三角形であるから
ア ∠　　＝ ∠　　…①</td></tr>
<tr><td>イ</td><td></td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1　$4\sqrt{2}$ cm
問2
証明
△ABC と△BCH において
△OBC は OB＝OC＝3 cm より
∠ABC＝∠BCH…①
△CDB で CB＝CD だから二等辺三角形になるので
∠CDB＝∠CBH…②
また，$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角は等しいので
∠BAC＝∠CDB…③
②，③より∠BAC＝∠CBH…④
①，④より
2 組の角がそれぞれ等しいので
△ABC∽△BCH
問3　$\dfrac{64\sqrt{2}}{9}$ cm^2
解説
問3
△ABC∽△BCH より
BC : CH＝AB : BC
2 : CH＝6 : 2
$\mathrm{CH}=2\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$
AC : BH＝AB : BC
$4\sqrt{2}$: BH＝6 : 2
$\mathrm{BH}=\dfrac{4\sqrt{2}\times2}{6}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$
直径 AB に対する円周角より∠BCA＝90°
△CBD は CB＝CD の二等辺三角形で∠CHB＝∠BCA＝90° なので DH＝BH
よって $\mathrm{BD}=2\mathrm{BH}=2\times\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$
△ABD で∠ADB＝90° だから
三平方の定理より $\mathrm{AD}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{14}{3}$
よって四角形 ABCD＝△CBD＋△ABD
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{14}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}+\dfrac{56\sqrt{2}}{9}=\dfrac{64\sqrt{2}}{9}$ cm^2

【問 17】

図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円の直径である。点 C は円 O の周上にあって，点 D は線分 AC 上にある。点 E は BD の延長と円 O との交点で，点 F は E から線分 AC にひいた垂線と AC との交点である。また，点 G は EF の延長と円 O との交点である。このとき，次の各問いに答えなさい。



（熊本県 2007 年度）

問1．$\triangle BCD \backsim \triangle AGB$ であることを証明しなさい。

問2．AB＝7 cm，AC＝5 cm，AD＝2 cm であるとき，線分 BG の長さを求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

問1	証明
問2	cm

解答
問1
証明
△BCDと△AGBにおいて
ABは円Oの直径だから
∠BCD＝∠AGB＝90°　…①
またAC⊥EFだから∠EFD＝90°
∠BCD＝∠EFDよりBC∥GEだから
∠DBC＝∠BEG…②
∠BEGと∠BAGは$\overset{\frown}{BG}$に対する円周角だから
∠BEG＝∠BAG…③
②, ③より
∠DBC＝∠BAG…④
①, ④より
2組の角がそれぞれ等しいから
△BCD∽△AGB
問2　$\frac{7\sqrt{33}}{11}$ cm
解説
問2
△ABCにおいて
三平方の定理より$BC=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$
△CBDで$DC=5-2=3$
三平方の定理より$BD=\sqrt{3^2+(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{33}$
△AGB∽△BCDより
$BG:DC=AB:BD$
$BG:3=7:\sqrt{33}$
$BG=\frac{3\times7}{\sqrt{33}}=\frac{7\sqrt{33}}{11}$ cm