

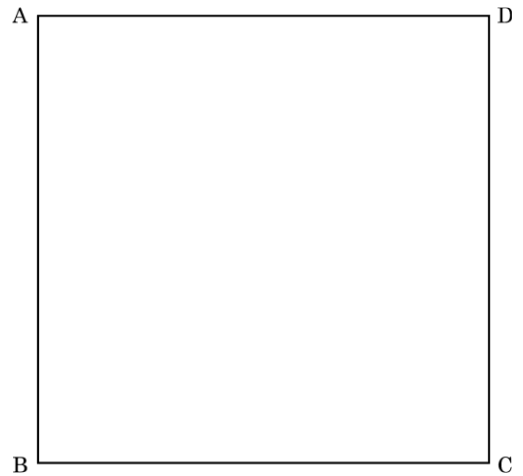
3. 合同の証明と長さ・求積などの複合問題 【2005 年度出題】

【問 1】

図の正方形 ABCD において、点 A と点 C を結び、 $\angle DAC$ の二等分線と辺 CD との交点を E とします。

あとの1～3の問いに答えなさい。

(宮城県 2005 年度)



1. 点 E を解答用紙の図に作図しなさい。ただし、作図に用いた線は消さないでおきなさい。

2. 点 E から線分 AC に垂線をひき、その垂線と線分 AC との交点を H とします。

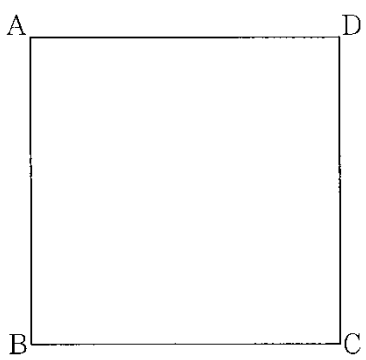
次の(1), (2)の問いに答えなさい。

- (1) $\triangle AED \equiv \triangle AEH$ を証明しなさい。

- (2) 線分 DE と長さが等しい線分をすべて答えなさい。

3. 辺 BC 上に点 P をとり、点 A と点 P を結びます。 $\angle DAP$ の二等分線が辺 CD の中点を通るとき、線分 BP の長さを求めなさい。ただし、 $AB=2\text{ cm}$ とします。

1



2

(1)

証明

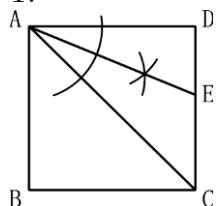
(2)

3

cm

解答

1.



2.

(1)

証明

$\triangle AED$ と $\triangle AEH$ において

四角形 $ABCD$ は正方形であるから $\angle EDA = 90^\circ$

よって, $\angle EDA = \angle EHA = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$AE = AE$ (共通) $\cdots \textcircled{2}$

AE は $\angle DAC$ の二等分線であるから

$\angle DAE = \angle HAE \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle AED \equiv \triangle AEH$

(2)

HE, HC

3. $\frac{3}{2} \text{ cm}$

解説

2.

(1)

$\triangle AED$ と $\triangle AEH$ において

四角形 $ABCD$ は正方形であるから $\angle EDA = 90^\circ$

よって, $\angle EDA = \angle EHA = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$AE = AE$ (共通) $\cdots \textcircled{2}$

AE は $\angle DAC$ の二等分線であるから

$\angle DAE = \angle HAE \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから $\triangle AED \equiv \triangle AEH$

(2)

(1)より, $DE = HE$

また, $\triangle EHC$ は $\angle ECH = 45^\circ$ より直角二等辺三角形だから,

$HE = HC$

よって, HE, HC の2つが DE と等しい。

3.

CD の中点を F とし, F から AP にひいた垂線と AP との交点を G とする。

$DF = FG = FC$ より,

$\triangle FGP \equiv \triangle FCP$

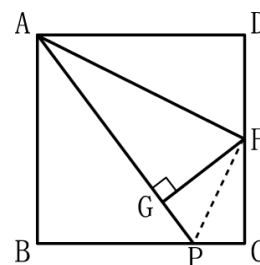
よって, $GP = CP$

$GP = x \text{ cm}$ とおいて,

$\triangle ABP$ に三平方の定理を用いると,

$$(2+x)^2 = 2^2 + (2-x)^2$$

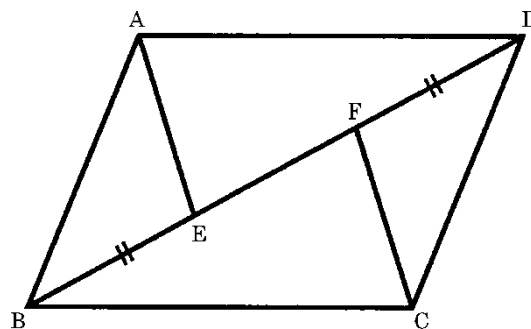
これを解くと, $x = \frac{1}{2}$ より, $BP = \frac{3}{2} \text{ cm}$



【問 2】

図のように、平行四辺形 $ABCD$ の対角線 BD 上に $BE=DF$ となるような、2点 E, F をとる。このとき、 $\triangle AED \equiv \triangle CFB$ であることを証明しなさい。

(栃木県 2005 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle AED$ と $\triangle CFB$ において

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$$AD = CB \quad \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel BC$ より, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle ADE = \angle CBF \quad \cdots \textcircled{2}$$

また $DE = BD - BE$, $BF = BD - DF$

仮定より $BE = DF$

$$\text{よって } DE = BF \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AED \equiv \triangle CFB$$

解説

$\triangle AED$ と $\triangle CFB$ において

四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから

$$AD = CB \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel BC$ より, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle ADE = \angle CBF \cdots \textcircled{2}$$

また $DE = BD - BE$, $BF = BD - DF$

仮定より $BE = DF$

$$\text{よって } DE = BF \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

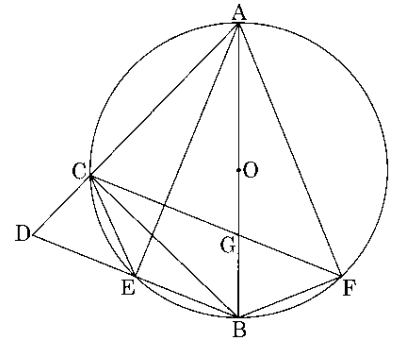
$$\triangle AED \equiv \triangle CFB$$

【問 3】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に、2点 A, B とは異なる点 C をとる。線分 AC を C の方向に延ばした直線上に点 D を $AB=AD$ となるようにとり線分 BD と円 O との交点を E とする。また点 C をふくまない $\widehat{AB}$ 上に点 F を $DB \parallel CF$ となるようにとり、線分 AB と線分 CF との交点を G とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2005 年度)



(ア) 三角形 ACE と三角形 AGF が合同であることを次のように証明した。空欄にあてはまるものとして最も適するものを $\boxed{(a)}$, $\boxed{(b)}$ には【A 群】から、 $\boxed{(あ)}$ ~ $\boxed{(う)}$ には【B 群】からそれぞれ1つずつ選びその番号を書きなさい。

[証明]

$\triangle ACE$ と $\triangle AGF$ において、

まず、 $\triangle ADB$ の辺 AD, AB 上にそれぞれ点 C, G があり、 $DB \parallel CG$ であるから、

$$AC:AD=AG:AB$$

さらに、 $AD=AB$ であるから、

$$\boxed{(a)} \cdots \text{①}$$

次に、 $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから、

$$\angle AEC = \angle AFC$$

よって、 $\angle AEC = \angle AFG \cdots \text{②}$

同様に、 $\widehat{CE}$ に対する円周角は等しいから、

$$\boxed{(b)} \cdots \text{③}$$

また、 $\boxed{(あ)}$ から、

$$\angle CBE = \angle BCF \cdots \text{④}$$

さらに、 $\boxed{(い)}$ から、

$$\angle BCF = \angle BAF$$

よって、 $\angle BCF = \angle GAF \cdots \text{⑤}$

③, ④, ⑤より、 $\angle CAE = \angle GAF \cdots \text{⑥}$

ここで、三角形の内角の和は 180° であることから、

$$\angle ACE = 180^\circ - \angle AEC - \angle CAE \cdots \text{⑦}$$

$$\angle AGF = 180^\circ - \angle AFG - \angle GAF \cdots \text{⑧}$$

②, ⑥, ⑦, ⑧より、 $\angle ACE = \angle AGF \cdots \text{⑨}$

①, ⑥, ⑨より、 $\boxed{(う)}$ から、

$$\triangle ACE \equiv \triangle AGF$$

【A 群】	【B 群】
1. $\angle AGC = \angle ABE$ 2. $\angle BAE = \angle BCE$ 3. $\angle CAE = \angle CBE$ 4. $AC = AG$ 5. $AE = AF$ 6. $CE = GF$	1. 平行線の同位角は等しい 2. 平行線の錯角は等しい 3. $\widehat{BE}$ に対する円周角は等しい 4. $\widehat{BF}$ に対する円周角は等しい 5. 3辺がそれぞれ等しい 6. 2辺とその間の角がそれぞれ等しい 7. 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい

(イ) $\angle ADB = 68^\circ$ のとき, $\angle AFC$ の大きさを求めなさい。

解答欄

	(a)	(b)	(あ)	(い)	(う)
(7)					
(イ)	$\angle AFC =$ $^\circ$				

解答

(ア) (a) 4 (b) 3 (あ)2 (い)4 (う)7

(イ) $\angle AFC = 46^\circ$

解説

(ア)

$\triangle ACE$ と $\triangle AGF$ において,

まず, $\triangle ADB$ の辺 AD , AB 上にそれぞれ点 C , G があり,

$DB \parallel CG$ であるから,

$AC:AD=AG:AB$

さらに, $AD=AB$ であるから,

$AC=AG \cdots ①$

次に, $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しいから,

$\angle AEC = \angle AFC$

よって, $\angle AEC = \angle AFG \cdots ②$

同様に, $\widehat{CE}$ に対する円周角は等しいから,

$\angle CAE = \angle CBE \cdots ③$

また, 平行線の錯角は等しいから,

$\angle CBE = \angle BCF \cdots ④$

さらに, $\widehat{BF}$ に対する円周角は等しいから,

$\angle BCF = \angle GAF \cdots ⑤$

③, ④, ⑤より,

$\angle CAE = \angle GAF \cdots ⑥$

ここで, 三角形の内角の和は 180° であることから,

$\angle ACE = 180^\circ - \angle AEC - \angle CAE \cdots ⑦$

$\angle AGF = 180^\circ - \angle AFG - \angle GAF \cdots ⑧$

②, ⑥, ⑦, ⑧より,

$\angle ACE = \angle AGF \cdots ⑨$

①, ⑥, ⑨より,

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle ACE \equiv \triangle AGF$

(イ)

$\triangle ABD$ は $AB=AD$ の二等辺三角形だから,

$\angle ABD = \angle ADB = 68^\circ$

$DB \parallel CF$ より平行線の同位角は等しいから

$\angle ABD = \angle AGC = \angle ADB = \angle ACG = 68^\circ \cdots ①$

また, 線分 AB は円 O の直径なので,

$\angle ACB = 90^\circ \cdots ②$

①, ②より,

$\angle BCF = \angle ACB - \angle ACG = 22^\circ \cdots ③$

円周角の定理より,

$\angle BCF = \angle FAB = 22^\circ \cdots ④$

よって, $\triangle AFG$ で,

$\angle FAB + \angle AFC = \angle AGC \cdots ⑤$

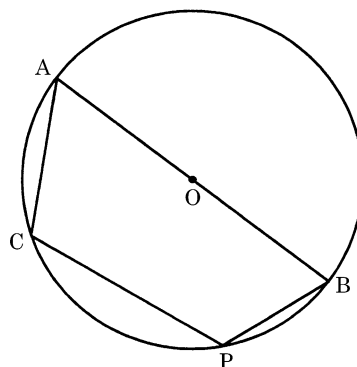
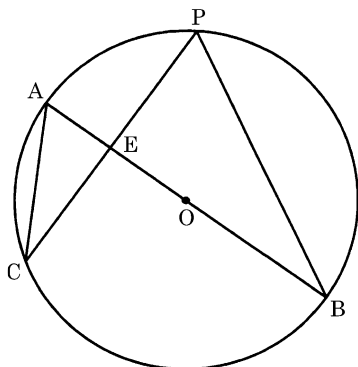
したがって, ①, ④, ⑤より,

$\angle AFC = \angle AGC - \angle FAB = 46^\circ$

【問 4】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C がある。点 P を円 O の周上にとり、点 A と C , B と P , C と P をそれぞれ結ぶ。点 P のとり方を(1), (2)のように変えたとき、次の問いに答えなさい。

(富山県 2005 年度)



(1) 点 P を $\widehat{ACB}$ でない方の $\widehat{AB}$ 上にとるとき、 AB と CP の交点を E とする。

① $\widehat{APB}$ 上において、 $\widehat{AP}:\widehat{PB} = 1:2$ のとき、 $\angle ACP$ の大きさを求めなさい。

② 点 E が中心 O と重なるとき、 $\triangle ACE$ と $\triangle PBE$ が合同になることを証明しなさい。

(2) 右の図のように、点 P を $\widehat{CAB}$ でない方の $\widehat{CB}$ 上にとる。このときにできる四角形 $ACPB$ の面積がもっとも大きくなる時、 $\triangle CPB$ の面積を求めなさい。ただし、 $AB=9\text{ cm}$, $AC=3\text{ cm}$ とする。

解答欄

(1)	①	度
	②	$\triangle ACE$ と $\triangle PBE$ において
(2)	cm ²	

解答

(1)

①30 度

②

$\triangle ACE$ と $\triangle PBE$ において

半径の長さは等しいから

$AE=PE$ …①

対頂角は等しいから

$\angle AEC=\angle PEB$ …②

円周角は等しいから

$\angle CAE=\angle BPE$ …③

したがって, ①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACE\equiv\triangle PBE$

(2)

$9\sqrt{2}\text{ cm}^2$

解説

(1)

①

$\angle AOP=\frac{1}{3}\angle AOB=60^\circ$ 円周角の定理より $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP=30^\circ$

②

$\triangle ACE$ と $\triangle PBE$ において半径の長さは等しいから

$AE=PE$ …①

対頂角は等しいから

$\angle AEC=\angle PEB$ …②

円周角は等しいから

$\angle CAE=\angle BPE$ …③

したがって, ①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACE\equiv\triangle PBE$

(2)

四角形 $ACPB$ の面積が最大になるのは $OP\perp CB$ のとき。

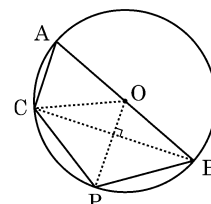
また, $\triangle ACB$ は直角三角形だから,

$BC=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\text{ cm}$ より, $OP\perp CB$ のとき

$\triangle CPB=(\text{四角形 } OCPB \text{ の面積})-\triangle OCB$

$=OP\times CB\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\triangle ACB$

$=\frac{27\sqrt{2}}{2}-\frac{9\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}\text{ cm}^2$



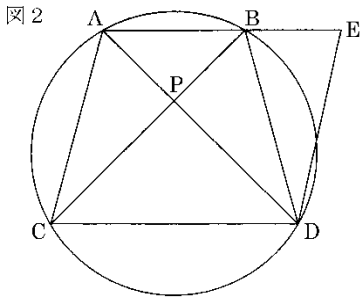
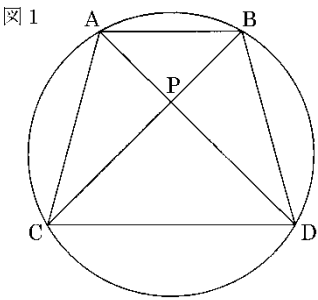
【問 5】

図1のように、円に2つの平行な弦 AB と CD をひき、四角形 $ACDB$ をつくる。
対角線 AD と BC の交点を P とする。

このとき、次の問いに答えよ。

(福井県 2005 年度)

- (1) $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$ であることを証明せよ。
- (2) 図2は、図1において、点 D を通り線分 AC に平行な直線と、直線 AB との交点を E とした場合を表している。
 $CD = 4 \text{ cm}$, $\angle CAD = 60^\circ$, $AD \perp BC$ のとき、
ア $\angle EBD$ の大きさを求めよ。
イ $\triangle BDE$ の面積を求めよ。



解答欄

(1)		
(2)	ア	度
	イ	cm ²

解答

(1)

$\triangle ACD$ と $\triangle BDC$ において

共通な辺だから, $CD=DC$ …①

$AB \parallel CD$ だから

$\angle ADC = \angle BAD$ …②

$\widehat{DB}$ に対する円周角は等しいから

$\angle BAD = \angle BCD$ …③

②, ③から

$\angle ADC = \angle BCD$ …④

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから

$\angle CAD = \angle DBC$ …⑤

三角形の内角の和は 180° であることと, ④, ⑤から

$\angle ACD = \angle BDC$ …⑥

①, ④, ⑥から

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACD \equiv \triangle BDC$

(2)

ア 75° イ $\frac{8}{3} \text{ cm}^2$

解説

(1)

$\triangle ACD$ と $\triangle BDC$ において共通な辺だから, $CD=DC$ …①

$AB \parallel CD$ だから, $\angle ADC = \angle BAD$ …②

$\widehat{DB}$ に対する円周角は等しいから, $\angle BAD = \angle BCD$ …③

②, ③から, $\angle ADC = \angle BCD$ …④

$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから, $\angle CAD = \angle DBC$ …⑤

三角形の内角の和は 180° であることと, ④, ⑤から, $\angle ACD = \angle BDC$ …⑥

①, ④, ⑥から, 1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$

(2)

ア.

$AD \perp BC$, $\angle CAD = 60^\circ$ より, $\angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$ …①

$AC \parallel ED$ より, 錯角が等しいので, $\angle CAD = \angle ADE = 60^\circ$ …②

①, ②より, $\angle BDE = \angle ADE - \angle ADB = 30^\circ$

四角形 $ACDE$ が平行四辺形であることと, (1)より, $AC = ED = BD$ だから,

$\triangle BDE$ は二等辺三角形であることがわかる。

よって, $\angle EBD = (180^\circ - \angle BDE) \div 2 = 75^\circ$

イ.

$\triangle PDC$ は直角二等辺三角形なので, $PD:CD = 1:\sqrt{2}$

よって, $PD = \frac{1}{\sqrt{2}} CD = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

題意より, $\triangle PBD$ は $\angle PBD = 60^\circ$ の直角三角形だから,

$DE = BD = \frac{2}{\sqrt{3}} PD = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$ B から DE に垂線 BH をひくと,

$\triangle BDH$ は 30° と 60° の角をもつ直角三角形だから, $BH = \frac{BD}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$

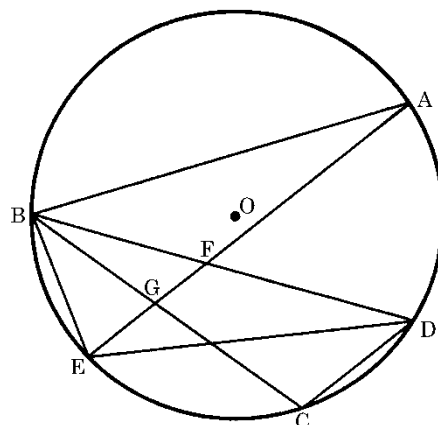
したがって, $\triangle BDE$ の面積は $\frac{1}{2} \times DE \times BH = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$

【問 6】

図において、4点 A, B, C, D は円 O の円周上の点であり、 $BA=BD$ である。点 A を通り DC に平行な直線と円 O との交点を E とする。AE と BD, BC との交点をそれぞれ F, G とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(静岡県 2005 年度)



(1) $\triangle ABG \equiv \triangle DBE$ であることを証明しなさい。

(2) $AB=10\text{ cm}$, $BE=3\text{ cm}$, $CG=5\text{ cm}$ のとき BF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

$\triangle ABG$ と $\triangle DBE$ に関して, $\angle ABD = \angle AED$ (円周角)

$\angle AED = \angle CDE$ (錯角)

また円周角の定理より, $\angle CDE = \angle CBE$

したがって, $\angle ABD = \angle CBE$ であり,

$\angle ABG = \angle ABD + \angle CBD = \angle CBE + \angle CBD = \angle DBE$

である。また $\angle BAG = \angle BDE$ (円周角)と仮定より, $BA = BD$

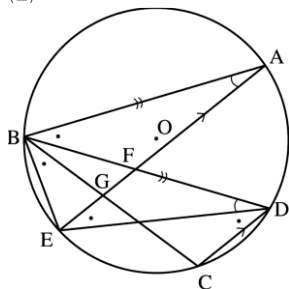
であるから, 1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

$\triangle ABG \equiv \triangle DBE$ である。

(2) $\frac{15}{4} \text{ cm}$

解説

(1)



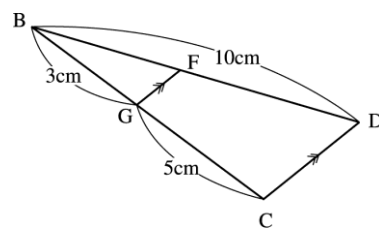
(2)

$BA = BD$ より, $BD = 10 \text{ cm}$

また, $\triangle ABG \equiv \triangle DBE$ より, $BG = BE = 3 \text{ cm}$

$GF \parallel CD$ より, $BG : BC = BF : BD = 3 : 8$

であるから, $BF = 10 \times \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \text{ cm}$

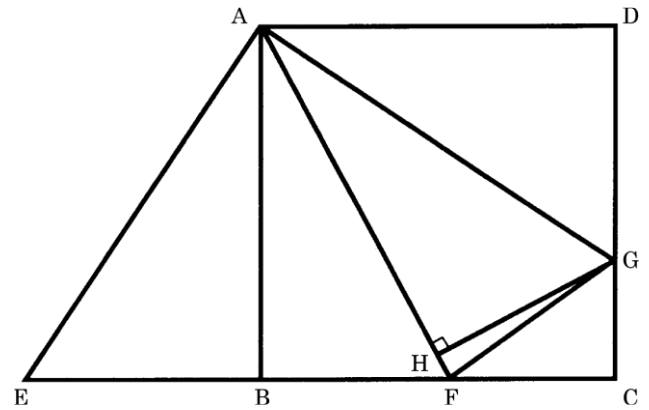


【問 7】

図のように、正方形 ABCD と辺 CB の延長線上に $EB < AB$ である点 E がある。辺 BC 上に $AE = EF$ となる点 F、辺 CD 上に $AE = AG$ となる点 G をとり、点 G から線分 AF へひいた垂線を GH とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2005 年度)



- (1) $\triangle AEB \equiv \triangle AGD$ であることの証明を、次の (ア) と (イ) に適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

〈証明〉

$\triangle AEB$ と $\triangle AGD$ において、

条件より、

$$AE = AG \cdots \textcircled{1}$$

また、四角形 ABCD が正方形だから、

$$\text{ (ア) } \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle EBA = \angle GDA = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から、

2つの直角三角形の (イ) が、それぞれ等しいから、

$$\triangle AEB \equiv \triangle AGD$$

- (2) $\angle AGH = \angle AFB$ であることを証明しなさい。

- (3) $AB = 5 \text{ cm}$, $AE = 6 \text{ cm}$ のとき、四角形 ACFG の面積を求めなさい。なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ を用いて最も簡単な形で書きなさい。

解答欄

(1)	(ア)	
	(イ)	
(2)	証明	
(3)	cm ²	

解答

(1)

(ア) $AB=AD$

(イ) 斜辺と他の一辺

(2)

証明

$\triangle AGH$ と $\triangle AFB$ において,

$$\angle AHG = \angle ABF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel EF$ より,

$$\angle DAF = \angle EFA \text{ (錯角)} \cdots \textcircled{2}$$

$EA=EF$ より,

$\triangle EFA$ は二等辺三角形だから,

$$\angle EAF = \angle EFA \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より,

$$\angle DAF = \angle EAF \cdots \textcircled{4}$$

$\triangle AGD \equiv \triangle AEB$ より,

$$\angle GAD = \angle EAB \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より,

$$\angle HAG = \angle BAF \cdots \textcircled{6}$$

①, ⑥より2組の角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle AGH \sim \triangle AFB$$

よって, $\angle AGH = \angle AFB$

(3)

$$33 - 3\sqrt{11} \text{ cm}^2$$

解説

(2)

$\triangle AGH$ と $\triangle AFB$ において, $\angle AHG = \angle ABF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$AD \parallel EF$ より $\angle DAF = \angle EFA$ (錯角) $\cdots \textcircled{2}$

$EA=EF$ より $\triangle EFA$ は二等辺三角形だから, $\angle EAF = \angle EFA \cdots \textcircled{3}$

②, ③より $\angle DAF = \angle EAF \cdots \textcircled{4}$ $\triangle AGD \equiv \triangle AEB$ より

$\angle GAD = \angle EAB \cdots \textcircled{5}$ ④, ⑤より $\angle HAG = \angle BAF \cdots \textcircled{6}$

①, ⑥より2組の角がそれぞれ等しいから, $\triangle AGH \sim \triangle AFB$

よって $\angle AGH = \angle AFB$

(3)

$$EB = \sqrt{36-25} = \sqrt{11} \text{ cm} \quad FC = BC - BF = 5 - (6 - \sqrt{11}) = \sqrt{11} - 1 \text{ cm}$$

$$\triangle AEB \equiv \triangle AGD \text{ であるから, } \triangle AEB = \triangle AGD = \frac{1}{2} \times \sqrt{11} \times 5 = \frac{5\sqrt{11}}{2} \text{ cm}^2$$

$$\triangle FCG = \frac{1}{2} \times (\sqrt{11} - 1) \times (5 - \sqrt{11}) = 3\sqrt{11} - 8 \text{ cm}^2$$

$$\text{四角形 AEFG} = \triangle AEB + (\text{四角形 ABCD} - \triangle FCG - \triangle AGD)$$

$$= \frac{5\sqrt{11}}{2} + 25 - (3\sqrt{11} - 8) - \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

$$= 33 - 3\sqrt{11} \text{ cm}^2$$

【問 8】

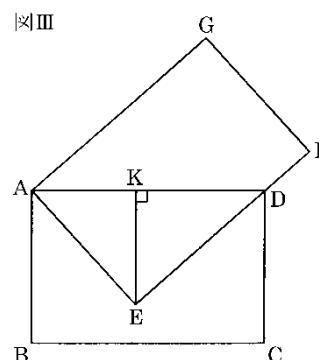
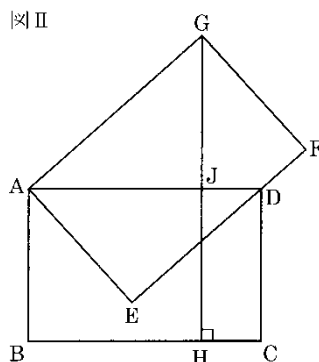
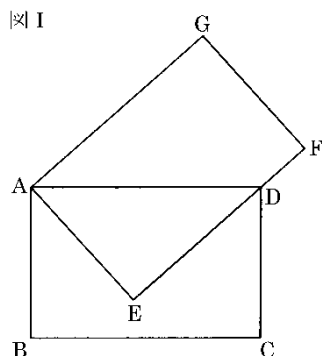
次は、スーパーマーケットなどにある買い物かごを右の写真のように重ねたときの側面の様子をモデルにした問題である。

図 I において、四角形 $ABCD$ と四角形 $AEFG$ は合同な長方形であり、 E は長方形 $ABCD$ の内部にあって D は辺 EF 上にある。 $AB=AE=20$ cm, $AD=AG=30$ cm である。



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2005 年度 後期)



- (1) 次のア～エで示した鋭角のうち、鋭角 $\angle CDE$ と大きさが等しいものはどれですか。一つ選び、記号を書きなさい。

ア $\angle GAD$ イ $\angle DAE$ ウ $\angle EAB$ エ $\angle ADE$

- (2) G から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点を H とし、線分 GH と辺 AD との交点を J とする。図 II は、図 I に点 H 、線分 GH 、点 J をかき加えたものである。

① $\triangle GAJ \equiv \triangle ADE$ であることを証明しなさい。

② 線分 GH の長さを求めなさい。

- (3) E から辺 AD にひいた垂線と辺 AD との交点を K とする。図 III は、図 I に点 K と線分 EK をかき加えたものである。 $\triangle ADE$ の面積と線分 EK の長さをそれぞれ求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

(1)			
(2)	①	証明	
	②	cm	
(3)	求め方		
	△ADE の面積 cm ² 線分EK の長さ cm		

解答

(1) イ

(2)

①

証明

$\triangle GAJ$ と $\triangle ADE$ において

$GA=AD$ (仮定) $\cdots \textcircled{7}$

$GH \perp BC$, $AD \parallel BC$ だから

$\angle GJA = 90^\circ$

四角形 $AEFG$ は長方形だから

$\angle AED = 90^\circ$

よって $\angle GJA = \angle AED = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$AG \parallel EF$ だから

$\angle GAJ = \angle ADE$ (錯角) $\cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{8}$ より

直角三角形の斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しいから

$\triangle GAJ \equiv \triangle ADE$

②

40

(3)

求め方

$\angle AED = 90^\circ$ だから $AE^2 + DE^2 = AD^2$

$AD = 30\text{cm}$, $AE = 20\text{cm}$ だから,

$DE = a\text{cm}$ とすると $20^2 + a^2 = 30^2$

これを解くと, $a > 0$ より $a = 10\sqrt{5}$

だから

$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times AE \times DE = 100\sqrt{5}\text{ cm}^2$

また, $EK = b\text{ cm}$ とすると, $AD \perp EK$ だから

$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times AD \times EK = 15b\text{ cm}^2$

よって $15b = 100\sqrt{5}$

これを解くと $b = \frac{20\sqrt{5}}{3}$

$\triangle ADE$ の面積 $100\sqrt{5}$

線分 EK の長さ $\frac{20\sqrt{5}}{3}$

解説

(2)

① 証明

$\triangle GAJ$ と $\triangle ADE$ において, $GA=AD$ (仮定) $\cdots \textcircled{7}$

$GH \perp BC$, $AD \parallel BC$ だから $\angle GJA = 90^\circ$ 四角形 $AEFG$ は長方形だから $\angle AED = 90^\circ$

よって, $\angle GJA = \angle AED = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$AG \parallel EF$ だから, $\angle GAJ = \angle ADE$ (錯角) $\cdots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{8}$ より 直角三角形の斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しいから $\triangle GAJ \equiv \triangle ADE$

② ①より, $GJ=AE=20\text{cm}$ となるので, $GH=GJ+JH=20+20=40\text{cm}$

(3) $\angle AED = 90^\circ$ だから $AE^2 + DE^2 = AD^2$ $AD = 30\text{cm}$, $AE = 20\text{cm}$ だから $DE = a\text{ cm}$ とすると,

$20^2 + a^2 = 30^2$ これを解くと, $a > 0$ より, $a = 10\sqrt{5}$ だから, $\triangle ADE = \frac{1}{2} \times AE \times DE = 100\sqrt{5}\text{ cm}^2$

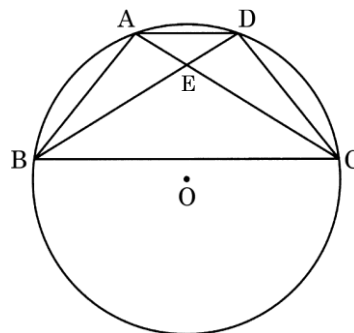
また, $EK = b\text{ cm}$ とすると, $AD \perp EK$ だから, $\triangle ADE = \frac{1}{2} \times AD \times EK = 15b\text{ cm}^2$ よって, $15b = 100\sqrt{5}$

これを解くと, $b = \frac{20\sqrt{5}}{3}$

【問 9】

図のように、円 O の周上に4点 A, B, C, D があり、 $AD \parallel BC$, $AD=6 \text{ cm}$, $BC=18 \text{ cm}$, $AB=10 \text{ cm}$ である。線分 AC と DB の交点を E とする。
次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2005 年度)



- (1) $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ が合同であることを次のように証明した。次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ には、あてはまるものを、下の語群のア～クから選び、その記号を書きなさい。また、 $\boxed{a}$ ～ $\boxed{c}$ には、適切な語句を書きなさい。

(証明)

$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

$\boxed{1}$ は共通…①

$\widehat{BC}$ に対する $\boxed{a}$ は等しいから、 $\angle BAC = \angle CDB$ …②

$\widehat{AB}$ に対する $\boxed{a}$ は等しいから、 $\angle ACB = \angle ADB$

平行線の $\boxed{b}$ は等しいから、 $\angle ADB = \angle DBC$

したがって、 $\angle ACB = \angle \boxed{2}$ …③

三角形の内角の和は 180° であることと、②、③から、 $\angle ABC = \angle \boxed{3}$ …④

①、③、④より、 $\boxed{c}$ がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$

語群

ア AB

イ BC

ウ BD

エ DE

オ BDC

カ CED

キ DBC

ク DCB

- (2) 線分 AC の長さを求めなさい。

- (3) $\triangle ABE$ の面積を求めなさい。

- (4) 円 O の半径を求めなさい。

解答欄

(1)	1		2		3	
	a				b	
	c					
(2)	cm					
(3)	cm ²					
(4)	cm					

解答

(1)

1. イ 2. キ 3. ク

a. 円周角 b. 錯角 c. 1辺とその両端の角

(2) $4\sqrt{13}$ cm

(3) 18cm^2

(4) $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ cm

解説

(2)

2点 A, D から辺 BC にそれぞれ垂線 AF, DG をひくと,

AD // BC より, 四角形 AFGD は長方形になるので, FG = AD = 6cm

また $\triangle ABF \cong \triangle DCG$ となることから $BF = CG = (18 - 6) \div 2 = 6\text{cm}$ $CF = 12\text{cm}$

$\triangle ABF$ に三平方の定理を用いて, $AF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm}$

$\triangle ACF$ に三平方の定理を用いて, $AC = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$ cm

(3)

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 18 \times 8 = 72\text{cm}^2$$

AD // BC より, $AE : CE = AD : CB = 6 : 18 = 1 : 3$ だから,

$$\triangle ABE = \frac{1}{1+3} \triangle ABC = \frac{1}{4} \times 72 = 18\text{cm}^2$$

(4)

点 B を通る直径を BH とすると, $\angle BAH = 90^\circ$

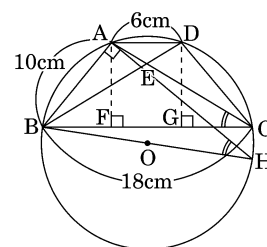
$\widehat{AB}$ に対する円周角だから, $\angle AHB = \angle ACB$

よって, $\triangle ABH \sim \triangle FAC$ となるので,

$$AB : BH = FA : AC = 8 : 4\sqrt{13} = 2 : \sqrt{13}$$

$$BH = \frac{\sqrt{13}}{2} AB = 5\sqrt{13} \text{ cm}$$

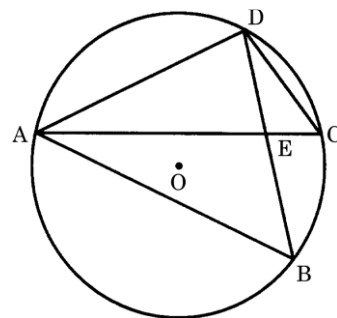
したがって, 円 O の半径は, $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ cm



【問 10】

図で、4点 A, B, C, D は円 O の周上にあり、 $AB=AC$, $\angle BAC=\angle CAD$ である。また、線分 AC と線分 BD との交点を E とする。各問いに答えよ。

(奈良県 2005 年度)

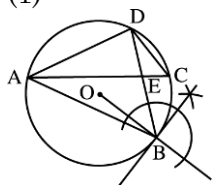


- (1) 点 B を通る円 O の接線を、定規とコンパスを使って解答欄の枠内に作図せよ。なお、作図に使った線は消さずに残しておくこと。
- (2) $\triangle ABE \equiv \triangle ACD$ であることを証明せよ。
- (3) $AB=10\text{ cm}$, $AD=8\text{ cm}$ のとき、線分 CD の長さを求めよ。

解答欄

(1)	
(2)	証明
(3)	cm

(1)



証明

仮定から

$$\angle BAE = \angle CAD \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle ABE = \angle ACD \quad \cdots \textcircled{3}$$

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABE \equiv \triangle ACD$$

(3)

$2\sqrt{5} \text{ cm}$

解説

(1)

解答の図のように半直線 OB をひき, 点 B を通る垂線をひく。

(2)

$\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において,

$$AB=AC\cdots\textcircled{1}$$

$$\angle BAE = \angle CAD \cdots \textcircled{2}$$

1つの弧に対する円周角は等しいから,

$$\angle ABE = \angle ACD \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より,

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle ABE \equiv \triangle ACD$$

(3)

$$\triangle ABE \equiv \triangle ACD \text{ より, } AE = AD = 8\text{cm}$$

BE=CD= x cm とおくと $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ だから

$$AB:DC=BE:CE \quad 10:x=x:(10-8)$$

これを解くと, $x^2=20$ $x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって, $CD=2\sqrt{5}$ cm

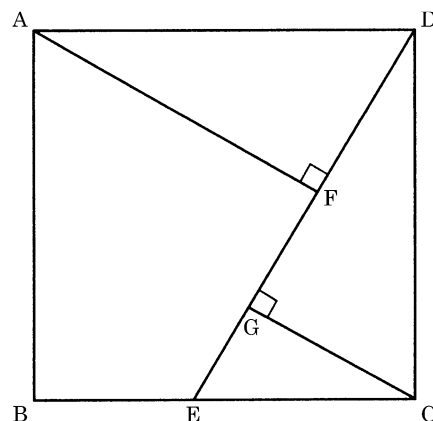
【問 11】

図のように、正方形 $ABCD$ がある。辺 BC 上に、2点 B , C と異なる点 E をとり、点 D と点 E を結ぶ。点 A から線分 DE に垂線をひき、その交点を F とする。また、点 C から線分 DE に垂線をひき、その交点を G とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(香川県 2005 年度)

(1) $\triangle AFD \equiv \triangle DGC$ であることを証明せよ。



(2) 点 B と点 G を結ぶ。点 G を通り、線分 BG に垂直な直線をひき、線分 AF との交点を H とするとき、 $BG = GH$ であることを証明せよ。

解答欄

(1)	証明
(2)	証明

解答

(1)

証明

$\triangle AFD$ と $\triangle DGC$ において

仮定より

$$\angle AFD = \angle DGC = 90^\circ$$

四角形 $ABCD$ は正方形だから

$$AD = DC$$

$$\angle ADF = \angle ADC - \angle CDG = 90^\circ - \angle CDG,$$

$$\angle DCG = 180^\circ - \angle DGC - \angle CDG = 90^\circ - \angle CDG \text{ だから,}$$

$$\angle ADF = \angle DCG$$

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFD \equiv \triangle DGC$$

(2)

証明

点 F と点 C を結ぶ。 $\triangle DFC$ と $\triangle CGB$ において

(1)より, $\triangle AFD \equiv \triangle DGC$ だから,

$$DF = CG \quad \angle ADF = \angle DCG$$

四角形 $ABCD$ は正方形だから,

$$DC = CB \quad \angle ADC = \angle DCB$$

$$\text{よって, } \angle FDC = \angle ADC - \angle ADF = \angle DCB - \angle DCG = \angle GCB$$

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから, $\triangle DFC \equiv \triangle CGB$

$$\text{よって, } CF = BG \quad \cdots \textcircled{1} \quad \angle DFC = \angle CGB \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } \angle GFC = 180^\circ - \angle DFC$$

$$\text{仮定より, } \angle HGB = \angle FGC = 90^\circ \text{ で,}$$

$$\angle HGF = 360^\circ - \angle HGB - \angle FGC - \angle CGB = 180^\circ - \angle CGB \text{ だから,}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } \angle GFC = \angle HGF \text{ 錯角が等しいから, } HG \parallel FC$$

$$\text{仮定より, } \angle HFG = \angle CGF \text{ 錯角が等しいから, } HF \parallel GC$$

2組の向かい合う辺がそれぞれ平行だから, 四角形 $HGCF$ は平行四辺形

$$\text{よって } CF = GH \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{したがって } \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より } BG = GH$$

解説

(1) $\triangle AFD$ と $\triangle DGC$ において, 仮定より, $\angle AFD = \angle DGC = 90^\circ$

四角形 $ABCD$ は正方形だから $AD = DC$, $\angle ADF = \angle ADC - \angle CDG = 90^\circ - \angle CDG$,

$$\angle DCG = 180^\circ - \angle DGC - \angle CDG = 90^\circ - \angle CDG \text{ だから, } \angle ADF = \angle DCG$$

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから, $\triangle AFD \equiv \triangle DGC$

(2) 点 F と点 C を結ぶ。

$\triangle DFC$ と $\triangle CGB$ において, (1)より, $\triangle AFD \equiv \triangle DGC$ だから, $DF = CG$

$$\angle ADF = \angle DCG \quad \text{四角形 } ABCD \text{ は正方形だから, } DC = CB \quad \angle ADC = \angle DCB$$

$$\text{よって, } \angle FDC = \angle ADC - \angle ADF = \angle DCB - \angle DCG = \angle GCB$$

$$2 \text{ 辺とその間の角がそれぞれ等しいから, } \triangle DFC \equiv \triangle CGB \text{ よって, } CF = BG \cdots \textcircled{1} \quad \angle DFC = \angle CGB \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } \angle GFC = 180^\circ - \angle DFC$$

$$\text{仮定より, } \angle HGB = \angle FGC = 90^\circ \text{ で, } \angle HGF = 360^\circ - \angle HGB - \angle FGC - \angle CGB = 180^\circ - \angle CGB \text{ だから,}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } \angle GFC = \angle HGF$$

$$\text{錯角が等しいから, } HG \parallel FC$$

$$\text{仮定より, } \angle HFG = \angle CGF$$

$$\text{錯角が等しいから, } HF \parallel GC$$

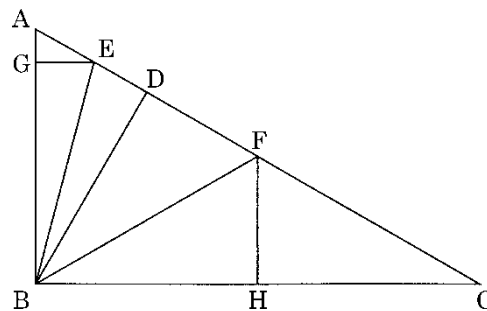
2組の向かい合う辺がそれぞれ平行だから, 四角形 $HGCF$ は平行四辺形

$$\text{よって, } CF = GH \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{したがって } \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より } BG = GH$$

【問 12】

$AB=4\text{ cm}$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle CAB=60^\circ$ の直角三角形 ABC がある。次の図のように、辺 AC 上に $\angle BDA=90^\circ$ となる点 D をとる。線分 AD 上に $\angle ABE=\angle DBE$ となる点 E , 線分 CD 上に $\angle CBF=\angle DBF$ となる点 F をとる。また、辺 AB 上に $\angle EGB=90^\circ$ となる点 G , 辺 BC 上に $\angle FHB=90^\circ$ となる点 H をとる。



次の(1), (3)は の中にあてはまる最も簡単な数を記入し, (2)は指示にしたがって答えよ。ただし, 根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2005 年度)

(1) $\angle BEG$ の大きさは $^\circ$ である。

(2) 図において, 合同な三角形を1組選び, その2つの三角形が合同であることを右の の中に証明せよ。

証明

(3) $\triangle EBD$ の面積は cm^2 である。

解答欄

解答は問題中の解答欄に記入しなさい。

解答

(1) 75

(2)

($\triangle DFB$ と $\triangle HFB$ において、「直角三角形の合同条件」を用いて証明した例)

$\triangle DFB$ と $\triangle HFB$ において

仮定から

$$\angle FDB = \angle FHB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle FBD = \angle FBH \cdots \textcircled{2}$$

また,

$$FB \text{ は共通 } \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

$$\triangle DFB \equiv \triangle HFB$$

$$(3) 12 - 6\sqrt{3} \text{ または } -6\sqrt{3} + 12$$

解説

(1)

$\triangle ABD$ で, $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$ だから, $\angle ABD = 30^\circ$

$\angle ABE = \angle DBE$ より, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABD = 15^\circ$ よって, $\triangle BGE$ で, $\angle GBE = 15^\circ$, $\angle EGB = 90^\circ$ から, $\angle BEG = 180^\circ - (90^\circ + 15^\circ) = 75^\circ$

(2)

$\triangle DFB$ と $\triangle HFB$ において, 仮定から, $\angle FDB = \angle FHB = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$$\angle FBD = \angle FBH \cdots \textcircled{2} \text{ また, } FB = FB \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より, 直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle DFB \equiv \triangle HFB$$

他に, $\triangle EGB \equiv \triangle EDB$ (斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。)

$\triangle FBH \equiv \triangle FCH$ (1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。)がある。

(3)

$\triangle ABC$ は, $AB = 4\text{cm}$ で, 30° , 60° の角をもつ直角三角形だから, $AB:$

$$BC = 1 : \sqrt{3}$$

$$4 : BC = 1 : \sqrt{3} \quad BC = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\triangle DFB \equiv \triangle HFB \quad \triangle FBH \equiv \triangle FCH \text{ より,}$$

$$BD = BH = \frac{1}{2} BC = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\triangle AGE \text{ で, } BG = BD = 2\sqrt{3} \text{ cm より,}$$

$$AG = 4 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

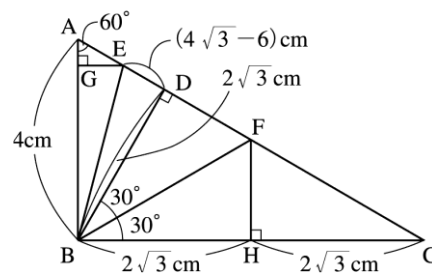
また, $\triangle AGE$ も, 30° , 60° の角をもつ直角三角形より,

$$AG : GE = 1 : \sqrt{3} \quad (4 - 2\sqrt{3}) : GE = 1 : \sqrt{3}$$

$$GE = \sqrt{3} (4 - 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - 6\text{cm}$$

よって, $\triangle EBD$ の面積は, $DE = GE = 4\sqrt{3} - 6\text{cm}$, $BD = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ から,

$$\frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} - 6) \times 2\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

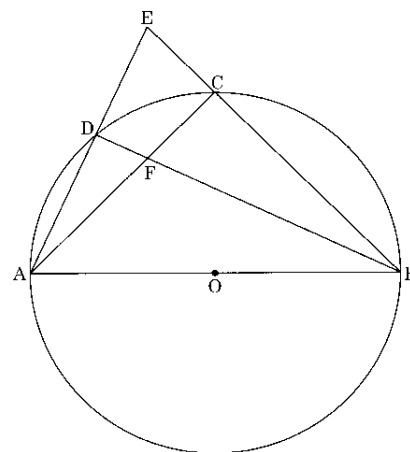


【問 13】

図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C があり、 $AC=BC$ である。また、図のように $\widehat{AC}$ 上に点 D をとり、弦 AD の延長と弦 BC の延長との交点を E 、弦 AC と弦 BD との交点を F とする。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2005 年度)



(1) $\angle DEB = 70^\circ$ のとき $\angle EBD$ の大きさを求めなさい。

(2) $\triangle ACE \equiv \triangle BCF$ であることを証明しなさい。

(3) $AD = 6 \text{ cm}$, $DE = 4 \text{ cm}$ のとき、次のア、イの問いに答えなさい。

ア 線分 BF の長さを求めなさい。

イ 線分 DF の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	$\angle EBD =$ 度	
(2)	証明	
(3)	ア	$BF =$ cm
	イ	$DF =$ cm

