

9. 式の証明の問題（2020 年度出題）

【問 1】

次は、直人さんと美里さんの会話の場面である。あとの問いに答えなさい。

＜会話の場面＞

直人：今年は 2020 年だね。

美里：2020 のように、千の位の数と十の位の数、百の位の数と一の位の数が、それぞれ同じである 4 けたの自然数にはどんな性質があるのかな。

直人：例えば 1818 や 3535 だね。素因数分解するとどうなるだろう。 $1818=2\times 3^2\times 101$ 、 $3535=5\times 7\times 101$ だから、どちらの数も 101 の倍数になるね。

美里：2020 も素因数分解してみると、 $2020=2^2\times 5\times 101$ だよ。101 の倍数になった！

直人：このような 4 けたの自然数はすべて 101 の倍数なのか、文字式を使って確かめてみよう。

直人さんは、千の位の数と十の位の数、百の位の数と一の位の数が、それぞれ同じである 4 けたの自然数は、すべて 101 の倍数であることを、文字式を使って下のように説明した。
に説明のつづきを書いて、説明を完成させなさい。

（山形県 2020 年度）

＜説明＞

4 けたの自然数の千の位の数を a 、百の位の数を b とすると、
4 けたの自然数は、

--

したがって、千の位の数と十の位の数、百の位の数と一の位の数が、それぞれ同じである 4 けたの自然数は 101 の倍数である。

解答欄

解答

$1000a+100b+10a+b$ と表される。

このとき、

$$\begin{aligned} 1000a+100b+10a+b &= 1010a+101b \\ &= 101(10a+b) \end{aligned}$$

$10a+b$ は整数だから、 $101(10a+b)$ は、
 101 の倍数である。

解説

101 の倍数であることの証明 $\Rightarrow 101 \times \bigcirc\bigcirc$ という形にすることを目指して式変形を行う。

【問 2】

「一の位の数で5である3けたの自然数は、5の倍数である」

このことを次のように説明した。

(茨城県 2020 年度)

(説明)

一の位の数で5である3けたの自然数の百の位を a 、十の位を b とすると、
この3けたの自然数は $\boxed{\text{ア}}$ と表すことができる。

ここで、

$$\boxed{\text{ア}} = 5 \times (\boxed{\text{イ}})$$

$\boxed{\text{イ}}$ は整数だから、 $5 \times (\boxed{\text{イ}})$ は5の倍数である。

したがって、一の位の数で5である3けたの自然数は、5の倍数である。

このとき、上の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる式を、それぞれ書きなさい。

解答欄

ア	
イ	

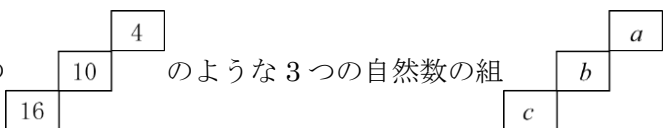
解答

ア $100a+10b+5$

イ $20a+2b+1$

【問 3】

右の図は、2020 年 2 月のカレンダーである。

この中の  のような 3 つの自然数の組 (a, b, c) において、 $b^2 - ac$ はつねに同じ値となる。

次の 内の文は、このことを証明したものである。

文中の ① , ② , ③ に当てはまる数をそれぞれ答えなさい。

2020 年 2 月						
日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29

(栃木県 2020 年度)

b, c をそれぞれ a を用いて表すと、

$b = a + \text{①}$, $c = a + \text{②}$ だから、

$b^2 - ac = (a + \text{①})^2 - a(a + \text{②})$

$= \text{③}$

したがって、 $b^2 - ac$ はつねに同じ値 ③ となる。

解答欄

①	
②	
③	

解答

①6

②12

③36

解説

図のカレンダーより、 b の日付は a の日付の 6 日後であり、 c の日付は a の日付の 12 日後であることがわかる。

このことから、 b, c をそれぞれ a を用いて表すと、 $b = a + 6$, $c = a + 12$ だから、

$b^2 - ac = (a + 6)^2 - a(a + 12) = 36$ したがって、 $b^2 - ac$ はつねに同じ値 36 となる。

【問 4】

1331 や 7227 のように、千の位の数と一の位の数、百の位の数と十の位の数がそれぞれ同じである 4 けたの整数は、いつでも 11 の倍数となることを、次のように証明した。

に証明の続きを書き、この証明を完成させなさい。

(群馬県 2020 年度 後期)

証明

a を 1 けたの自然数、 b を 1 けたの自然数または 0 とする。

千の位の数を a 、百の位の数を b とおいて、千の位の数と一の位の数、百の位の数と十の位の数がそれぞれ同じである 4 けたの整数を a, b を用いて表すと

したがって、このような 4 けたの整数は、いつでも 11 の倍数となる。

解答欄

〔証明の続き〕

解答

〔証明の続き〕

$1000a+100b+10b+a$ となる。

$$1000a+100b+10b+a$$

$$=1001a+110b$$

$$=11(91a+10b)$$

$91a+10b$ は整数であるから、 $11(91a+10b)$ は 11 の倍数である。

解説

百の位が a 、十の位が b 、一の位が c の 3 けたの整数は 100 が a 個と 10 が b 個と 1 が c 個集まった数なので、 $100a+10b+c$ と表すことができる。

今回は、千の位の数 a 、百の位の数 b において、千の位の数と一の位の数、百の位の数と十の位の数それぞれ同じである 4 けたの整数を表せばよいので、 $1000a+100b+10b+a=1001a+110b$ と表すことができる。

11 の倍数となることを証明したいので、 $1001a+110b=11(91a+10b)$ と変形すればよい。

ここで、「 a, b は整数なので、 $91a+10b$ も整数となるから、 $11(91a+10b)$ が 11 の倍数となること」を忘れずに書いておこう！

【問 5】

Sさんのクラスでは、先生が示した問題をみんなで考えた。
次の各問に答えよ。

(東京都 2020 年度)

[先生が示した問題]

a, b, h を正の数とし, $a > b$ とする。

右の図1は, 点O, 点Pをそれぞれ底面となる円の中心とし, 2つの円の半径がともに a cm であり, 四角形 ABCD は $AB = h$ cm の長方形で, 四角形 ABCD が側面となる円柱の展開図である。

右の図2は, 点Q, 点Rをそれぞれ底面となる円の中心とし, 2つの円の半径がともに b cm であり, 四角形 EFGH は $EF = h$ cm の長方形で, 四角形 EFGH が側面となる円柱の展開図である。

図1を組み立ててできる円柱の体積を X cm³, 図2を組み立ててできる円柱の体積を Y cm³ とするとき, $X - Y$ の値を a, b, h を用いて表しなさい。

図1

図2

問1 [先生が示した問題] で, $X - Y$ の値を a, b, h を用いて, $X - Y = \boxed{}$ と表すとき, に当てはまる式を, 次のア～エのうちから選び, 記号で答えよ。
ただし, 円周率は π とする。

- ア $\pi(a^2 - b^2)h$ イ $\pi(a - b)^2h$ ウ $2\pi(a - b)h$ エ $\pi(a - b)h$

Sさんのグループは，[先生が示した問題]で示された2つの展開図をもとにしてできる長方形が側面となる円柱を考え，その円柱の体積と， X と Y の和との関係について次の問題を作った。

[Sさんのグループが作った問題]

a, b, h を正の数とし， $a > b$ とする。

右の図3で，四角形ABGHは，図1の四角形ABCDの辺DCと図2の四角形EFGHの辺EFを一致させ，辺AHの長さが辺ADの長さと辺EHの長さの和となる長方形である。

右の図4のように，図3の四角形ABGHが円柱の側面となるように辺ABと辺HGを一致させ，組み立ててできる円柱を考える。

[先生が示した問題]の2つの円柱の体積 X と Y の和を $W\text{ cm}^3$ ，図4の円柱の体積を $Z\text{ cm}^3$ とするととき， $Z - W = 2\pi abh$ となることを確かめてみよう。

図3

図4

問2 [Sさんのグループが作った問題]で， $Z - W = 2\pi abh$ となることを証明せよ。
ただし，円周率は π とする。

解答欄

問1	ア イ ウ エ
問2	〔証明〕 $Z - W = 2\pi abh$

解答

問 1 ア

問 2

〔証明〕

四角形 ABGH において、

$AD=2\pi a$, $EH=2\pi b$ より、

$AH=AD+EH$

$=2\pi a+2\pi b$

$=2\pi(a+b)\cdots (1)$

(1) は、四角形 ABGH が側面となる円柱の底面の円周と等しいことから、底面の円の半径は、 $(a+b)\text{cm}$ と表すことができる。

よって、 $Z = \pi(a+b)^2h\cdots (2)$

一方、 $W = X+Y$

$=\pi a^2h+\pi b^2h\cdots (3)$

(2), (3)より、

$Z-W = \pi(a+b)^2h-(\pi a^2h+\pi b^2h)$

$=\pi(a^2+2ab+b^2)h-\pi a^2h-\pi b^2h$

$=\pi a^2h+2\pi abh+\pi b^2h-\pi a^2h-\pi b^2h$

$=2\pi abh$

したがって、 $Z-W=2\pi abh$

解説

問 1

底面の半径 $a\text{ cm}$ 、高さ $h\text{ cm}$ の円柱の体積だから、 $X=\pi a^2h$

底面の半径 $b\text{ cm}$ 、高さ $h\text{ cm}$ の円柱の体積だから、 $Y=\pi b^2h$

したがって、 $X-Y=\pi a^2h-\pi b^2h=\pi(a^2-b^2)h$

問 2

円柱の側面となる長方形の底面に接する辺の長さと、底面となる円の円周が等しいことに着目し、図 3、図 4 の円柱の底面となる円の半径を a 、 b を用いて表すと、 $(a+b)\text{cm}$ となる。

よって、 $Z=\pi(a+b)^2h$ となることから考える。

図 3

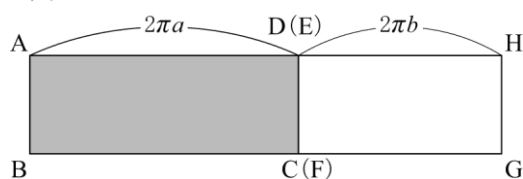
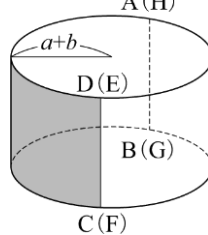


図 4



【問 6】

一の位が 3 である 2 けたの整数がある。この整数を 2 乗した数を 10 で割ると余りが 9 となることを文字式を使って説明せよ。

(福井県 2020 年度)

解答欄

〔説明〕

解答

〔説明〕

十の位を a とすると、この数は、 $10a+3$ と表される。

2 乗すると $(10a+3)^2=100a^2+60a+9=10(10a^2+6a)+9$ となり、
 $10a^2+6a$ は整数だから、 $(10a+3)^2$ を 10 で割ると余りが 9 となる。

【問 7】

2 けたの自然数を a ，その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数を b としたとき， a から b をひいた値がどのような数になるかについて考える。次のメモは，ある生徒が，いくつかの場合について調べ，それをもとに立てた予想である。

メモ

a の値が 31 のとき， $31 - 13 = 18$	予想 a から b をひいた値は，常に 18 の倍数になる。
40 のとき， $40 - 4 = 36$	
19 のとき， $19 - 91 = -72$	
55 のとき， $55 - 55 = 0$	

このとき，次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

(山梨県 2020 年度)

問 1 a から b をひいた値が -18 であるとき， b を a の式で表しなさい。

問 2 a の値によっては， a から b をひいた値が，18 の倍数にならない場合があり，予想が正しくな
いことがわかる。予想が正しくないことは，次のように反例をあげることによって説明でき
る。 $\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる整数をそれぞれ書きなさい。

説明

a の値が $\boxed{\text{ア}}$ のとき， a から b をひいた値は $\boxed{\text{イ}}$ であり，18 の倍数ではない。した
がって， a から b をひいた値は，常に 18 の倍数になるとは限らない。

問 3 a の十の位の数 x ，一の位の数 y として， a ， b をそれぞれ x ， y を使った式で表すとき， a か
ら b をひいた値は $9(x-y)$ となる。

このとき，次の (1)，(2) に答えなさい。

(1) a から b をひいた値が 54， x の値が 8 であるとき， b の値を求めなさい。

(2) a から b をひいた値が $9(x-y)$ であり， $x-y$ が整数であることから， a から b をひいた値は，常
に 9 の倍数になるといえる。

このことをもとにメモを見直すと， $x-y$ がある条件を満たしているとき， a から b をひいた値
が，常に 18 の倍数になることがわかる。ある条件とは何か書きなさい。また，この条件を満
たすときの $x-y$ の最大値を求めなさい。

ただし，この条件は， a から b をひいた値が，18 の倍数になるすべての場合について成り立つ
ものとする。

解答欄

問 1	$b=$	
問 2	ア	
	イ	
問 3	(1)	$b=$
	(2)	〔条件〕
		〔最大値〕 $x-y=$

解答

問 1 $b=a+18$

問 2

ア 21

イ 9

問 3

(1) $b=28$

(2)

〔条件〕

〔 $x-y$ が〕 2 の倍数であること。

〔最大値〕

$x-y=8$

解説

問 1

a から b をひいた値が -18 であることから、 $a-b=-18$ と立式し、その後 b について解くとよい。

問 3

(1)

x, y を用いると、 $a=10x+y, b=10y+x$ と表すことができる。よって、 $a-b=54$

$9x-9y=54$ となり、 $x=8$ を代入して $72-9y=54$ $y=2$ となる。したがって、 $b=28$

(2)

9 の倍数に 2 をかければ 18 の倍数となることから、 $9(x-y)$ の $(x-y)$ の部分が 2 の倍数（偶数）となればよいと考える。

【問 8】

n を整数とすると、いつでも奇数になる式として正しいものを、次のア～オからすべて選び、記号を書きなさい。

(長野県 2020 年度)

[ア $n+1$ イ $2n$ ウ $2n+1$ エ $2n+3$ オ $3n$]

解答欄

解答

ウ, エ

解説

奇数は偶数に 1 をたしてできる数なので、「 $2 \times (\text{整数}) + 1$ 」の形で表すことができる。

よって、この形になっている、または変形できるのは

ウ $2n+1$ エ $2n+3=2(n+1)+1$

の 2 つ。よって、答えはウとエ。

【問 9】

連続する 2 つの自然数があり、それぞれを 2 乗した数の和が 25 である。この 2 つの自然数を求めなさい。ただし、解答欄の書き出しに続けて、答えを求めるまでの過程も書きなさい。

(岡山県 2020 年度 特別)

解答欄

連続する 2 つの自然数のうち、小さい方を n とすると、大きい方は $n+1$ と表される。このとき、

解答

連続する 2 つの自然数のうち、小さい方を n とすると、大きい方は $n+1$ と表される。

このとき、それぞれを 2 乗した数の和が 25 であるから、

$$n^2 + (n+1)^2 = 25$$

$$2n^2 + 2n - 24 = 0$$

$$n^2 + n - 12 = 0$$

$$(n+4)(n-3) = 0$$

$$n = -4, 3$$

n は自然数だから、 $n = -4$ は問題にあわない。

よって $n = 3$ となり、 $n+1 = 4$

以上より、求める 2 つの自然数は 3 と 4

【問 10】

佐藤さんは、数学の授業で、連続する 2 つの整数や連続する 3 つの整数について成り立つ性質を学習し、そのことをきっかけに、連続する 4 つの整数についても何か性質が成り立つのではないかと考え、調べています。

$$2, 3, 4, 5 \text{ について, } 5 \times 4 - 2 \times 3 = 14, 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$7, 8, 9, 10 \text{ について, } 10 \times 9 - 7 \times 8 = 34, 7 + 8 + 9 + 10 = 34$$

$$13, 14, 15, 16 \text{ について, } 16 \times 15 - 13 \times 14 = 58, 13 + 14 + 15 + 16 = 58$$

佐藤さんは、これらの結果から下のことを予想しました。

【予想】

連続する 4 つの整数について、大きい方から 1 番目の数と大きい方から 2 番目の数の積から、小さい方から 1 番目の数と小さい方から 2 番目の数の積を引いたときの差は、その連続する 4 つの整数の和に等しくなる。

次の問 1・問 2 に答えなさい。

(広島県 2020 年度)

問 1 佐藤さんは、この【予想】がいつでも成り立つことを、下のように説明しました。

【説明】

連続する 4 つの整数のうち、小さい方から 1 番目の数を n とすると、連続する 4 つの整数は、 $n, n+1, n+2, n+3$ と表される。

したがって、連続する 4 つの整数について、大きい方から 1 番目の数と大きい方から 2 番目の数の積から、小さい方から 1 番目の数と小さい方から 2 番目の数の積を引いたときの差は、その連続する 4 つの整数の和に等しくなる。

【説明】の  に説明の続きを書き、説明を完成させなさい。

問2 佐藤さんは、連続する4つの整数について、ほかにも成り立つ性質がないかを調べたところ、下の【性質Ⅰ】が成り立つことが分かりました。

【性質Ⅰ】

連続する4つの整数について、小さい方から2番目の数と大きい方から1番目の数の積から、小さい方から1番目の数と大きい方から2番目の数の積を引いたときの差は、

の和に等しくなる。

さらに、佐藤さんは、連続する5つの整数についても、小さい方から2番目の数と大きい方から1番目の数の積から、小さい方から1番目の数と大きい方から2番目の数の積を引いたときの差がどうなるのかを調べたところ、下の【性質Ⅱ】が成り立つことが分かりました。

【性質Ⅱ】

連続する5つの整数について、小さい方から2番目の数と大きい方から1番目の数の積から、小さい方から1番目の数と大きい方から2番目の数の積を引いたときの差は、

の和に等しくなる。

【性質Ⅰ】・【性質Ⅱ】の には同じ言葉が当てはまります。 に当てはまる言葉を書きなさい。

解答欄

問1	連続する4つの整数のうち、小さい方から1番目の数をnとすると、連続する4つの整数は、n、$n+1$、$n+2$、$n+3$と表される。 したがって、連続する4つの整数について、大きい方から1番目の数と大きい方から2番目の数の積から、小さい方から1番目の数と小さい方から2番目の数の積を引いたときの差は、その連続する4つの整数の和に等しくなる。
問2	

解答

問 1

大きい方から 1 番目の数と大きい方から 2 番目の数の積から、小さい方から 1 番目の数と小さい方から 2 番目の数の積を引いたときの差は、

$$(n+3)(n+2)-n(n+1)$$

$$=n^2+5n+6-n^2-n$$

$$=4n+6$$

連続する 4 つの整数の和は、

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$$

$$=4n+6$$

問 2

小さい方から 1 番目の数と大きい方から 1 番目の数

解説

問 2

【性質Ⅰ】について、連続する 4 つの整数は、整数 k を用いて $k, k+1, k+2, k+3$ と表せる。小さい方から 2 番目の数と大きい方から 1 番目の数の積から、小さい方から 1 番目の数と大きい方から 2 番目の数の積を引いたときの差は、 $(k+1)(k+3)-k(k+2)=2k+3=k+(k+3) \cdots \textcircled{1}$ となる。

また、【性質Ⅱ】について、連続する 5 つの整数は、整数 l を用いて $l, l+1, l+2, l+3, l+4$ と表せる。小さい方から 2 番目の数と大きい方から 1 番目の数の積から、小さい方から 1 番目の数と大きい方から 2 番目の数の積を引いたときの差は、 $(l+1)(l+4)-l(l+3)=2l+4=l+(l+4) \cdots \textcircled{2}$ となる。

①、②より、共通する性質は、小さい方から 1 番目の数と大きい方から 1 番目の数の和となることである。なお、①、②はそれぞれ、 $(k+1)+(k+2)$ 、 $(l+1)+(l+3)$ とも変形できるので、小さい方から 2 番目の数と大きい方から 2 番目の数の和となると解釈してもよい。

さらに、このように文字を用いず、具体的な数で予想を立てることもできる。

【問 11】

あすかさんは、規則的に並んだ整数の和で、いろいろな整数を表すことを考えた。例えば、48 は、 $15+16+17=48$ のように、連続する 3 つの整数の和で表すことができる。このことについて、次の問 1～問 3 に答えなさい。

(高知県 A 2020 年度)

問 1 48 は、連続する 4 つの奇数の和でも表すことができる。次の【あすかさんのノート】は、あすかさんが文字式を使って、和が 48 になる連続する 4 つの奇数を求める問題を、正しく解いたノートの一部である。【あすかさんのノート】中の ア，イ，ウ に当てはまる文字式を、それぞれ書け。

【あすかさんのノート】

〔解答〕

n を整数とする。連続する 4 つの奇数のうち、最も小さい奇数を $2n+1$ とおくと、連続する 4 つの奇数は、小さい順に $2n+1$ ，ア，イ，ウ と、それぞれ n を使って表すことができる。

この 4 つの奇数の和が 48 なので、

$$(2n+1)+(\text{ア})+(\text{イ})+(\text{ウ})=48$$

$$8n+16=48$$

$$n=4$$

したがって、和が 48 になる連続する 4 つの奇数は、9，11，13，15 である。

問 2 280 は、連続する 5 つの整数の和で表すことができる。このとき、和が 280 になる連続する 5 つの整数のうち、最も小さい整数を求めよ。

問 3 280 は、連続する 3 つの偶数の和では表すことができない。その理由を、 n を使った文字式を用いて、言葉と式を使って説明せよ。ただし、 n は整数とする。

解答欄

問 1	ア	
	イ	
	ウ	
問 2		
問 3		

解答

問 1

ア $2n+3$

イ $2n+5$

ウ $2n+7$

問 2 54

問 3

連続する 3 つの偶数のうち、最も小さい偶数を $2n$ とおくと、連続する 3 つの偶数は、小さい順に $2n$, $2n+2$, $2n+4$ と表すことができる。

この 3 つの偶数の和が 280 なので

$$2n+(2n+2)+(2n+4)=280$$

$$6n+6=280$$

$$3n=137$$

$$n=\frac{137}{3}$$

このとき、 $2n$, $2n+2$, $2n+4$ はどれも偶数にならない。

したがって、280 は連続する 3 つの偶数の和で表すことができない。

解説

n を整数とする。連続する 5 つの整数のうち、最も小さい整数を n とおくと、連続する 5 つの整数は、小さい順に n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ と表すことができる。この 5 つの整数の和が 280 だから、

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=280 \quad 5n+10=280 \quad 5n=270 \quad n=54$$

【問 12】

百の位の数が 3、十の位の数が b 、一の位の数が 6 である 3 けたの数が 8 の倍数となるような b の数を求めたい。そこで、次の【文字式の表し方】及び【求め方】をもとにして b の数を求める。

このとき、(1)～(3)の各問いに答えなさい。

(佐賀県 2020 年度 一般)

【文字式の表し方】

十の位の数 a 、一の位の数 b である数は、 $10a+b$ と表すことができる。

百の位の数 a 、十の位の数 b 、一の位の数 c である数は、① と表すことができる。

【求め方】

百の位の数 3、十の位の数 b 、一の位の数 6 である数は、 $300+10b+6$ と表すことができる。

$300+10b+6$ が 8 の倍数となればよいので、 $10b$ を $8b+2b$ として、

$$300+10b+6=8(38+\text{②})+\text{③}$$

と変形すると、

$38+\text{②}$ は整数だから、 $8(38+\text{②})$ は 8 の倍数となる。

このとき、③ が 8 の倍数となれば、 $8(38+\text{②})$ と ③ の和は 8 の倍数となるので、 $300+10b+6$ は 8 の倍数となることがわかる。

したがって、 b は 0 から 9 までの整数より、 $b=\text{④}$ 、⑤ となる。

(1) ① にあてはまる式を書きなさい。

(2) ②、③ にあてはまる式をそれぞれ書きなさい。

(3) ④、⑤ にあてはまる数をそれぞれ書きなさい。

解答欄

(1)		
(2)	②	
	③	
(3)	④	
	⑤	

解答

(1) $100a + 10b + c$

(2)

② b

③ $2b + 2$

(3)

④ 3

⑤ 7

【問 13】

2 つの続いた奇数 3, 5 について, $5^2 - 3^2$ を計算すると 16 になり, 8 の倍数となる。このように, 「2 つの続いた奇数では, 大きい奇数の平方から小さい奇数の平方を引いた差は, 8 の倍数となる。」ことを文字 n を使って証明せよ。ただし, 証明は解答用紙の「 n を整数とし, 小さい奇数を $2n-1$ とすると,」に続けて完成させよ。

(長崎県 2020 年度)

解答欄

n を整数とし, 小さい奇数を $2n-1$ とすると,

解答

[n を整数とし, 小さい奇数を $2n-1$ とすると,]

大きい奇数は $2n+1$ と表されるので, 大きい奇数の平方から小さい奇数の平方を引いた差は,

$$\begin{aligned} & (2n+1)^2 - (2n-1)^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 - 4n + 1) \\ &= 8n \end{aligned}$$

n は整数より, $8n$ は 8 の倍数である。

よって, 2 つの続いた奇数では, 大きい奇数の平方から小さい奇数の平方を引いた差は, 8 の倍数となる。

【問 14】

次は、健太さんと優子さんが、数学の授業で、並んでいる 3 つの数の和について、カレンダーを見ながら会話をしている場面である。会話文中の に説明の続きを書いて、会話文を完成しなさい。

(熊本県 2020 年度)

図 1

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

健太：前回の数学の授業では、3, 4, 5 のように、連続する 3 つの数の和が中央の数の 3 倍であることを学んだね。3 つの数字が規則的に並んでいれば、3 つの数の和は中央の数の 3 倍になっているのかな。

優子：そうね。例えば、図 1 で、斜めに並んでいる 7, 15, 23 の和は 45 で、中央の数 15 の 3 倍になっているね。

健太：本当だ。2, 10, 18 や 12, 20, 28 も、7, 15, 23 と同じように斜めに並んでいる数で、3 つの数の和は中央の数の 3 倍になっているね。

優子：図 1 のように斜めに並んでいる 3 つの数は、選ぶ場所が変わっても、数が 8 ずつ増えているから、文字を使って次のように説明が書けるね。

〈説明〉

図 1 のように斜めに並んでいる 3 つの数のうち、一番小さな数を n とおくと、残りの 2 つの数は $n+8$, $n+16$ と表される。3 つの数の和は、

$$n + (n+8) + (n+16) = 3n + 24 = 3(n+8)$$

$n+8$ は中央の数だから、 $3(n+8)$ は中央の数の 3 倍である。

したがって、図 1 のように斜めに並んでいる 3 つの数の和は、中央の数の 3 倍である。

健太：それでは、図 2 の 9, 15, 21 のように斜めに並んでいる数も、和が中央の数 15 の 3 倍になっているね。図 2 のように斜めに並んでいる 3 つの数も、選ぶ場所が変わっても、和は中央の数の 3 倍になっているのかな。

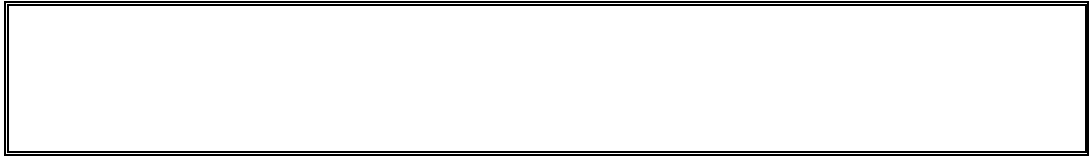
優子：そうね。今度は、中央の数を n とおいて説明を書いてみるね。

図 2

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

〈説明〉

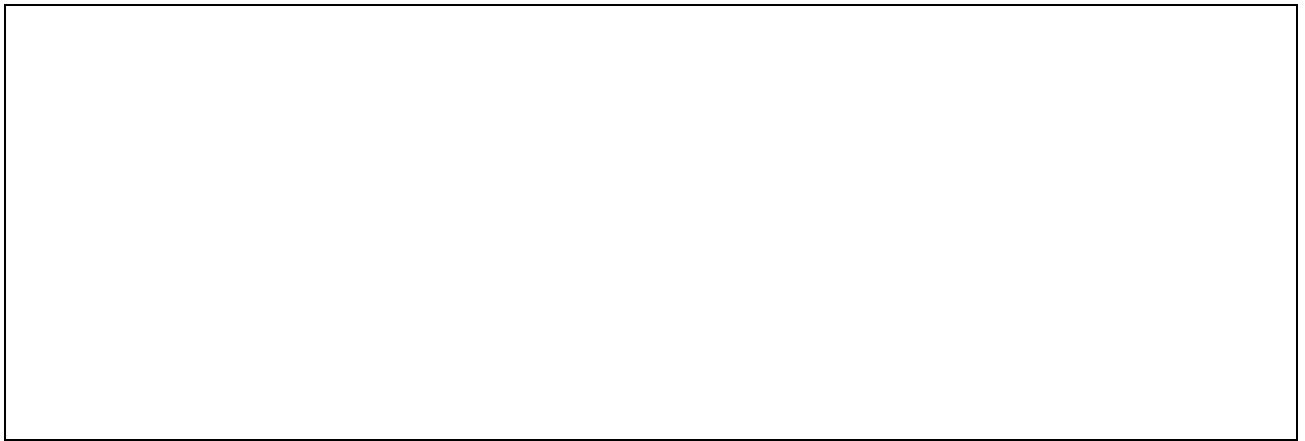
図 2 のように斜めに並んでいる 3 つの数のうち、中央の数を n とおくと、



したがって、図 2 のように斜めに並んでいる 3 つの数の和は、中央の数の 3 倍である。

健太：規則的に並んでいる数字は興味深いね。

解答欄



解答

残りの 2 つの数は、 $n-6$ 、 $n+6$ と表される。

3 つの数の和は、

$$(n-6)+n+(n+6)=3n$$

n は中央の数だから、 $3n$ は中央の数の 3 倍である。

【問 15】

図 1 のカレンダーにおいて、図 2 のように配置された 5 つの数は、小さい順に a, b, c, d, e となる。

図 3 は、図 1 において、 $a=9, b=16, c=17, d=18, e=25$ となる例である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

ただし、 a, b, c, d, e のすべてに数が入っている場合のみ考えるものとする。

(沖縄県 2020 年度)

図 1

2020 年 3 月						
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

図 2

a		
b	c	d
		e

図 3

2020 年 3 月						
日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

問 1 $e=20$ であるとき、 a の値を求めなさい。

問 2 $a+b+c+d+e$ は 5 の倍数であることを、次のように説明した。① ～ ⑤ に最も適する数を入れ、説明を完成させなさい。

【説明】

自然数 a を用いて、 b, c, d, e はそれぞれ

$b=a+$ ① , $c=a+$ ② , $d=a+$ ③ , $e=a+$ ④ と表せる。5 つ

の数の和は

$a+b+c+d+e=a+(a+$ ①) $+(a+$ ②) $+(a+$ ③) $+(a+$ ④)

$=5(a+$ ⑤)

$a+$ ⑤ は自然数であるから、 $5(a+$ ⑤) は 5 の倍数である。

したがって、 $a+b+c+d+e$ は 5 の倍数である。

問3 次のア～エのうちから正しくないものを1つ選び，記号で答えなさい。

ア $b+d$ は c の 2 倍と等しい。

イ $a+c+e$ は c の 3 倍と等しい。

ウ $a+b+c+d$ は c の 4 倍と等しい。

エ $a+b+c+d+e$ は c の 5 倍と等しい。

解答欄

問 1	$a=$	
問 2	①	
	②	
	③	
	④	
	⑤	
問 3		

解答

問 1 $a=4$

問 2

① 7

② 8

③ 9

④ 16

⑤ 8

問 3 ウ

解説

問 3

アについて， $b=c-1$ ， $d=c+1$ であるから， $b+d=(c-1)+(c+1)=2c$ となり，正しい。

イについて， $a=c-8$ ， $e=c+8$ であるから， $a+c+e=(c-8)+c+(c+8)=3c$ となり，正しい。

ウについて， $a=c-8$ ， $b=c-1$ ， $d=c+1$ であるから，

$a+b+c+d=(c-8)+(c-1)+c+(c+1)=4c-8$ となり，正しくない。

エについて， $a=c-8$ ， $b=c-1$ ， $d=c+1$ ， $e=c+8$ であるから，

$a+b+c+d+e=(c-8)+(c-1)+c+(c+1)+(c+8)=5c$ となり，正しい。

よって，正解はウ。