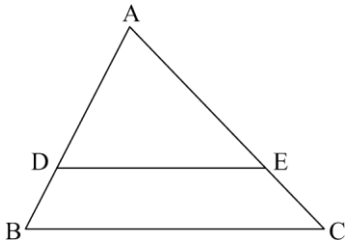
4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2021 年度出題】

【問 1】

図 1 のように，三角形 ABC がある。点 D，E は，それぞれ辺 AB，AC 上の点であり，DE // BC である。このとき，△ABC∽△ADE となることを証明しなさい。

（秋田県 2021 年度）

図 1



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

∠A は共通…①

DE // BC より，平行線の同位角は等しいから，

∠ABC＝∠ADE…②

①，②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

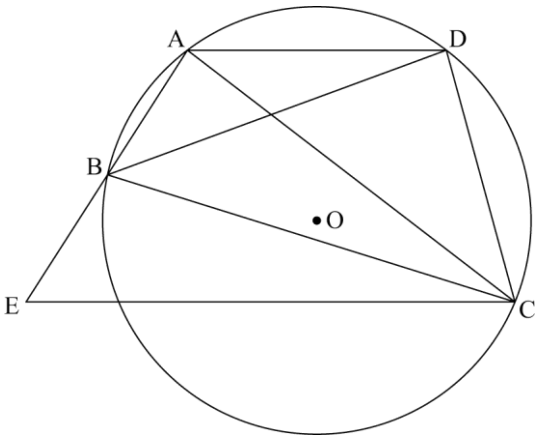
△ABC∽△ADE

解説

「平行線」があるので，「同位角・錯角が等しい」の条件が使えることを思い浮かべるとよい。

【問 2】

右の図において，点 A，B，C，D は円 O の周上にあり，点 E は直線 AB 上の点で，AD // EC である。次の**問１**，**問２**に答えなさい。



（群馬県 2021 年度 前期）

問１　三角形 AEC と三角形 DCB が相似であることを証明しなさい。

問２　AE＝4 cm，BC＝5 cm，EC＝6 cm，∠ACD＝∠CBD とする。直線 AB と直線 CD の交点を F としたとき，FD の長さを求めなさい。

解答欄

問１	〔証明〕
問２	cm

解答

問１

〔証明〕

△AEC と△DCB について

弧 BC に対する円周角は等しいので

∠EAC＝∠CDB…①

弧 CD に対する円周角は等しいので

∠DBC＝∠DAC…②

AD // EC より，平行線の錯角は等しいので

∠DAC＝∠ACE…③

②，③より

∠ACE＝∠DBC…④

①，④より

2 組の角がそれぞれ等しいので

△AEC∽△DCB

問２ $\frac{25}{6}$ (cm)

解説

問１

① 問題文から情報をさがすと，円 O，AD//EC の 2 つが見つかる。

② 円 O からは，「円周角の定理」「半径 2 つで二等辺三角形→底角が等しい（**図１**）」

「直径→90°（**図２**）」

AD//EC からは，「同位角，錯角」「平行線と線分の比」などが発想として出てくる。

③ 今回は相似であることの証明であり，辺の長さについての情報がないことから，相似条件「2 組の角がそれぞれ等しい」を利用する。よって，角についての情報が必要であることから，②の中でも「円周角の定理」「同位角，錯角」を利用する可能性が高いことがわかる。

問２

問１より，△AEC∽△DCB なので，

$\mathrm{AE}:\mathrm{DC}=\mathrm{EC}:\mathrm{CB} \Rightarrow 4:\mathrm{DC}=6:5 \Rightarrow \mathrm{DC}=\frac{10}{3}(\mathrm{cm})$

仮定より，∠ACD＝∠CBD，円周角の定理より，

∠CBD＝∠CAD だから，∠ACD＝∠CAD

よって，2 つの角が等しいので，△DAC は DA＝DC の二等辺三角形である。

すなわち，$\mathrm{DA}=\mathrm{DC}=\frac{10}{3}(\mathrm{cm})$

△FEC において，AD//EC より，平行線と線分の比から，FD：FC＝AD：EC

FD＝x cm とすると，$\mathrm{FC}=\mathrm{FD}+\mathrm{DC}=x+\frac{10}{3}$だから，

$x:\left(x+\frac{10}{3}\right)=\frac{10}{3}:6 \Rightarrow 6x=\frac{10}{3}\left(x+\frac{10}{3}\right) \Rightarrow x=\frac{25}{6}(\mathrm{cm})$

図１

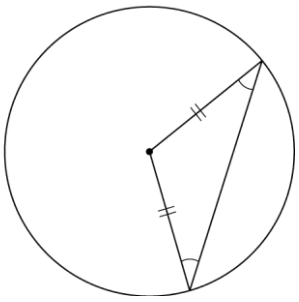
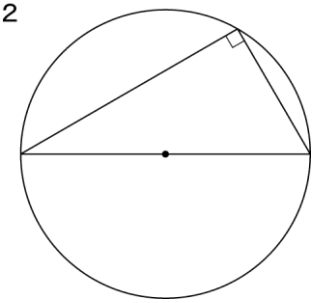
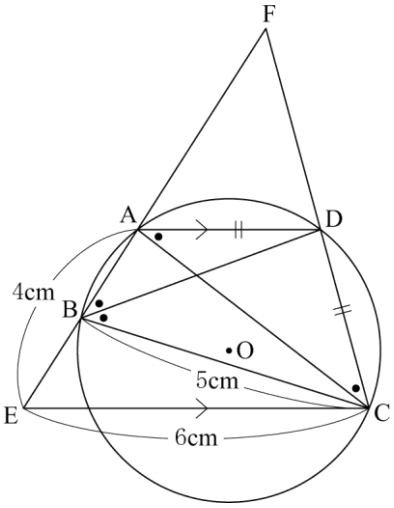


図２



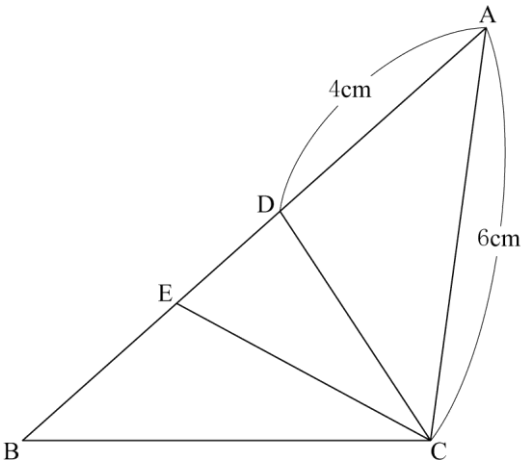


【問 3】

右の**図１**のように，△ABC の辺 AB 上に，∠ABC＝∠ACD となる点 D をとります。また，∠BCD の二等分線と辺 AB との交点を E とします。AD＝4 cm，AC＝6 cm であるとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県 2021 年度）

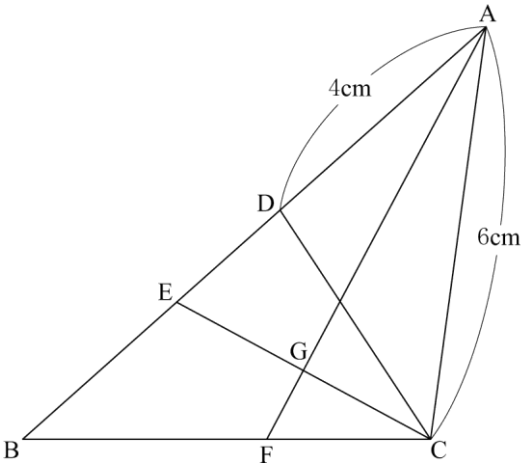
図１



問１　△ABC と△ACD が相似であることを証明しなさい。

問２　線分 BE の長さを求めなさい。

図２



問３　右の**図２**のように，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を F，線分 AF と線分 EC との交点を G とします。

△ABC の面積が 18 cm^2 であるとき，△GFC の面積を求めなさい。

解答欄

問１	〔証明〕
問２	BE＝　　cm
問３	cm^2

解答

問１

〔証明〕

△ABC と△ACD において

∠A は共通…①

仮定から

∠ABC＝∠ACD…②

①，②から

２組の角がそれぞれ等しいので

△ABC∽△ACD

問２ (BE＝)　３　(cm)

問３ $\frac{6}{5}$　(cm^2)

解説

問２

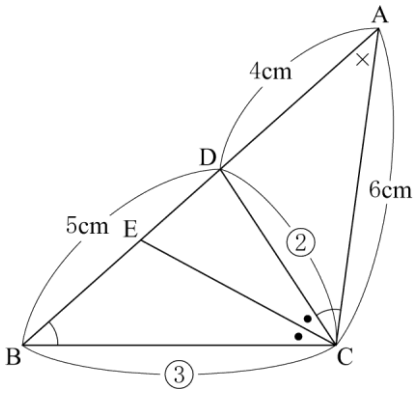
問１より，△ABC∽△ACD だから，AB：AC＝AC：AD

⇒　AB：6＝6：4　⇒　AB＝9(cm)

BD＝AB－AD＝9－4＝5(cm)

また，BC：CD＝AC：AD＝6：4＝3：2　であり，△CDB において，線分 CE は∠BCD の二等分線だから，BE：ED＝BC：CD＝3：2

⇒　$BE=\frac{3}{5}BD=\frac{3}{5}\times5=3$(cm)



問３

問２より，ED＝BD－BE＝5－3＝2(cm)

AE＝AD＋ED＝4＋2＝6(cm)

AE：EB＝6：3＝2：1 より，△ACE：△BCE＝2：1 だから，

$\triangle BCE=\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{1}{3}\times18=6(cm^2)$

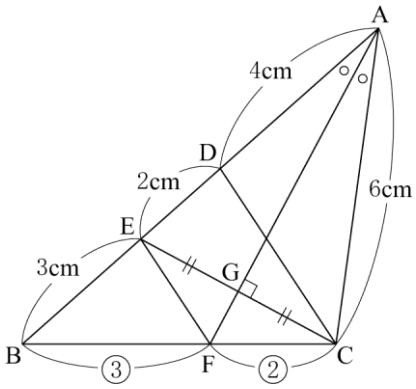
次に，△ABC において，線分 AF は∠BAC の二等分線なので，BF：FC＝AB：AC＝9：6＝3：2。

よって，

△EBF：△ECF＝3：2 だから，$\triangle ECF=\frac{2}{5}\triangle BCE=\frac{2}{5}\times6=\frac{12}{5}$ (cm^2)

また，AE＝AC＝6(cm)だから，△AEC は二等辺三角形である。よって，頂角 BAC の二等分線は，底辺 EC を垂直に２等分するので，EG＝GC

したがって，△GFC＝△GFE　であり，$\triangle GFC=\frac{1}{2}\triangle ECF=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}=\frac{6}{5}(cm^2)$

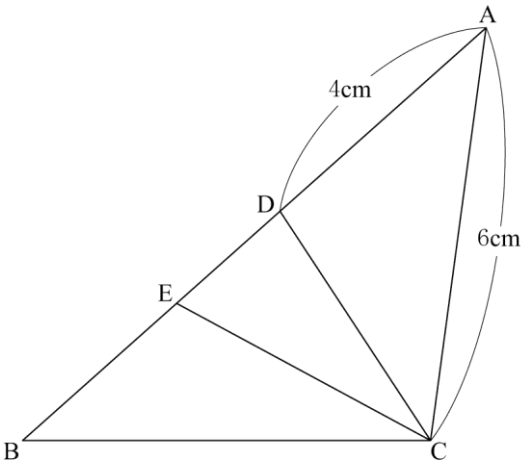


【問 4】

右の**図１**のように，△ABC の辺 AB 上に，∠ABC＝∠ACD となる点 D をとります。また，∠BCD の二等分線と辺 AB との交点を E とします。AD＝4 cm，AC＝6 cm であるとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県 2021 年度）

図１



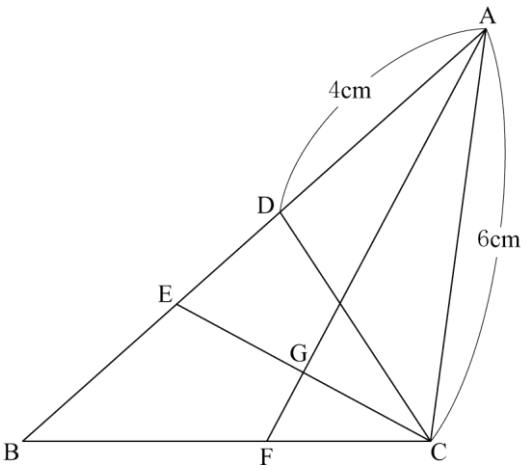
問１　線分 BE の長さを求めなさい。

問２　右の**図２**のように，∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を F，線分 AF と線分 EC，DC との交点をそれぞれ G，H とします。

このとき，△ADH と△ACF が相似であることを証明しなさい。

問３　**図２**において，△ABC の面積が 18 cm^2 であるとき，△GFC の面積を求めなさい。

図２



解答欄

問１	BE＝　　cm
問２	〔証明〕
問３	cm^2

解答

問１ (BE＝)　3　(cm)

問２

〔証明〕

△ADH と△ACF において

仮定から，∠DAH＝∠CAF…①

△BCD において，外角はそのとなりにない２つの内角の和に等しいので

∠ADH＝∠DBC＋∠DCB…②

また，

∠ACF＝∠ACD＋∠DCB…③

仮定から

∠DBC＝∠ACD…④

②，③，④から

∠ADH＝∠ACF…⑤

①，⑤から

２組の角がそれぞれ等しいので

△ADH∽△ACF

問３ $\frac{6}{5}$　(cm^2)

解説

問１

△ABC と△ACD において

仮定より，∠ABC＝∠ACD

共通な角だから，∠BAC＝∠CAD

よって，２組の角がそれぞれ等しいから，△ABC∽△ACD

したがって，AB：AC＝AC：AD

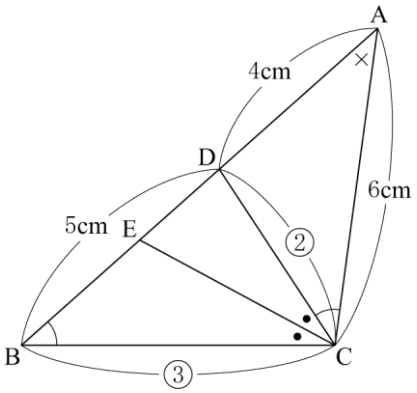
⇒　AB：6＝6：4　⇒　AB＝9(cm)

BD＝AB－AD＝9－4＝5(cm)

また，BC：CD＝AC：AD＝6：4＝3：2　であり，△CDB において，線分 CE は∠BCD の二等分線だから，

BE：ED＝BC：CD＝3：2

⇒　$BE=\frac{3}{5}BD=\frac{3}{5}\times5=3$(cm)



問３

２点 E，F を結ぶ。

問１より，ED＝BD－BE＝5－3＝2(cm)，

AE＝AD＋ED＝4＋2＝6(cm)

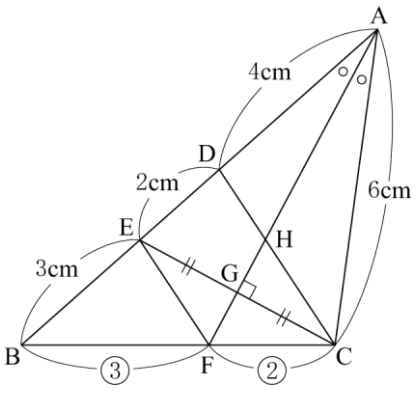
AE：EB＝6：3＝2：1 より，△ACE：△BCE＝2：1 だから，

$\triangle BCE=\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{1}{3}\times18=6(cm^2)$

次に，△ABC において，線分 AF は∠BAC の二等分線なので，BF：FC＝AB：AC＝9：6＝3：2。よって，

△EBF：△ECF＝3：2 だから，

$\triangle ECF=\frac{2}{5}\triangle BCE=\frac{2}{5}\times6=\frac{12}{5}(cm^2)$



また，AE＝AC＝6(cm)だから，△AEC は二等辺三角形である。よって，頂角 BAC の二等分線は，底辺 EC を垂直に２等分するので，EG＝GC

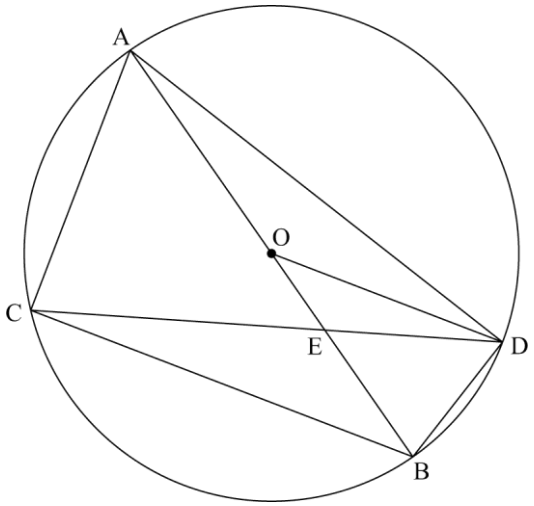
したがって，△GFC＝△GFE　であり，$\triangle GFC=\frac{1}{2}\triangle ECF=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}=\frac{6}{5}(cm^2)$

【問 5】

下の図のように，線分 AB を直径とする円 O がある。$\overset{\frown}{AB}$上に，2 点 A，B とは異なる点 C をとり，点 C と 2 点 A，B をそれぞれ結ぶ。また，点 C を含まない$\overset{\frown}{AB}$上に，点 D を CB // OD となるようにとり，点 D と 3 点 A，B，C をそれぞれ結ぶ。線分 OB と線分 CD の交点を E とする。

このとき，次の**問 1**，**問 2** に答えなさい。

（千葉県 2021 年度）



問 1　△ACD∽△DBO となることの証明を，次ページの［　　］の中に途中まで示してある。［（a）］，［（b）］に入る最も適当なものを，次ページの**選択肢**の**ア～カ**のうちからそれぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。また，［（c）］には証明の続きを書き，**証明**を完成させなさい。ただし，［　　］の中の①，②に示されている関係を使う場合，番号の①，②を用いてもかまわないものとする。

証明

△ACD と△DBO において，

$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角は等しいから，

∠ACD＝［（a）］　…①

平行線の［（b）］は等しいから，

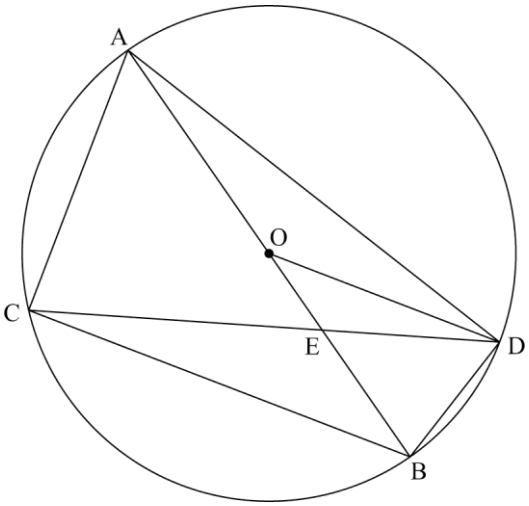
CB // OD より，

∠ABC＝∠DOB　…②

［（c）］

選択肢		
ア　∠ABC	**イ**　∠AED	**ウ**　∠DBO
エ　錯　角	**オ**　同位角	**カ**　対頂角

問２　AO＝2 cm，CB＝3 cm のとき，線分 BD の長さを求めなさい。



解答欄

問１	（ａ）	
	（ｂ）	
	（ｃ）	
問２		cm

解答

問１

（ａ）ウ

（ｂ）エ

（ｃ）

$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角は等しいから

∠ADC＝∠ABC…③

②，③より

∠ADC＝∠DOB…④

①，④より

２組の角がそれぞれ等しいので

△ACD∽△DBO

問２$\sqrt{2}$　(cm)

解説

問２

BD＝x cm とおく。

AB は円 O の直径なので，

∠ACB＝∠ADB＝90°（**図１**）より，

△ABC と△ADB はともに直角三角形である。

△ABC において，三平方の定理より，

$AC^2=AB^2-BC^2=4^2-3^2=7$

⇒　AC＞0 より，$AC=\sqrt{7}$(cm)

△ABD において，三平方の定理より

$AD^2=AB^2-BD^2=4^2-x^2=16-x^2$

⇒　AD＞0 より，$AD=\sqrt{16-x^2}$(cm)

また，**問１**より，△ACD∽△DBO だから（**図２**），AD：DO＝AC：DB

⇒　$\sqrt{16-x^2}:2=\sqrt{7}:x$

⇒　$AD^2:DO^2=AC^2:DB^2$ より，

$(16-x^2):4=7:x^2$　⇒　$x^2(16-x^2)=28$

⇒　$x^4-16x^2+28=0$

⇒　$x^2=M$ とおくと，$M^2-16M+28=0$

⇒　$(M-2)(M-14)=0$

⇒　$M=2$，14　⇒　$x^2=2$ のとき，$x>0$ より，$x=\sqrt{2}$(cm)，$x^2=14$ のとき，$x>0$ より，

$x=\sqrt{14}$(cm)

ここで，点 O を通り，線分 DB と平行な直線と線分 CB との交点を F とすると，四角形 OFBD は平行四辺形となるため，OF＝BD＝x である（**図３**）。よって，OF＜AC より，$x<\sqrt{7}$ だから，$x=\sqrt{14}$ は不適。

よって，BD＝$\sqrt{2}$(cm)

図１

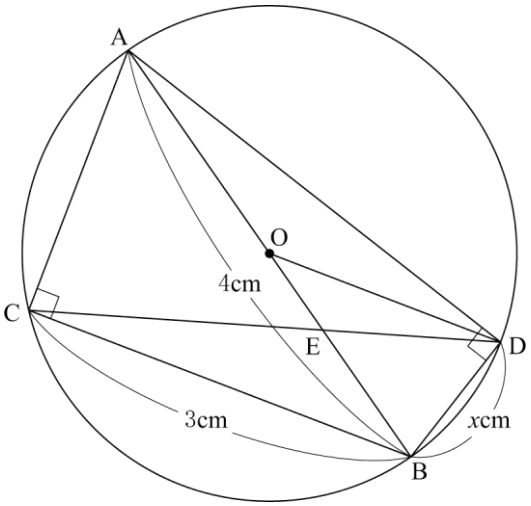


図２

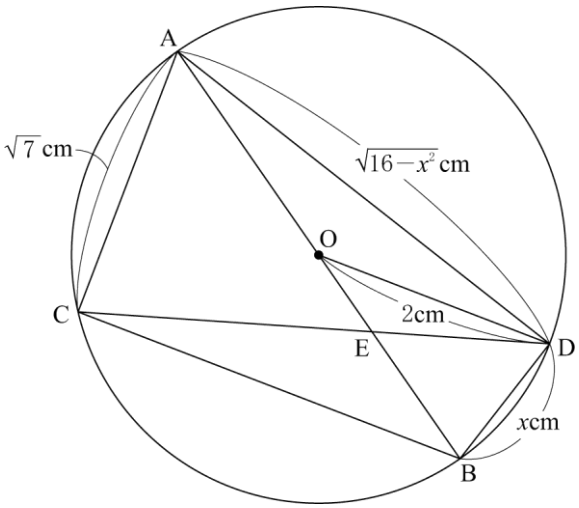
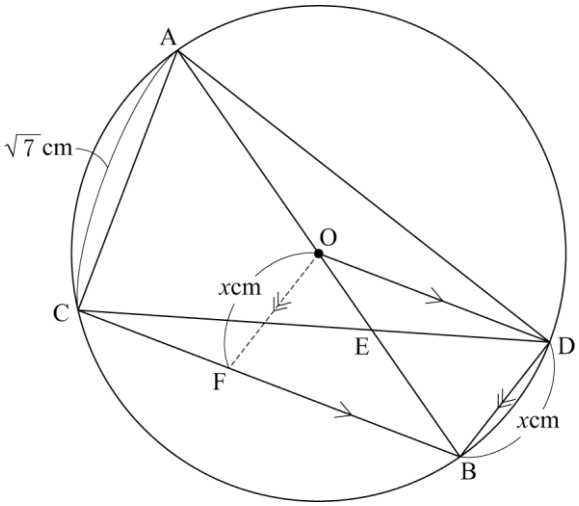


図３



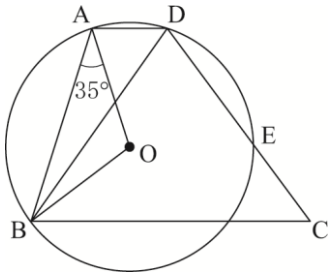
【問 6】

図１～図３のように，AD // BC の台形 ABCD があり，３点 A，B，D を通る円 O と辺 CD との交点を E とする。

このとき，次の**問１～問３**に答えなさい。

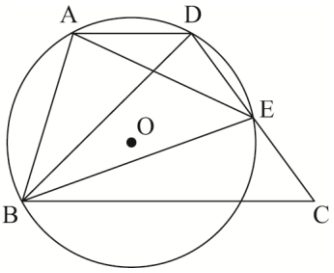
（石川県 2021 年度）

図１



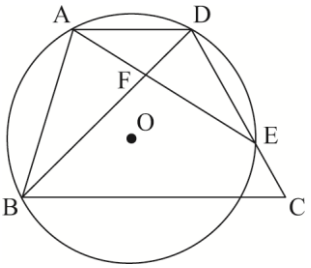
問１　**図１**のように，∠OAB＝35° のとき，∠ADB の大きさを求めなさい。

図２



問２　**図２**において，△ABE∽△DCB であることを証明しなさい。

図３



問３　**図３**において，BC＝2AD，DE：EC＝2：1 とする。AE と BD との交点を F とし，△AFD の面積を 4 cm^2 とする。

このとき，台形 ABCD の面積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

解答欄

問１	度
問２	〔証明〕
問３	〔計算〕 答　　cm^2

解答

問１ 55　度

問２

〔証明〕

△ABE と△DCB において

$\overset{\frown}{BE}$に対する円周角は等しいから

∠BAE＝∠CDB…①

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから

∠AEB＝∠ADB

AD // BC より，錯角は等しいから

∠ADB＝∠DBC

よって　∠AEB＝∠DBC…②

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいから

△ABE∽△DCB

問３

〔計算〕

直線 AE の延長線と直線 BC の延長線との交点を G とする。

△AED∽△GEC より

AD：GC＝ED：EC＝2：1

△AFD∽△GFB，BC＝2AD より

DF：BF＝AD：GB＝2：5

$\triangle ABD=\frac{7}{2}\times\triangle AFD=14$

△DBC＝2×△ABD＝28

よって　求める面積は　△ABD＋△DBC＝42

〔答〕　42　cm^2

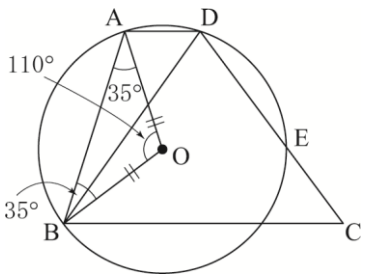
解説

問１

図１のように，△OAB は，OA＝OB の二等辺三角形だから，底角は等しいので，∠AOB＝180°－35°×2＝110°

円周角の定理より，$\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 110°=55°$

図１

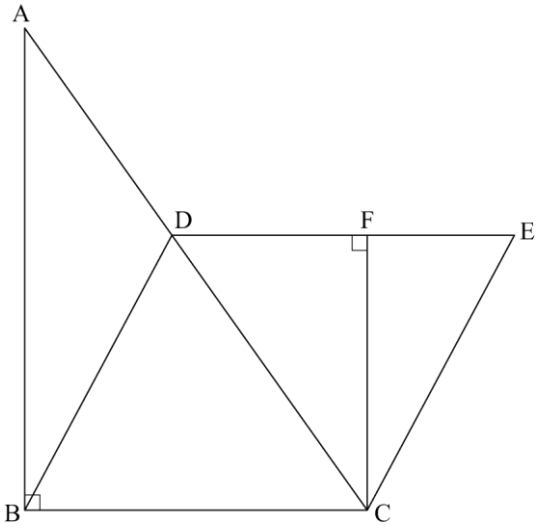


【問 7】

右図において，△ABC は∠ABC＝90°の直角三角形であり，AB＝7 cm，BC＝5 cm である。四角形 DBCE は平行四辺形であり，D は辺 AC 上にあって A，C と異なる。F は，C から辺 DE にひいた垂線と辺 DE との交点である。

次の問いに答えなさい。

（大阪府 A 2021 年度）



問１　四角形 DBCE の内角∠DBC の大きさを a° とするとき，四角形 DBCE の内角∠BCE の大きさを a を用いて表しなさい。

問２　次は，△ABC∽△CFD であることの証明である。［ ⓐ ］，［ ⓑ ］に入れるのに適している「**角を表す文字**」をそれぞれ書きなさい。また，ⓒ〔　　〕から適しているものを一つ選び，記号を○で囲みなさい。

〔証明〕

△ABC と△CFD において

△ABC は直角三角形だから　∠ABC＝90°　…㋐

CF⊥DE だから　∠［ ⓐ ］＝90°　…㋑

㋐，㋑より　∠ABC＝∠［ ⓐ ］　…㋒

DE // BC であり，平行線の錯角は等しいから

∠ACB＝∠［ ⓑ ］　…㋓

㋒，㋓より，

ⓒ〔 **ア** 1 組の辺とその両端の角　　**イ** 2 組の辺の比とその間の角　　**ウ** 2 組の角 〕

がそれぞれ等しいから

△ABC∽△CFD

問３　FC＝4 cm であるときの△FCE の面積を求めなさい。途中の式を含めた求め方も書くこと。

解答欄

問１	度	
問２	ⓐ	
	ⓑ	
	ⓒ	ア　　イ　　ウ
問３	〔求め方〕 cm^2	

解答

問１ $180-a$　度

問２

ⓐCFD

ⓑCDF

ⓒ**ウ**

問３

〔求め方〕

△ABC∽△CFD だから

BC：FD＝AB：CF＝7：4

よって　$FD=\frac{4}{7}BC=\frac{20}{7}$ (cm)

四角形 DBCE は平行四辺形だから

DE＝BC＝5 (cm)

よって　$FE=\frac{15}{7}$ (cm)

したがって，△FCE の面積は

$\frac{1}{2}\times\frac{15}{7}\times4=\frac{30}{7}$ (cm^2)

$\frac{30}{7}$　cm^2

解説

問１

平行四辺形 DBCE の 2 組の対角はそれぞれ等しいので，∠DBC＝∠CED＝$a°$，∠BCE＝∠BDE

よって，∠DBC＋∠CED＋∠BCE＋∠BDE＝360°より，

$2a°+2\angle BCE=360°$　⇒　$\angle BCE=180-a$ (°)

【問 8】

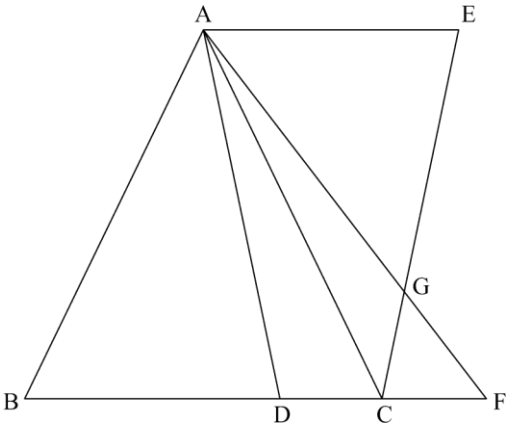
次の**問１**，**問２**に答えなさい。

（大阪府 C 2021 年度）

問１　**図１**において，△ABC は AB＝AC＝8 cm，BC＝7 cm の二等辺三角形である。D は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。A と D とを結ぶ。E は直線 AC について B と反対側にある点であり，3 点 A，C，E を結んでできる△ACE は△ACE≡△BAD である。F は，直線 BC 上にあって C について B と反対側にある点である。A と F とを結ぶ。G は，線分 AF と線分 EC との交点である。

次の問いに答えなさい。

図１



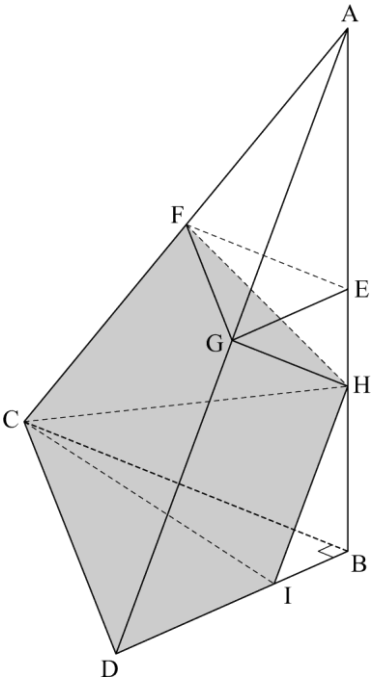
(1)　△AEG∽△FCG であることを証明しなさい。

(2)　FA＝FB であり，BD＝5 cm であるときの線分 GF の長さを求めなさい。

問２　**図２**において，立体 A－BCD は三角すいであり，直線 AB は平面 BCD と垂直である。△BCD は∠DBC＝90°の直角三角形であり，BC＝8 cm，BD＝6 cm である。E，F，G は，それぞれ辺 AB，AC，AD の中点である。E と F，E と G，F と G とをそれぞれ結ぶ。H は，線分 EB 上にあって E，B と異なる点である。H と C，H と F，H と G とをそれぞれ結ぶ。I は，H を通り辺 AD に平行な直線と辺 BD との交点である。I と C とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。

図２



(3)　△AFE の面積を S cm^2 とするとき，四角形 GDBE の面積を S を用いて表しなさい。

(4)　AB＝12 cm であり，立体 A－BCD から立体 AHFG と立体 HBCI を取り除いてできる立体の体積が 70 cm^3 であるときの，線分 HB の長さを求めなさい。

解答欄

問１	(1)	〔証明〕
	(2)	cm
問２	(3)	cm^2
	(4)	cm

解答

問１

(1)

〔証明〕

△AEG と△FCG において

対頂角は等しいから

∠AGE＝∠FGC …㋐

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形だから

∠ACB＝∠ABD …㋑

△ACE≡△BAD だから

∠CAE＝∠ABD …㋒

㋑，㋒より　∠ACB＝∠CAE

よって，錯角が等しいから　AE // BF

平行線の錯角は等しいから

∠EAG＝∠CFG …㋓

㋐，㋓より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△AEG∽△FCG

(2) $\frac{96}{35}$ cm

問２

(3) $\frac{9}{4}S$ cm^2

(4) $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ cm

解説

問１

(2)

図１のように，線分 CF の長さを x cm とすると，

FA＝FB＝x＋7(cm)

また，△ABC において，A から辺 BC に垂線 AH をおろすと，△ABC が AB＝AC の二等辺三角形だから，

$BH=CH=\frac{1}{2}BC=\frac{7}{2}$(cm)

よって，△ABH において，三平方の定理より，

$AH^2=AB^2-BH^2=8^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{207}{4}$

⇒　AH＞0 より，$AH=\frac{3\sqrt{23}}{2}$(cm)

$FH=x+\frac{7}{2}$(cm) より，△AHF において，三平方の定理から，

$FH^2+AH^2=AF^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{23}}{2}\right)^2=(x+7)^2$

$\Rightarrow \quad x^2+7x+\frac{49}{4}+\frac{207}{4}=x^2+14x+49$

$\Rightarrow \quad x^2+7x+64=x^2+14x+49 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{7}$(cm)

よって，$CF=\frac{15}{7}$(cm)，$AF=\frac{64}{7}$(cm)

△ACE≡△BAD より，AE＝BD＝5(cm)，

(1) より，△AEG∽△FCG だから，

$AG:FG=AE:FC=5:\frac{15}{7}=7:3$

$\Rightarrow \quad GF=\frac{3}{10}AF=\frac{3}{10}\times\frac{64}{7}=\frac{96}{35}$(cm)

図１

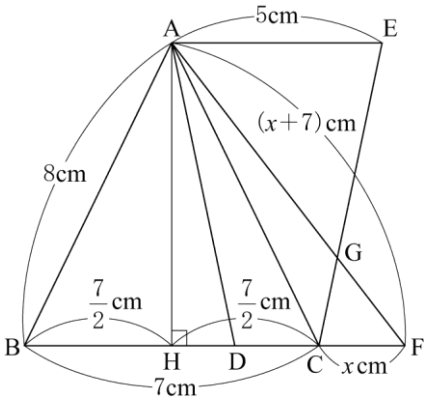
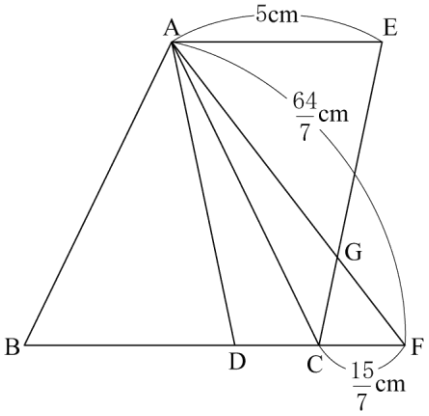


図２



問２

(3)

E は辺 AB の中点だから，AE＝EB

よって，△AFE において，底辺を EF としたときの高さ AE と，台形 GDBE の上底を GE，下底を DB としたときの高さ EB は等しい。その高さを AE＝EB＝h cm とする。

E，F は，それぞれ辺 AB，AC の中点だから，△ABC において，中点連結定理より，$EF=\frac{1}{2}BC=4$(cm)

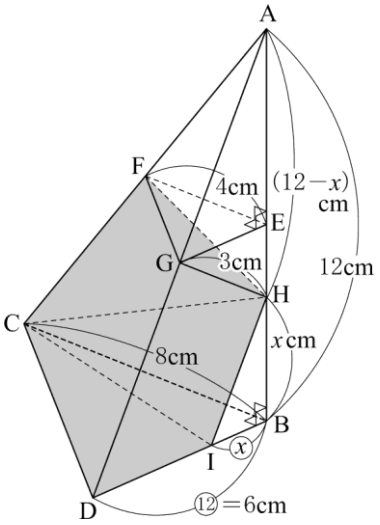
よって，△AFE の面積について，$S=\frac{1}{2}\times4\times h \quad \Rightarrow \quad S=2h \quad \Rightarrow \quad h=\frac{S}{2}$

E，G は，それぞれ辺 AB，AD の中点だから，△ABD において，中点連結定理より，

$EG=\frac{1}{2}BD=3$(cm)

よって，台形 GDBE の面積は，$\frac{1}{2}\times(3+6)\times h=\frac{9}{2}h \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{2}\times\frac{S}{2}=\frac{9}{4}S$(cm^2)

図３



(4)

立体 A－BCD の体積は，$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times8\times12=96(cm^3)$ だから，

立体 AHFG と立体 HBCI それぞれの体積の和は，$96-70=26(cm^3)$ である。

図３のように，HB＝x cm とする。

立体 AHFG を，△AFH を底面とする三角すいとみなすと，高さは EG＝3cm である。AH＝AB－HB＝$12-x$(cm)だから，

$\triangle AFH=\frac{1}{2}\times AH\times EF=\frac{1}{2}\times(12-x)\times4=24-2x(cm^2)$

よって，立体 AHFG の体積は，

$\frac{1}{3}\times\triangle AFH\times EG=\frac{1}{3}\times(24-2x)\times3=24-2x(cm^3)$

次に，立体 HBCI を，△HIB を底面とする三角すいとみなすと，高さは BC＝8cm である。

HI//AD より，△BAD において，平行線と線分の比から，

$BI:BD=BH:BA \quad\Rightarrow\quad BI:6=x:12 \quad\Rightarrow\quad BI=\frac{x}{2}(cm)$

よって，$\triangle HIB=\frac{1}{2}\times HB\times BI=\frac{1}{2}\times x\times\frac{x}{2}=\frac{x^2}{4}(cm^2)$ だから，

立体 HBCI の体積は，

$\frac{1}{3}\times\triangle HIB\times BC=\frac{1}{3}\times\frac{x^2}{4}\times8=\frac{2}{3}x^2(cm^3)$

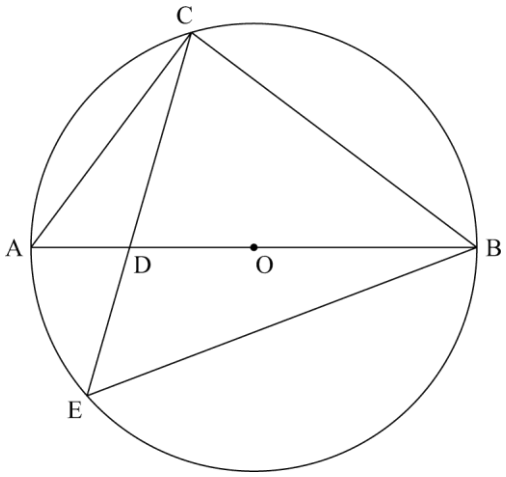
よって，$(24-2x)+\frac{2}{3}x^2=26 \quad\Rightarrow\quad x^2-3x-3=0$

$\Rightarrow$　2 次方程式の解の公式より，$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow$　$0<x<6$ より，$x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}(cm)$

【問 9】

右の図のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C があり，AB＝5 cm，AC＝3 cm である。線分 AB 上に点 D をとり，直線 CD と円 O との交点のうち点 C 以外の点を E とする。ただし，点 D は，点 A，B と一致しないものとする。各問いに答えよ。



（奈良県 2021 年度）

問１　△ACD∽△EBD を証明せよ。

問２　∠BAC＝a°とする。BC＝CE のとき，∠OCD の大きさを a を用いて表せ。

問３　∠AOE＝60°のとき，線分 DE の長さは線分 AD の長さの何倍か。

問４　AC＝CD のとき，△OEB の面積を求めよ。

解答欄

問１	〔証明〕
問２	
問３	倍
問４	cm^2

解答

問１

〔証明〕

△ACD と△EBD において

1 つの弧に対する円周角は等しいから

∠ACD＝∠EBD…①

対頂角は等しいから

∠ADC＝∠EDB…②

①，②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△ACD∽△EBD

問２ $90^\circ - a^\circ$

問３ $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ 倍

問４ $\dfrac{42}{25}$ cm^2

解説

問２

線分 OA，OC は円 O の半径だから，△ACO は OA＝OC の二等辺三角形なので，∠OCA＝∠BAC＝a°

また，同じ弧に対する円周角だから，∠CEB＝∠BAC＝a°

BC＝CE より△BCE は二等辺三角形だから，

∠CBE＝∠CEB＝a°

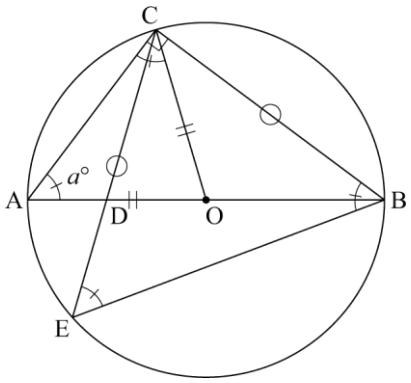
よって，△BCE で，三角形の内角の和は 180° だから，

∠ECB＝180° －(∠CBE＋∠CEB)＝$180^\circ - 2a^\circ$

線分 AB は円 O の直径だから，∠ACB＝90° より，

∠DCA＝∠ACB－∠ECB＝90° －（$180^\circ - 2a^\circ$）＝$2a^\circ - 90^\circ$

以上より，∠OCD＝∠OCA－∠DCA＝a° －($2a^\circ - 90^\circ$) ＝$90^\circ - a^\circ$



問３

線分 OB，OE は円の半径だから，AB＝5cm より，

$\mathrm{OB}=\mathrm{OE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{5}{2}\mathrm{cm}$

円の中心 O から線分 BE に垂線 OM をひくと，EM＝BM

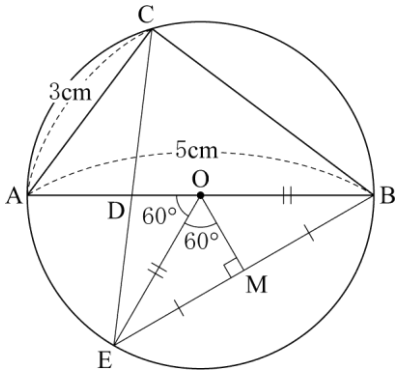
線分 OM は共通だから，△OMB≡△OME

∠AOE＝60° より，∠EOM＝$(180^\circ - 60^\circ)\div 2=60^\circ$

よって，△OME で，OM：OE：EM＝1：2：$\sqrt{3}$だから，

$\mathrm{EM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$(cm)，$\mathrm{BE}=2\mathrm{EM}=2\times\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

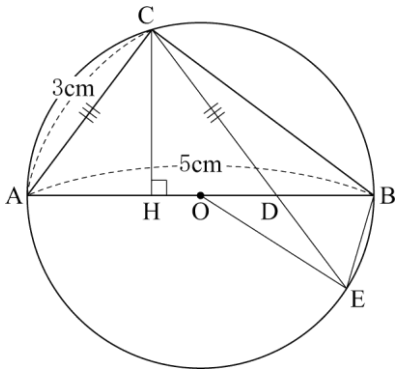
$=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$(cm)



問１より，△ACD∽△EBD だから，AD：ED＝AC：EB＝$3:\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=6:5\sqrt{3}$

よって，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

問4



点 C から線分 AB に垂線 CH をひくと，

∠ACB＝∠AHC＝90°，∠A は共通だから，△ACB∽△AHC

AB＝5cm，AC＝3cm より，AC：AH＝AB：AC＝5：3 だから，

$AH=3\times AC\div 5=3\times 3\div 5=\frac{9}{5}$(cm)

AC＝CD より，△ACD は二等辺三角形だから

$AD=2AH=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5}$(cm)

よって，$BD=AB-AD=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}$(cm)

△OEB と△EBD は，線分 OB，BD を底辺とすると高さが共通だから，

面積の比は，△OEB：△EBD＝OB：$BD=\frac{5}{2}:\frac{7}{5}=25:14$ より，$\triangle OEB=\frac{25}{14}\triangle EBD$

問1 より，△ACD∽△EBD だから，面積の比は，

$\triangle ACD:\triangle EBD=CD^2:BD^2=3^2:\left(\frac{7}{5}\right)^2=(9\times 25):49=225:49$ より，$\triangle EBD=\frac{49}{225}\triangle ACD$

よって，$\triangle OEB=\frac{25}{14}\times\frac{49}{225}\triangle ACD$

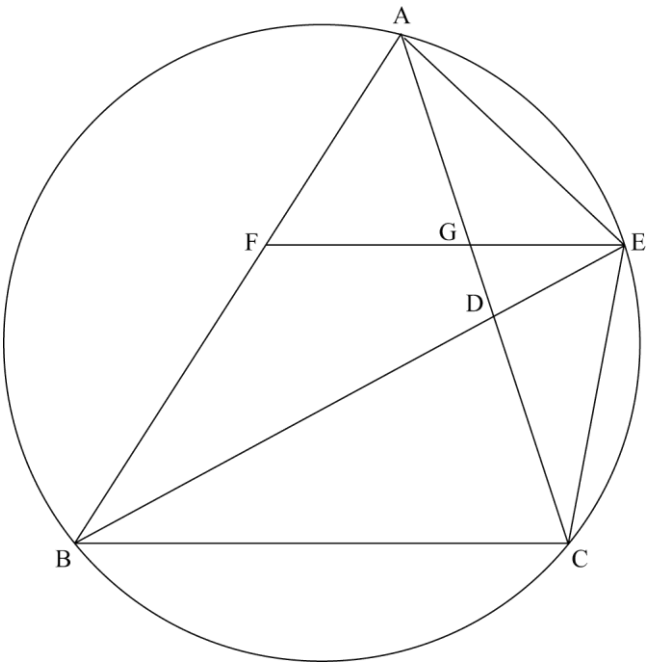
△AHC は辺の長さの比が 3：4：5 の直角三角形だから，$CH=AC\times 4\div 5=\frac{12}{5}$(cm)

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times AD\times CH=\frac{1}{2}\times\frac{18}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{108}{25}$(cm^2)

したがって，△OEB の面積は，$\frac{25}{14}\times\frac{49}{225}\times\frac{108}{25}=\frac{42}{25}$(cm^2)

【問 10】

次の図のように，円周上の点 A，B，C を頂点とする△ABC があり，∠ABC の二等分線と線分 AC との交点を D，円との交点のうち点 B と異なる点を E とします。また，線分 AB 上に点 F を，EF // CB となるようにとり，線分 EF と線分 AC との交点を G とします。さらに，点 A と点 E，点 C と点 E をそれぞれ結びます。**問１**，**問２**に答えなさい。



（岡山県 2021 年度 一般）

問１　△ABD∽△ECD を証明しなさい。

問２　AB＝6 cm，BC＝5 cm，AE＝3 cm であるとき，(1)～(3)に答えなさい。

(1)　線分 CE の長さを求めなさい。

(2)　ED：DG を最も簡単な整数比で答えなさい。

(3)　線分 AF の長さを求めなさい。

解答欄

問１		
問２	(1)	(cm)
	(2)	:
	(3)	(cm)

解答

問１

△ABD と△ECD において

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角は等しいから

∠BAD＝∠CED…(ⅰ)

対頂角は等しいから

∠ADB＝∠EDC…(ⅱ)

(ⅰ)，(ⅱ) から

２組の角がそれぞれ等しいので

△ABD∽△ECD

問２

(1) 3　(cm)

(2) 2：1

(3) $\frac{27}{11}$　(cm)

解説

問２

(1)

$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より，∠ACE＝∠ABE，$\overset{\frown}{CE}$に対する円周角より，∠CAE＝∠CBE，

仮定より，∠ABE＝∠CBE　よって，∠ACE＝∠CAE

したがって，２つの角が等しいから，△EAC は AE＝CE の二等辺三角形である。

よって，AE＝CE＝3(cm)

(2)

問１より，△ABD∽△ECD だから，BD：CD＝AB：EC＝6：3＝2：1

GE//BC より，△DGE と△DCB において，平行線と線分の比から，GD：CD＝ED：BD

よって，ED：GD＝BD：CD＝2：1

(3)

△ABC において，線分 BD が∠ABC の二等分線だから，AD：CD＝BA：BC＝6：5

△ABD∽△ECD より

AD：ED＝AB：EC＝6：3

よって，AD：CD：ED＝6：5：3

また，(2)より，ED：GD＝2：1＝3：$\frac{3}{2}$

よって，AD：CD：ED：GD＝6：5：3：$\frac{3}{2}$

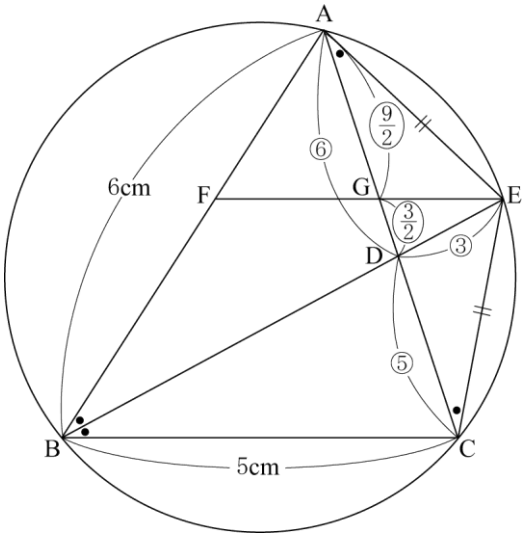
AG＝AD－GD，AC＝AD＋CD より，

AG：AC＝$\left(6-\frac{3}{2}\right)$：(5＋6)＝$\frac{9}{2}$：11＝9：22

よって，FG//BC より，△ABC において，平行線と線分の比から，AF：AB＝AG：AC

⇒　AF：6＝9：22　⇒　AF＝$\frac{27}{11}$(cm)

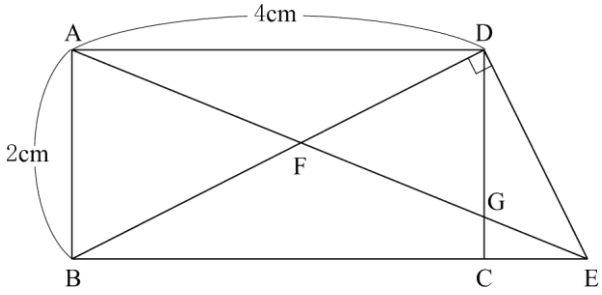
図１



【問 11】

下の図のように，AB＝2 cm，AD＝4 cm の長方形 ABCD がある。線分 BC を延長した直線上に，∠BDE＝90°となるように点 E をとり，2 点 D，E を結ぶ。線分 AE と線分 BD との交点を F，線分 AE と線分 CD との交点を G とするとき，**問１～問４**に答えなさい。

（徳島県 2021 年度）



問１　∠AFD＝a°とする。∠DEG の大きさを a を用いて表しなさい。

問２　△ABD∽△DEB を証明しなさい。

問３　頂点 D から線分 AE にひいた垂線と線分 AE との交点を H とする。線分 DH の長さを求めなさい。

問４　四角形 BCGF の面積を求めなさい。

解答欄

問１	度
問２	〔証明〕
問３	cm
問４	cm^2

解答

問１ $a-90$　(度)

問２

〔証明〕

△ABD と△DEB で

仮定より

∠BAD＝∠EDB＝90°　……①

AD // BE から，平行線の錯角は等しいので

∠ADB＝∠DBE ……②

①，②から

2 組の角が，それぞれ等しいので

△ABD∽△DEB

問３ $\frac{8\sqrt{29}}{29}$　(cm)

問４ $\frac{116}{45}$　(cm^2)

解説

問１

∠DFE＝180°－a° である。△DEF の内角の和が 180° であることに注目すると，

∠DEG＝180°－(90°＋180°－a°)＝a°－90°

問３

△ABD で三平方の定理より，$BD^2=AB^2+AD^2=2^2+4^2=20$　BD＞0 より，$BD=2\sqrt{5}$cm

問２ より△ABD∽△DEB で対応する線分の比は等しいことから，AD：DB＝DB：BE

$4:2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$：BE　BE＝5cm である。△ABE で三平方の定理より，$AE^2=AB^2+BE^2=29$　AE＞0 より，$AE=\sqrt{29}$cm

ここで AD//BE なので，$\triangle ADE=\triangle ADB=\frac{1}{2}\times4\times2=4(cm^2)$　また，△ADE の面積は，

$\frac{1}{2}\times AE\times DH$ とも表せるので，$4=\frac{1}{2}\times AE\times DH$　$4=\frac{1}{2}\times\sqrt{29}\times DH$　$DH=\frac{8\sqrt{29}}{29}$cm

問４

(四角形 BCGF)＝△BFC＋△CGF として面積を求める。△BDC の面積を S とする。

BE：AD＝5：4 より，BF：FD＝5：4 なので，$\triangle BFC=\frac{5}{9}S$，$\triangle CFD=\frac{4}{9}S$ である。

また，CE＝BE－BC＝1cm で CE：AD＝1：4 より，CG：GD＝1：4 なので，

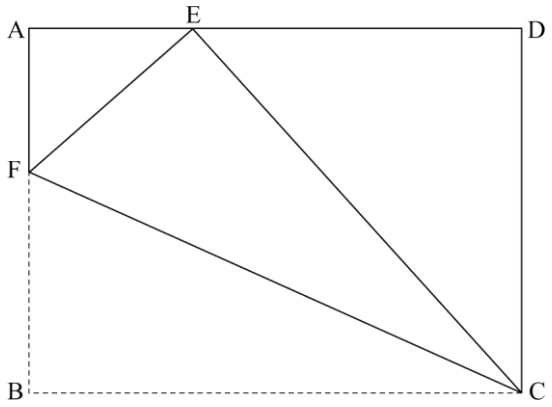
$\triangle CGF=\frac{1}{5}\times\triangle CFD=\frac{4}{45}S$　よって，(四角形 BCGF)＝$\triangle BFC+\triangle CGF=\frac{5}{9}S+\frac{4}{45}S=\frac{29}{45}S$

$S=\triangle BCD=4$ より，四角形 BCGF の面積は，$\frac{29}{45}S=\frac{29}{45}\times4=\frac{116}{45}(cm^2)$

【問 12】

AB＝10 cm，AB＜AD の長方形 ABCD を，下の**図１**のように，折り目が点 C を通り，点 B が辺 AD 上にくるように折り返す。点 B が移った点を E とし，折り目を線分 CF とすると，AF＝4 cm であった。

図１



このとき，次の問いに答えなさい。

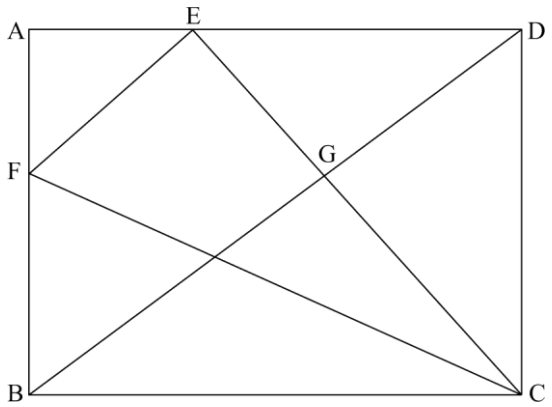
（愛媛県 2021 年度）

問１　△AEF∽△DCE であることを証明せよ。

問２　線分 AE の長さを求めよ。

問３　下の**図２**のように，折り返した部分をもとにもどし，線分 CE と線分 BD との交点を G とする。このとき，四角形 BGEF の面積を求めよ。

図２



解答欄

問１	〔証明〕
問２	cm
問３	cm^2

解答

問１

〔証明〕

△AEF と△DCE において

四角形 ABCD は長方形だから

∠A＝∠D＝90° …①

∠FEC＝90° だから

∠AEF＝180° －∠FEC－∠DEC

＝90° －∠DEC…②

また，△DCE で∠EDC＝90° だから

∠DCE＝180° －∠EDC－∠DEC

＝90° －∠DEC…③

②，③から，∠AEF＝∠DCE…④

①，④で，２つの三角形は，２組の角がそれぞれ等しいことがいえたから

△AEF　∽△DCE

問２ $2\sqrt{5}$　(cm)

問３ $18\sqrt{5}$　(cm^2)

解説

問１

90° ±（同じ大きさの角）で，２つの角度が等しいことを述べる頻出の記述が含まれており，確認しておきたい。また，三角形の辺の長さの情報が少ししか与えられていないことからして，『２つの角がそれぞれ等しい』という相似条件を使うことを予測することもできるだろう。

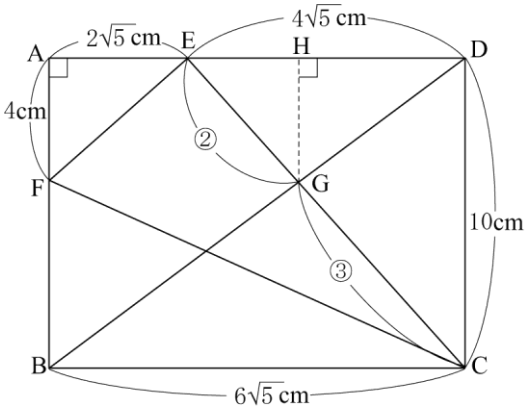
問２

折り返した後の線分と折り返す前の線分の長さは等しいので，EF＝BF＝10－4＝(6cm)

△AEF で三平方の定理より，$EF^2=AF^2+AE^2$　⇒　$6^2=4^2+AE^2$　⇒　$AE^2=20$　⇒　AE＞0 より

$AE=2\sqrt{5}$cm

問３



(四角形 BGEF)＝△ABD－△AEF－△EGD で面積を求める。

問１より△AEF∽△DCE で，対応する線分の長さの比は等しいので，AF : DE＝AE : DC　⇒　4 : DE＝$2\sqrt{5}$: 10　⇒　DE＝$4\sqrt{5}$cm

よって，AD＝BC＝$6\sqrt{5}$cm となる。ここで，△GED∽△GCB に注目すると，相似比は

DE : BC＝$4\sqrt{5}$: $6\sqrt{5}$＝2 : 3 なので，EG : GC＝2 : 3　G を通り DC に平行な直線を引き，DE との交点を H とする。

△EGH∽△ECD で，相似比は EG : EC＝2 : 2＋3＝2 : 5 なので GH : CD＝2 : 5　⇒　GH : 10＝2 : 5

GH＝4cm

よって

(四角形 BGEF)＝△ABD－△AEF－△EGD

$=\frac{1}{2}\times AB\times AD-\frac{1}{2}\times AE\times AF-\frac{1}{2}\times DE\times GH$

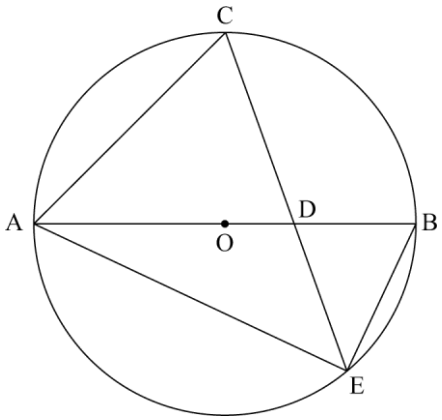
$=\frac{1}{2}\times 10\times 6\sqrt{5}-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4-\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 4$

$=30\sqrt{5}-4\sqrt{5}-8\sqrt{5}=18\sqrt{5}(cm^2)$

【問 13】

下の図のように，線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の周上に∠CAB＝45° となるような点 C をとり，点 A と点 C を結ぶ。線分 OB 上に点 D をとり，線分 CD を点 D の方向へ延長したときの円 O との交点を E とする。点 A と点 E，点 B と点 E をそれぞれ結ぶ。このとき，次の**問１・問２**に答えなさい。

（高知県 A 2021 年度）



問１　△AEC∽△DEB を証明せよ。

問２　円 O の半径を 6 cm，OD＝2 cm とするとき，次の(1)・(2)の問いに答えよ。

(1)　線分 AC の長さを求めよ。

(2)　点 B と点 C を結ぶ。このとき，四角形 AEBC の面積は，三角形 DEB の面積の何倍か。

解答欄

問１	〔証明〕 △AEC と△DEB において したがって　△AEC∽△DEB	
問２	(1)	cm
	(2)	倍

解答

問１

〔証明〕

△AEC と△DEB において

∠ACE，∠DBE はそれぞれ$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$に対する円周角なので

∠ACE＝∠DBE …①

∠CAB，∠DEB はそれぞれ$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角なので

∠CAB＝∠DEB

また，∠CAB＝45°なので

∠DEB＝45° …②

∠AEB は半円の弧に対する円周角なので

∠AEB＝90° …③

②，③より

∠AEC＝∠AEB－∠DEB

＝90°－45°

＝45° …④

②，④より

∠AEC＝∠DEB…⑤

①，⑤より

２組の角がそれぞれ等しい。

したがって　△AEC∽△DEB

問２

(1) $6\sqrt{2}$　cm

(2) $\frac{27}{4}$　倍

解説

問１

円が出てきているので，『同じ長さの弧に対する円周角は等しい』という性質を使って考える。

問２

(1)

直径に対する円周角である∠ACB が 90°で，∠CAB＝45°なので，△ACB は直角二等辺三角形である。よって，AC：AB＝$1:\sqrt{2}$　AC：12＝$1:\sqrt{2}$　AC＝$6\sqrt{2}$cm

(2)

△ABC＝$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=36(\mathrm{cm}^2)$　ここで，同じ弧$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$に対する円周角は等しいので，

∠ABC＝∠AEC＝45°よって，∠AED＝∠BED＝45°なので，EC は∠AEB の二等分線である。

よって，二等分線の性質より，EA：EB＝AD：DB＝(6＋2)：(6－2)＝2：1 となり，正の数 x を用いて，EA＝$2x$，EB＝x とおくことができる。

△AEB で三平方の定理より，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{EA}^2+\mathrm{EB}^2$　$144=4x^2+x^2$　$x^2=\frac{144}{5}$　$x>0$ より，$x=\frac{12\sqrt{5}}{5}$cm　よって，EA＝$\frac{24\sqrt{5}}{5}$cm，EB＝$\frac{12\sqrt{5}}{5}$cm となり，△AEB＝$\frac{1}{2}\times\mathrm{EA}\times\mathrm{EB}=\frac{1}{2}\times\frac{24\sqrt{5}}{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}$

＝$\frac{144}{5}(\mathrm{cm}^2)$　また，AD：DB＝2：1 なので，△DEB＝$\frac{1}{3}\times$△AEB＝$\frac{48}{5}(\mathrm{cm}^2)$となり，答えは，

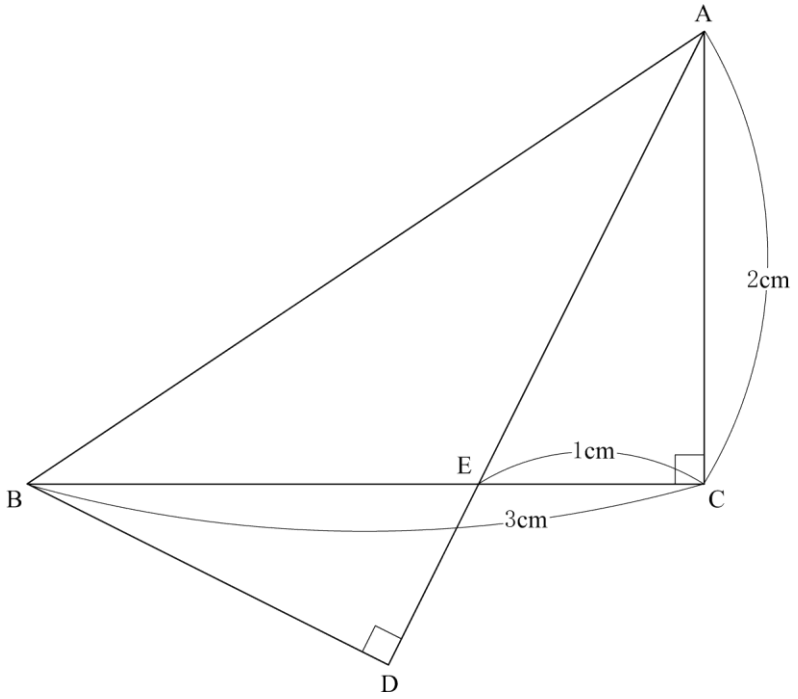
(四角形 AEBC)÷△DEB＝(△ABC＋△AEB)÷△DEB＝$\left(36+\frac{144}{5}\right)\div\frac{48}{5}=\frac{27}{4}$(倍)

【問 14】

下の図のように，AB を斜辺とする 2 つの直角三角形 ABC と ABD があり，辺 BC と AD の交点を E とする。また，AC＝2 cm，BC＝3 cm，CE＝1 cm とする。

このとき，次の**問 1**～**問 4** に答えなさい。

（佐賀県 2021 年度 一般）



問 1　線分 AE の長さを求めなさい。

問 2　△AEC∽△BED であることを証明しなさい。

問 3　△ABE の面積を求めなさい。

問 4　点 E から辺 AB に垂線をひき，その交点を F とする。

このとき，(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　線分 EF の長さを求めなさい。

(2)　△ECF の面積を S_1，△BED の面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問１	cm	
問２		
問３	cm^2	
問４	(1)	cm
	(2)	$S_1 : S_2 =$:

解答

問１ $\sqrt{5}$　cm

問２

△AEC と△BED において

仮定より

∠ACE＝∠BDE＝90°　……①

対頂角は等しいので

∠AEC＝∠BED　……②

①，②より

２組の角が，それぞれ等しいので

△AEC∽△BED

問３ ２　cm^2

問４

(1) $\frac{4\sqrt{13}}{13}$　cm

(2) $S_1 : S_2 = 15 : 26$

解説

問１

△AEC において，三平方の定理より

$AE^2 = AC^2 + EC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

　AE＞0 より

$AE = \sqrt{5}$(cm)

問３

BE＝BC－EC＝3－1＝2(cm)より

$\triangle ABE = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2(cm^2)$

問４

(1)

△ABC において，三平方の定理より

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

⇒　AB＞0 より

$AB = \sqrt{13}$(cm)

$\triangle ABE = AB \times EF \times \frac{1}{2} = \sqrt{13} \times EF \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}EF$　**問３**より，$\frac{\sqrt{13}}{2}EF = 2$　⇒　$EF = \frac{4\sqrt{13}}{13}$(cm)

(2)

△ABC と△EBF において，共通な角だから，∠ABC＝∠EBF，∠ACB＝∠EFB＝90°より，

２組の角がそれぞれ等しいので，△ABC∽△EBF

その相似比は，AB : EB＝$\sqrt{13}$: 2 だから，面積比は，△ABC : △EBF＝$(\sqrt{13})^2 : 2^2$＝13 : 4

また，BE : EC＝2 : 1 より，△EBF : △ECF＝2 : 1＝4 : 2 だから，△ABC : △ECF＝13 : 2

次に，**問２**より，△AEC∽△BED であり，その相似比は，AE : BE＝$\sqrt{5}$: 2 だから，

面積比は，△AEC : △BED＝$(\sqrt{5})^2 : 2^2$＝5 : 4

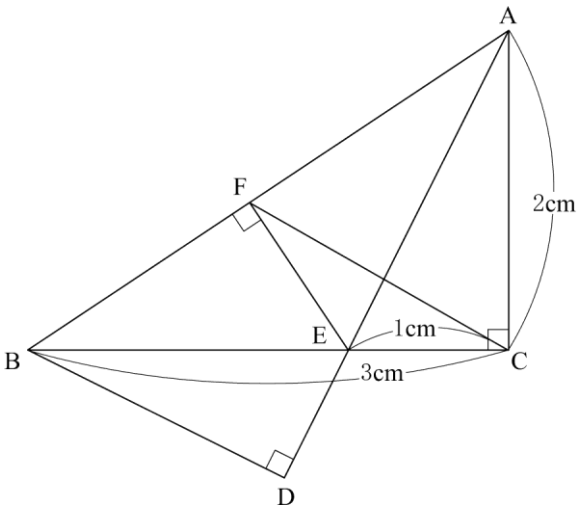
また，BC : EC＝3 : 1 より，△ABC : △AEC＝3 : 1＝15 : 5 だから，△ABC : △BED＝15 : 4

△ABC : △ECF＝13 : 2＝(13×15) : (2×15)＝195 : 30，

△ABC : △BED＝15 : 4＝(15×13) : (4×13)＝195 : 52 より，

△ECF : △BED＝$S_1 : S_2$＝30 : 52＝15 : 26

図１

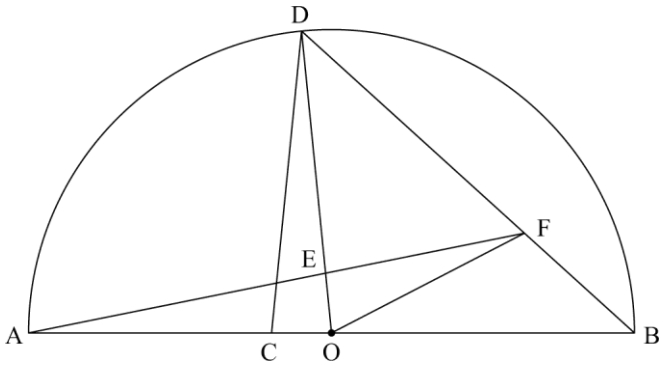


【問 15】

右の図は，線分 AB を直径とする半円で，点 O は AB の中点である。点 C は線分 AO 上にあり，点 D は$\overset{\frown}{AB}$上にあって，DC＝DO である。点 E は DO 上にあって，AE＝AO であり，点 F は AE の延長と線分 BD との交点である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（熊本県 2021 年度）



問１　優子（ゆうこ）さんは，△BDC∽△DFE であることを証明するため，次のように，まず∠DCB＝∠AEO を示し，それをもとにして証明した。［　　］に証明の続きを書いて，証明を完成しなさい。

証明

△DCO は DC＝DO の二等辺三角形だから

∠DCB＝∠DOC…①

また，△AEO は AE＝AO の二等辺三角形だから

∠AEO＝∠DOC…②

①，②より

∠DCB＝∠AEO…③

ここで，△BDC と△DFE において

［　　］

よって，△BDC∽△DFE

問２　AB＝10 cm，OC＝1 cm のとき，△DFE の面積は $2\sqrt{11}\text{cm}^2$ である。

(1)　△BDC の面積は，△DFE の面積の何倍であるか，求めなさい。

(2)　△BFO の面積を求めなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

解答欄

問１		
問２	(1)	倍
	(2)	cm^2

解答

問１

対頂角だから

∠FED＝∠AEO…④

③，④より

∠DCB＝∠FED…⑤

△OBD は OB＝OD の二等辺三角形だから

∠CBD＝∠EDF…⑥

⑤，⑥より

２組の角がそれぞれ等しい。

問２

(1) $\frac{9}{4}$ 倍

(2) $\frac{5\sqrt{11}}{4}$ cm^2

解説

問２

(1)

問１より，△DCO と△AEO は，∠DCO＝∠DOC＝∠AEO＝∠AOE より，２組の角がそれぞれ等しいので，△DCO∽△AEO　さらに，半円 O の半径だから，DO＝AO より，その相似比は 1：1 だから，△DCO≡△AEO　よって，OC＝OE＝1(cm)

BC＝OC＋OB＝6(cm)，DE＝OD－OE＝4(cm)で，**問１**より，△BDC∽△DFE なので，その相似比は，BC：DE＝6：4＝3：2　よって，その面積比は，△BDC：△DFE＝3^2：2^2＝9：4

したがって，△BDC の面積は，△DFE の面積の $\frac{9}{4}$ 倍である。

(2)

(1)より，$\triangle BDC=\frac{9}{4}\triangle DFE$

$=\frac{9}{4}\times 2\sqrt{11}=\frac{9\sqrt{11}}{2}(cm^2)$

CO：OB＝1：5 より，$\triangle BDO=\frac{5}{6}\triangle BDC$

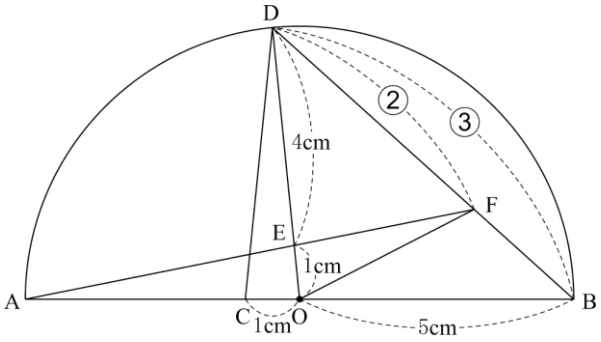
図１のように，△BDC∽△DFE より

BD：DF＝3：2　⇒　DF：FB＝2：1

よって，$\triangle BFO=\frac{1}{3}\triangle BDO=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\triangle BDC$

$=\frac{5}{18}\triangle BDC=\frac{5}{18}\times\frac{9\sqrt{11}}{2}=\frac{5\sqrt{11}}{4}(cm^2)$

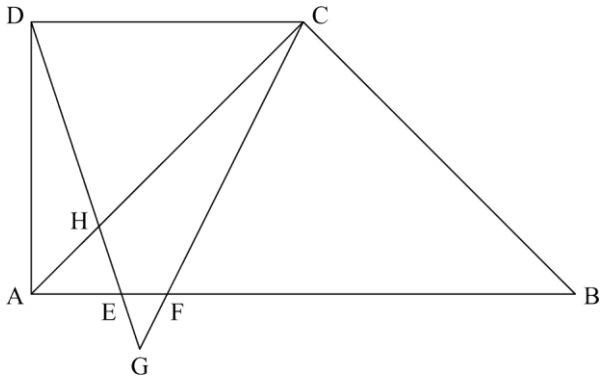
図１



【問 16】

右の図のように，∠ACB＝90°である直角二等辺三角形 ABC と，∠ADC＝90°である直角二等辺三角形 ACD がある。辺 AB 上に点 E を，AE の長さが EB の長さより短くなるようにとり，線分 EB 上に点 F を，∠ACF＝∠ADE となるようにとる。点 G は，DE の延長と CF の延長との交点であり，辺 AC と線分 DE との交点を H とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。



（熊本県 2021 年度）

問１　△BCF∽△CDH であることを証明しなさい。

問２　AB＝12 cm，AE＝2 cm のとき，AC＝BC＝$6\sqrt{2}$cm，CF＝$3\sqrt{5}$cm である。このとき，線分 DH と線分 HG の長さの比 DH：HG を求めなさい。答えは最も簡単な整数比で表すこと。

解答欄

問１	〔証明〕
問２	DH：HG＝　　：

解答

問１

〔証明〕

△BCF と△CDH において

△ABC は直角二等辺三角形だから

∠CBF＝45°…①

△ACD は直角二等辺三角形だから

∠DCH＝45°…②

①，②より

∠CBF＝∠DCH…③

∠ACB＝90°だから

∠BCF＝90°－∠ACF…④

∠ADC＝90°だから

∠CDH＝90°－∠ADE…⑤

∠ACF＝∠ADE だから，④，⑤より

∠BCF＝∠CDH…⑥

③，⑥より

2 組の角がそれぞれ等しいから

△BCF∽△CDH

問２ DH：HG＝5：3

解説

問２

△ACD は，∠ADC＝90°の直角二等辺三角形であり，AC＝$6\sqrt{2}$ cm であることから，

DC：AC＝1：$\sqrt{2}$　⇒　DC：$6\sqrt{2}$＝1：$\sqrt{2}$

⇒　DC＝6(cm)

∠DCA＝∠CAB＝45°だから，錯角が等しいので，DC//AB

図１のように，△HDC と△HEA において，平行線と線分の比から，DH：EH＝DC：EA＝6：2＝3：1

また，**図２**のように，直角二等辺三角形 ABC の頂点 C から底辺 AB に垂線 CM をおろすと，点 M は底辺 AB の中点となり，△ACM は AM＝CM＝6(cm)の直角二等辺三角形となる。

△CFM において，三平方の定理より，

$FM^2=CF^2-CM^2=(3\sqrt{5})^2-6^2=9$

⇒　FM＞0 より，FM＝3(cm)

EF＝AM－AE－FM＝6－2－3＝1(cm)

図３のように，DC//EF より，△GDC において，平行線と線分の比から，

GE：GD＝EF：DC＝1：6

⇒　DE：EG＝5：1

DH：EH＝3：1＝15：5,

DE：EG＝5：1＝20：4 より，

DH：HE：EG＝15：5：4

よって，DH：HG＝15：9＝5：3

図１

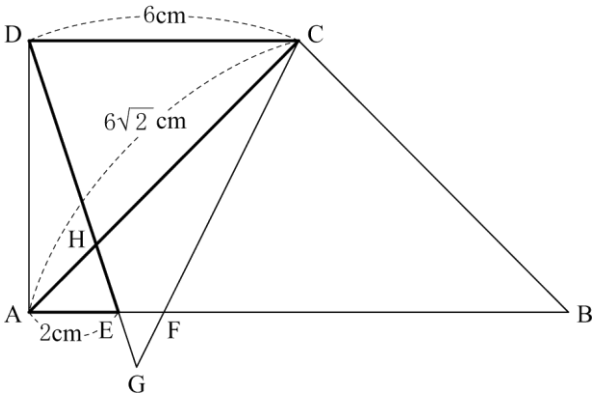


図２

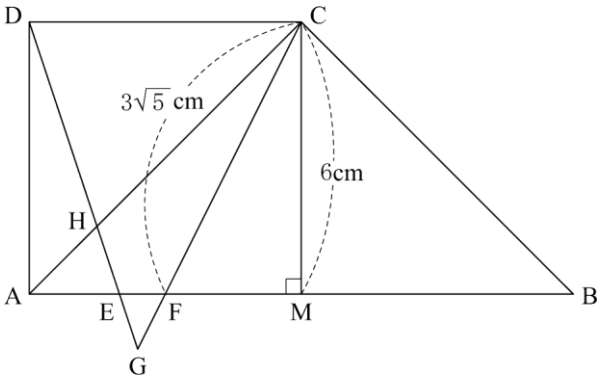
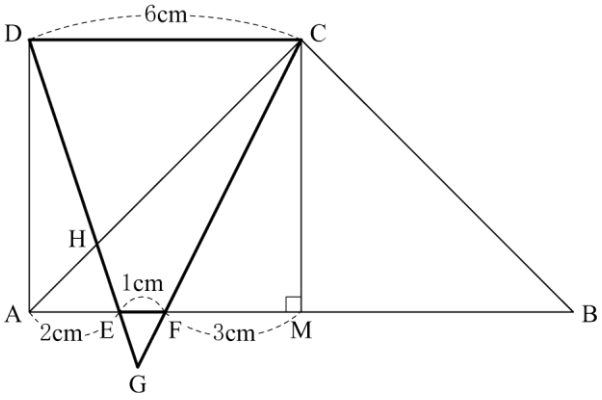


図３



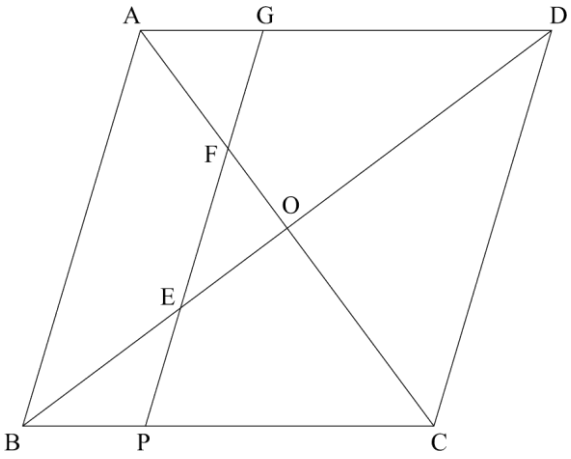
【問 17】

右の**図**のように，ひし形 ABCD があり，対角線 BD と対角線 AC の交点を O とする。

また，辺 BC 上に点 P があり，点 P を通り辺 AB に平行な直線と，対角線 BD，対角線 AC，辺 AD との交点をそれぞれ E，F，G とする。

ただし，点 P は，頂点 B または頂点 C と一致しない。

次の**問１**，**問２**に答えなさい。



（大分県 2021 年度）

問１　△ABC∽△FPC であることを証明しなさい。

問２　AB＝5 cm，AC＝6 cm とする。また，△BPE の面積と△EOF の面積が等しくなるように点 P をとる。

次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　線分 BO の長さを求めなさい。

(2)　△AFG の面積を求めなさい。

解答欄

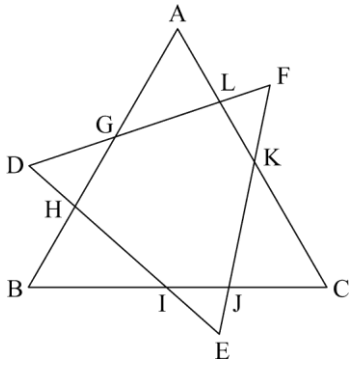
問１	〔証明〕	
問２	(1)	(cm)
	(2)	(cm^2)

解答
問１
〔証明〕
△ABC と△FPC において
共通な角であるから
∠ACB＝∠FCP　…①
平行線の同位角は等しいから
AB // GP より
∠ABC＝∠FPC　…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABC∽△FPC
問２
(1) 4　(cm)
(2) $18-12\sqrt{2}$　(cm^2)
解説
問１
平行線が存在するので，錯角・同位角が等しいことを利用できる。相似の証明か合同の証明かにかかわらず，図形の証明問題で「平行線」ときたら，「錯角・同位角が等しい」ということを連想できるようにしておくとよいだろう。
問２
(1)
ひし形の対角線は，それぞれの中点で垂直に交わるという性質をもつので，AO＝3cm，
∠AOB＝90° である。△AOB で三平方の定理より，$AB^2=AO^2+BO^2$　$5^2=3^2+BO^2$　BO＞0 より，BO＝4cm
(2)
$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times OB\times OC=6(cm^2)$　また，△OBC＝(四角形 OEPC)＋△BPE＝(四角形 OEPC)＋△EOF＝△CFP　つまり，△OBC＝△CFP で，$\triangle CFP=6(cm^2)$である。$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times AC\times BO=12(cm^2)$であり，△ABC : △CFP＝2 : 1　**問１**より△ABC∽△FPC で面積比が 2 : 1 なので，相似比は$\sqrt{2}$: 1 である。よって，CA : CF＝$\sqrt{2}$: 1 となり，AF : CF＝$(\sqrt{2}-1)$: 1　ここで△AFG∽△CFP で，その相似比は$(\sqrt{2}-1)$: 1 なので面積比は，$\triangle AFG : \triangle CFP=(\sqrt{2}-1)^2 : 1^2$
$\triangle AFG : 6=(\sqrt{2}-1)^2 : 1$　$\triangle AFG=18-12\sqrt{2}(cm^2)$

【問 18】

右の図において，正三角形 ABC の辺と正三角形 DEF の辺の交点を G，H，I，J，K，L とするとき，△AGL∽△BIH であることを証明せよ。

（鹿児島県 2021 年度）



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

△AGL と△BIH において

△ABC は正三角形だから，∠LAG＝∠HBI＝60°　…①

∠ALG＋∠AGL＝120°　…②

△DEF は正三角形だから，∠GDH＝60°

∠DGH＋∠DHG＝120°　…③

対頂角は等しいから，∠AGL＝∠DGH　…④

②，③，④より，∠ALG＝∠DHG　…⑤

また，対頂角は等しいから，∠DHG＝∠BHI　…⑥

⑤，⑥より，∠ALG＝∠BHI　…⑦

①，⑦より

2 組の角がそれぞれ等しいから

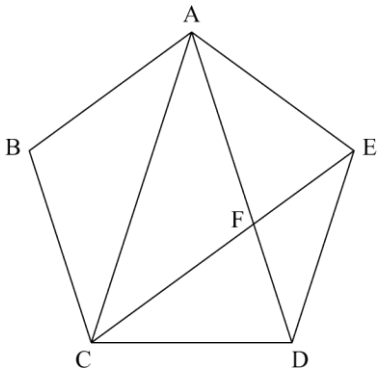
△AGL∽△BIH

【問 19】

図１は，1 辺の長さが 1 cm の正五角形 ABCDE である。
線分 AD，CE の交点を F とするとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県 2021 年度）

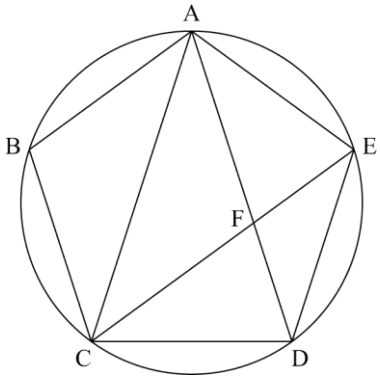
図１



問１　∠ABC の大きさを求めなさい。

問２　**図２**のように，**図１**の正五角形 ABCDE の 5 つの頂点は 1 つの円周上にあり，円周を 5 等分する。
このことを利用して，△ACD∽△AFE となることを次のように証明した。［　　］をうめて証明を完成させなさい。ただし，証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

図２



【証明】
△ACD と△AFE において，
$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$　より，
1 つの円で等しい弧に対する［　　］は等しいから
∠CAD＝∠FAE…①
［　　］…②
①，②より
［　　］から
△ACD∽△AFE

問３　線分 AD の長さを求めなさい。

解答欄

問１	∠ABC＝　　°
問２	△ACD と△AFE において， $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$より， 1 つの円で等しい弧に対する　　 は等しいから， ∠CAD＝∠FAE…① 　　…② ①，②より 　　から △ACD∽△AFE
問３	cm

解答

問１ ∠ABC＝108 °

問２

△ACD と△AFE において，

$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$より，

１つの円で等しい弧に対する［円周角］は等しいから，

∠CAD＝∠FAE…①

［$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角は等しいから ∠ADC＝∠AEF…②］

①，②より

［２組の角がそれぞれ等しい］から

△ACD∽△AFE

問３ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ cm

解説

問１

正五角形の内角の和は，180°×(5－2)＝540°

∠ABC は，正五角形の１つの内角なので，∠ABC＝540°÷5＝108°

問３

AD＝x cm とする。△ABC，△DEA は，ともに，等辺の長さが 1cm で，頂角の大きさが 108°の二等辺三角形だから，

AC＝DA＝x cm　これと，△ACD∽△AFE より，AF＝AE＝1cm

図１のように，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$より，その弧に対する円周角はすべて同じ大きさだから，∠ADE＝∠CED

よって，△FDE は二等辺三角形だから，FE＝FD＝x－1(cm)

△ACD と△AFE において，

AD：AE＝CD：FE　⇒　$x:1=1:(x-1)$　⇒　$x(x-1)=1$

$x(x-1)=1$　⇒　$x^2-x-1=0$　⇒　２次方程式の解の公式より，

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

⇒　$x>0$ より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(cm)

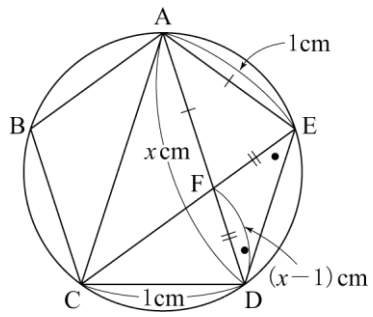



図１