

9. 式の証明の問題（2003 年度出題）

【問 1】

A 中学校の近くの文房具店では、1組3冊のノートと、1組5冊のノートを販売しています。1組3冊のノートを x 組、1組5冊のノートを y 組買うとき、ノートの合計冊数は $3x+5y$ で表されます。表は、その x, y の値とそのときの合計冊数との関係を表したもので、例えば 14 は、 $x=3, y=1$ のときの合計冊数が 14 であることを示しています。

次の問いに答えなさい。

（北海道 2003 年度）

問1 表の ア にあてはまる数を求めなさい。

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	5	10	15	20			
1	3	8	13	18				
2	6	11	16		ア			
3	9	14						
4	12							
5								
6								

問2 合計冊数が 28 となるときの x, y の値の組を2つ求めなさい。ただし、 x, y はいずれも自然数とします。

問3 表の合計冊数を表す数のうち、縦横に隣り合う4つを $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$ とするとき、

例のように、 $a+d$ と $b+c$ の値は等しくなります。表の中(x, y の値を除く)

では、どこでも $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$ の $a+d$ と $b+c$ の値が等しくなりますが、そのわけを文字を使った式で説明しなさい。

例 $a=8$ のとき

8	13	$a+d=8+16$
11	16	$b+c=13+11$

解答欄

問1		
問2	$x=$, $y=$	$x=$, $y=$
問3	説明	

解答

問1 26

問2

$$x=1, y=5$$

$$x=6, y=2$$

問3

説明

$$b=a+5, c=a+3, d=a+8$$

$$a+d=a+a+8=2a+8$$

$$b+c=a+5+a+3=2a+8$$

よって $a+d$ と $b+c$ は等しい

解説

問1

$$3x+5y \text{ に } x=2, y=4 \text{ を代入すると } 3 \times 2 + 5 \times 4 = 26$$

問2

$3x+5y=28$ を成り立たせる自然数 x, y の組を求める。

$x=1, 2, 3, 4, 5, 6 \cdots$ のときの y の値を求めると

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	5	$\frac{22}{5}$	$\frac{19}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{13}{5}$	2	$\cdots$

表より

$$x=1, y=5$$

$$x=6, y=2$$

問3

b, c, d を a を用いて表すと

$$b=a+5$$

$$c=a+3$$

$$d=a+8 \text{ より}$$

$$a+d=a+(a+8)=2a+8$$

$$b+c=(a+5)+(a+3)=2a+8$$

よって $a+d$ と $b+c$ は等しい。

【問 2】

下のように、自然数を順に6個ずつ横に並べた。次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(秋田県 2003 年度)

	① 1 行 目	② 2 行 目	③ 3 行 目	④ 4 行 目	⑤ 5 行 目	⑥ 6 行 目
(1行目)	1	2	3	4	5	6
(2行目)	7	8	9	10	11	12
(3行目)	13	14	15	16	17	18
(4行目)	19	20	21	22	23	24
(5行目)	25	26	27	28	29	30
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- (1) 花子さんは、気づいたことを次のように説明した。

この説明が正しくなるように、①，②にあてはまる数を書きなさい。

n 行目の5列目の数を a として、次のような表にしました。

n	1	2	3	4	5	……
a	5	11	17	23	29	……

この表から、 n の値が 1 ずつ増加すると、対応する a の値は ① ずつ増加し、 $n=30$ のとき、 $a=$ ② となることがわかります。

- (2) 2003 は何行目の何列目にあるか、書きなさい。

- (3) 太郎さんは、「どの行でも、1列目の数と2列目の数の和は 3 の倍数となる」ことに気づき、このことを次のように証明した。①にはあてはまる式を書き、②には証明の続きを書いて、証明を正しく完成させなさい。

[証明]

n 行目の1列目の数は ① となり、

②

よって、 $3 \times (\text{自然数})$ となり、3 の倍数となる。

解答欄

(1)	①	
	②	
(2)	行目の 列目	
(3)	①	
	②	

解答

(1)

① 6

② 179

(2) 334 行目の 5 列目

(3)

① $6n-5$

②

n 行目の2列目の数は $6n-4$ と表すことができる。

n 行目の1列目の数と2列目の数の和は $12n-9$ となり,
 $3(4n-3)$ と式変形できる。

解説

(1)

① 6

②

$a=6n-1$ となっている。

よって $n=30$ のとき $a=6\times 30-1=179$

(2)

6列目は $6\times(\text{行数})$ になっている。

このことから $6\times 334=2004$ が 334 行目の6列目だとわかる。

よって 2003 は 334 行目の5列目となる。

(3)

① $6n-5$

②

n 行目の2列目の数は $6n-4$ と表すことができる。

n 行目の1列目の数と2列目の数の和は $12n-9$ となり $3(4n-3)$ と変形できる。

【問 3】

ある月のカレンダーを見ていた春子さんと良男さんは、カレンダーの中の5つの数を
右の図のような形に囲んでみたところ、次のことを見つけた。

日	月	火	水	木	金	土
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

〔春子さんの見つけたこと〕

どこを囲んでも、5つの数の和は5の倍数になる。

〔良男さんの見つけたこと〕

どこを囲んでも、縦3つの数の和と横3つの数の和は等しくなる。

〔春子さんの見つけたこと〕または〔良男さんの見つけたこと〕のどちらか一方を選び、それが正しいことを、囲んだ
形の中央に位置する数を n として、式を用いて説明しなさい。解答欄の()の中には、選んだ方の名前を書きな
さい。

(栃木県 2003 年度)

解答欄

()さんの見つけたこと

解答

〔(春子)さんの見つけたこと〕

中央の数を n とすると

上の数は $n-7$, 左の数は $n-1$, 右の数は $n+1$, 下の数は $n+7$ と表される。

よって5つの数の和は

$$(n-7) + (n-1) + n + (n+1) + (n+7) = 5n$$

n は整数であるから $5n$ は5の倍数である。

したがってどこを囲んでも5つの数の和は5の倍数になる。

〔(良男)さんの見つけたこと〕

中央の数を n とすると

上の数は $n-7$, 下の数は $n+7$, 左の数は $n-1$, 右の数は $n+1$ と表される。

よって縦3つの和は

$$(n-7) + n + (n+7) = 3n$$

横3つの和は

$$(n-1) + n + (n+1) = 3n$$

したがってどこを囲んでも縦3つの数の和と横3つの数の和は等しくなる。

解説

(春子)

中央の数を n とすると上の数は $n-7$, 左の数は $n-1$, 右の数は $n+1$, 下の数は $n+7$ と表される。

よって5つの数の和は

$$(n-7) + (n-1) + n + (n+1) + (n+7) = 5n$$

n は整数なので $5n$ は5の倍数である。

よってどこを囲んでも5つの数の和は、5の倍数になる。

(良男)

中央の数を n として(春子)の時のようにすると

$$\text{縦3つの和は } (n-7) + n + (n+7) = 3n$$

$$\text{横3つの和は } (n-1) + n + (n+1) = 3n$$

よってどこを囲んでも縦3つの数の和と横3つの数の和は等しくなる。

【問 4】

図は、1 から順に自然数を5個ずつ並べ、すべての偶数を消したものである。

このとき、

7		9
	13	
17		19

の形で、5つの奇数が入るように取り出し、

a		b
	c	
d		e

とおくとき、ど

の部分を取り出した場合でも、等式 $de - ab = 20c$ が成り立つことを証明しなさい。

1		3		5
	7		9	
11		13		15
	17		19	
21		23		25
	27		29	

(石川県 2003 年度)

解答欄

証明

解答

証明

$b = a + 2$, $c = a + 6$, $d = a + 10$, $e = a + 12$ と表すことができるので

$$de - ab = (a + 10)(a + 12) - a(a + 2)$$

$$= a^2 + 22a + 120 - a^2 - 2a$$

$$= 20a + 120$$

$$20c = 20(a + 6)$$

$$= 20a + 120$$

$$\text{したがって } de - ab = 20c$$

解説

b, c, d, e を a を用いて表すと

$$b = a + 2, c = a + 6, d = a + 10, e = a + 12$$

$$\text{だから } de - ab = (a + 10)(a + 12) - a(a + 2) = a^2 + 22a + 120 - a^2 - 2a$$

$$= 20a + 120 = 20(a + 6) = 20c$$

$$\text{したがって } de - ab = 20c$$

【問 5】

表は、九九の表の一部を取り出したものである。この表の数の間にある関係を調べていた A さんと B さんは、それぞれ次のことに気が付いた。

		かける数								
×		1	2	3	4	5	6	7	8	9
かけられる数	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27

[A さん]

○ で囲んだような縦に並ぶ3つの数では、最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひいた差は、真ん中の数の平方の〔 ① 〕に等しくなる。

[B さん]

⋯ で囲んだような、となり合う2つの偶数をかけたものに 1 を加えると、その2つの偶数の間の奇数の〔 ② 〕に等しくなる。

- このとき、次の1, 2に答えなさい。
- (山梨県 2003 年度)
- 1 〔 ① 〕, 〔 ② 〕に当てはまる適切な言葉を書きなさい。
- 2 A さん, B さんのどちらか一方を選び、その人の気付いたことが正しいことを文字式を用いて説明しなさい。ただし、A さんの場合は真ん中の数を、B さんの場合は小さい方の偶数を、それぞれ $2n$ (n は自然数) とすること。
- 解答欄の〔 〕には、選んだ方を書きなさい。

解答欄

1	①		②	
2	[さん]			

解答

1

① 2倍

② 平方(2乗)

2

[Aさん]

真ん中の数を $2n$ とすると

最も大きい数は $3n$, もっとも小さい数は n と表される。

最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひくと

$$(3n)^2 - n^2 = 9n^2 - n^2$$

$$= 8n^2$$

$$= 4n^2 \times 2$$

$$= (2n)^2 \times 2$$

となる。

したがって最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひいた差は真ん中の数の平方の2倍に等しくなる。

[Bさん]

小さい方の偶数を $2n$ とすると, 大きい方の偶数は $2n+2$, その間の奇数は $2n+1$ と表される。

となり合う2つの偶数をかけたものに1を加えると

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1$$

$$=(2n+1)^2$$

となる。

したがってとなり合う2つの偶数をかけたものに1を加えるとその間の奇数の平方に等しくなる。

解説

1

①

2, 4, 6 で計算してみる。

最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひいた差は

$$6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$$

真ん中の数の平方は $4^2 = 16$ なので

2倍すると最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひいた差と等しくなる。

②

4, 6 で計算してみる。

となり合う2つの偶数をかけたものに1を加えると $4 \times 6 + 1 = 25$ である。

その2つの偶数の間の奇数は5だから25は 5^2 に等しくなる。

2

[Aさん]

真ん中の数を $2n$ とすると最も大きい数は $3n$, 最も小さい数は n と表される。

最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひくと

$$(3n)^2 - n^2 = 9n^2 - n^2 = 8n^2 = 4n^2 \times 2 = (2n)^2 \times 2 \quad \text{となる。}$$

したがって最も大きい数の平方から最も小さい数の平方をひいた差は真ん中の数の平方の2倍に等しくなる。

[Bさん]

小さい方の偶数を $2n$ とすると, 大きい方の偶数は $2n+2$, その間の奇数は $2n+1$ と表される。

となり合う2つの偶数をかけたものに1を加えると

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2 \quad \text{となる。}$$

したがってとなり合う2つの偶数をかけたものに1を加えるとその間の奇数の平方に等しくなる。

【問 6】

図1は1枚の紙を真ん中で折り、1, 2, 3, 4 とページ番号を書いて、4 ページの左開きの冊子を作ったもので、図2はそれを中央で開いたものである。図3は2枚の紙を重ねて真ん中で折り、1 から順にページ番号を書いて、8 ページの冊子を作ったもので、図4はそれを中央で開いたものである。このように紙の枚数を増やしていく。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(和歌山県 2003 年度)

問1 次の(1), (2)に答えなさい。

- (1) 下の表は、紙の枚数と、冊子のページ数をまとめたものである。表中の(ア), (イ)にあてはまる数を求めなさい。

紙の枚数	1	2	3		(イ)	
冊子のページ数	4	8	(ア)		24	

- (2) 次の文中の(ウ)～(オ)にあてはまる式を求めなさい。

n 枚の紙で冊子を作ると、(ウ)ページの冊子ができる。また、その冊子を中央で開いたとき、左右のページ番号は(エ)と(オ)である。

- 問2 図3, 図4のように、2枚の紙で冊子を作ったとき、それぞれの紙の同じ面に書かれている左右のページ番号は、1と8, 2と7, 3と6, 4と5で、どの面も合計は9になる。 n 枚の紙で冊子を作ったとき、それぞれの紙の同じ面に書かれている左右のページ番号の合計を n の式で表しなさい。

- 問3 20 枚の紙で作った冊子から1枚の紙を取り出したとき、60 というページ番号が書かれていた。その紙に書かれている他の3つのページ番号を求めなさい。

図1

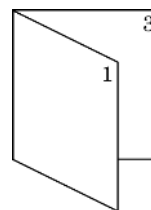


図2

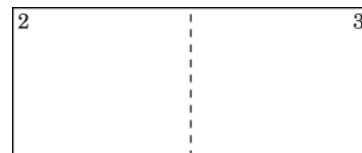


図3

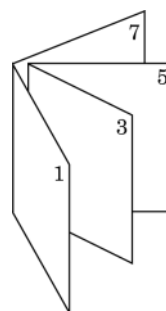
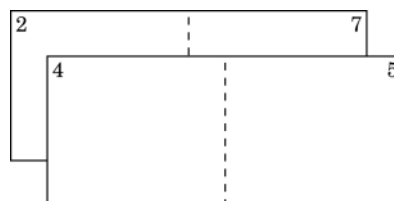


図4



解答欄

問1	(1)	(ア)	
		(イ)	
	(2)	(ウ)	
		(エ)	
		(オ)	
問2			
問3			

解答

問1

(1)

(ア) 12 (イ) 6

(2)

(ウ) $4n$ (エ) $2n$ (オ) $2n+1$

問2 $4n+1$

問3 21, 22, 59

解説

問1

(1)

(ア) 紙1枚につき4ページずつあるので3枚のとき $3 \times 4 = 12$ ページ

(イ) 24 ページのとき $24 \div 4 = 6$ 枚

(2)

(ウ) 紙1枚につき4ページずつあるので n 枚のとき $n \times 4 = 4n$ ページ

(エ) 中央の左のページ番号は冊子のページ数のちょうど半分なので $4n \div 2 = 2n$

(オ) よって右のページは $2n+1$

問2

n 枚のとき冊子のページ数は $4n$ である。

最初のページと最後のページは同じ紙の同じ面にあるので

ページ番号 1 と同じ面に書かれているページ番号は $4n$ である。

問3

$n=20$ のとき $4n+1=81$

よってページ番号 60 と同じ面に書かれているページ番号は $81-60=21$

またそれぞれの紙において前半部分のページ番号は奇数, 偶数の順になっているので
ページ番号 21, 22 は同じ紙に書かれている。

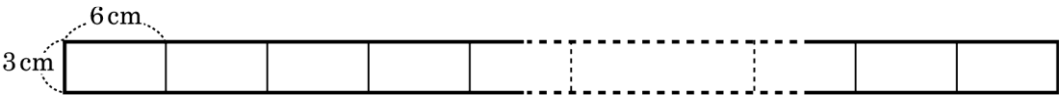
ページ番号 22 と同じ面に書かれているページ番号は $81-22=59$

よって 21, 22, 59 である。

【問 7】

2辺の長さが 3 cm, 6 cm の長方形のタイルがたくさんある。山口さんは、次の図のように、〔A〕, 〔B〕2つのならべ方により、それぞれ同じ枚数のタイルを1列にならべ、ならべてできる図形(太線で示した図形)の面積と周囲の長さを調べた。

〔A〕 3 cm の辺と 3 cm の辺をすきまなくつなぎ合わせる。



〔B〕 6 cm の辺と 6 cm の辺をすきまなくつなぎ合わせる。



次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2003 年度)

(1) ならべてできる図形の面積は、〔A〕, 〔B〕のならべ方によるちがいはない。タイルの枚数が n 枚のとき、その面積を n を使った式で表しなさい。

(2) 山口さんは、タイルの枚数が1～4枚のときについて、ならべてできる図形の周囲の長さを右の表のようにまとめ、〔A〕, 〔B〕のならべ方による周囲の長さの差が 6 でわり切れると予想した。タイルの枚数が n 枚のとき、ならべてできる図形の周囲の長さを、〔A〕, 〔B〕それぞれについて n を使った式で表し、その差が 6 でわり切れることを説明しなさい。

周囲の長さ (単位 cm)

枚数 ならべ方	1枚	2枚	3枚	4枚
〔A〕	18	30	42	54
〔B〕	18	24	30	36
差	0	6	12	18

解答欄

(1)	cm ²
(2)	説明

解答

(1) $18n \text{ cm}^2$

(2)

説明

周囲の長さは

[A]が $12n + 6 \text{ cm}$

[B]が $6n + 12 \text{ cm}$

だからその差は

$$(12n + 6) - (6n + 12)$$

$$= 6n - 6$$

$$= 6(n - 1) \text{ cm}$$

$n - 1$ は整数なので

$6(n - 1)$ は6でわり切れる。

よって周囲の長さの差は6でわり切れる。

解説

(1)

長方形のタイル1枚の面積は 18cm^2 だから n 枚の面積は $18n \text{ cm}^2$

(2)

[A]の場合

周囲の長さは2枚のとき 30 cm で1枚増えるごとに 12 cm ずつ増えるから

$$n \text{ 枚のときは } 30 + 12(n - 2) = 12n + 6 \text{ cm}$$

[B]の場合

周囲の長さは2枚のとき 24cm で1枚増えるごとに 6 cm ずつ増えるから

$$n \text{ 枚のときは } 24 + 6(n - 2) = 6n + 12 \text{ cm} \text{ だから}$$

その周囲の長さの差は

$$(12n + 6) - (6n + 12) = 6n - 6 = 6(n - 1) \text{ cm}$$

$n - 1$ は整数だから

$6(n - 1)$ は 6 で割り切れる。

よって周囲の長さの差は 6 で割り切れる。

【問 8】

「差が 4 である 2 つの整数において、大きい方の整数の 2 乗から小さい方の整数の 2 乗をひいた数は、8 でわり
きれる」ことの証明を、 の中に完成せよ。

(福岡県 2003 年度)

解答欄

(証明) 小さい方の整数を n とする。

解答

大きい方の整数は $n+4$ である。

大きい方の整数の 2 乗から小さい方の整数の 2 乗をひいた数は

$$(n+4)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 8n + 16 - n^2$$

$$= 8n + 16$$

$$= 8(n+2)$$

であり $8 \times (\text{整数})$ となる。

だから大きい方の整数の 2 乗から小さい方の整数の 2 乗をひいた数は 8 でわりきれる。

解説

大きい方の整数は $n+4$ である。

大きい方の整数の 2 乗から小さい方の整数の 2 乗をひいた数は

$$(n+4)^2 - n^2 = n^2 + 8n + 16 - n^2 = 8n + 16 = 8(n+2) \text{ であり } 8 \times (\text{整数}) \text{ となる。}$$

だから大きい方の整数の 2 乗から小さい方の整数の 2 乗をひいた数は 8 でわりきれる。

【問 9】

2けたの自然数と、その自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数との和は、11 の倍数になる。このわけを、もとの自然数の十の位の数を x 、一の位の数を y として説明せよ。

(鹿児島県 2003 年度)

解答欄

説明

解答

説明

もとの自然数は $10x+y$ と表される。

十の位の数と一の位の数を入れかえた数は $10y+x$ となる。

2つの数の和は

$$(10x+y)+(10y+x)$$

$$=11(x+y)$$

$x+y$ は整数なので

$11(x+y)$ は 11 の倍数となる。

したがって2けたの自然数とその自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数との和は 11 の倍数になる。

解説

もとの自然数は $10x+y$ と表され

十の位の数と一の位の数を入れかえた数は $10y+x$ と表される。

したがってこの2つの数の和は

$$(10x+y)+(10y+x)=11(x+y)$$

$x+y$ は整数だから $11(x+y)$ は 11 の倍数となる。

したがって2けたの自然数とその自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数との和は 11 の倍数になる。