

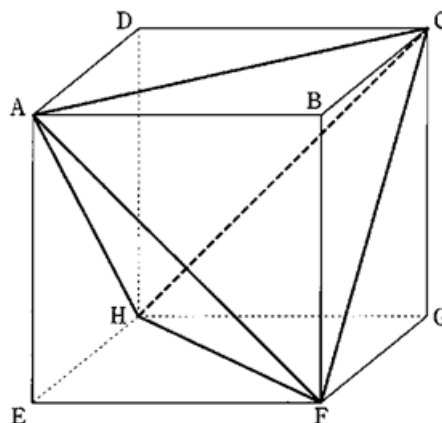
5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2008 年度出題】

【問 1】

図のように、1 辺の長さが 6cm の立方体 $ABCD-EFGH$ があります。
このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(岩手県 2008 年度)

問1 立方体 $ABCD-EFGH$ の体積は、四面体 $CFGH$ の体積の何倍ですか。



問2 四面体 $ACFH$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1	倍
問2	cm^3

解答

問1 6 倍

問2 72 cm^3

解説

問2

四面体 $ACFH$ の体積は

立方体 $ABCD-EFGH$ から四面体 $CFGH$, $ACDH$, $AFEH$, $ACBF$ を除いたもので

この 4 つの四面体の体積はそれぞれ立方体の体積の $\frac{1}{6}$ だから

求める体積は

$$\text{立方体の} \left(1 - 4 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \text{ 倍}$$

$$\text{よって} \frac{1}{3} \times 6^3 = 72 \text{ cm}^3$$

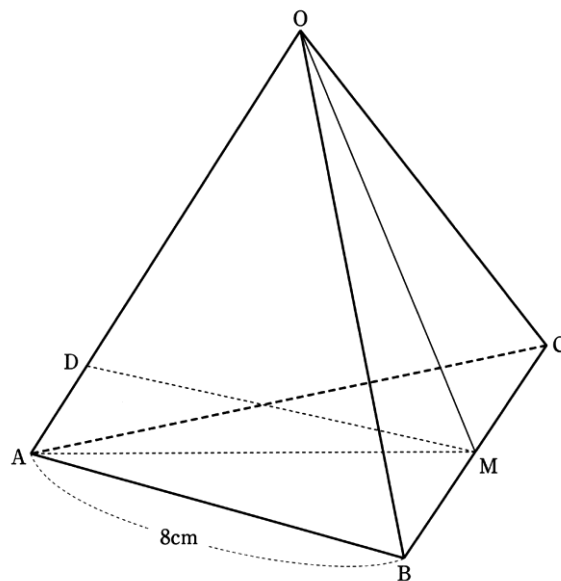
【問 2】

図のように、4 点 O, A, B, C を頂点とする 1 辺の長さが 8cm の正四面体がある。辺 BC の中点を M とし辺 OA 上に $OD=MD$ となるように点 D をとる。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(福島県 2008 年度)

問1 線分 OM の長さを求めなさい。



問2 $\triangle OAM$ の面積を求めなさい。

問3 点 D から線分 AM にひいた垂線と AM との交点を H とするとき, DH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm ²
問3	cm

解答

問1 $4\sqrt{3}$ cm

問2 $16\sqrt{2}$ cm²

問3 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm

解説

問2

M から OA にひいた垂線を MK とする。

OM=AM= $4\sqrt{3}$ の二等辺三角形だから OK=AK=4

よって△MAK で

$$\text{三平方の定理より } MK = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle OAM = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

問3

AD= a とおくと OD=MD= $8-a$, DK= $4-a$ とおける。

△DMK で

$$\text{三平方の定理より } (8-a)^2 = (4-a)^2 + (4\sqrt{2})^2$$

これを解いて

$$a=2$$

$$MD=8-2=6$$

AH を x cm とすると

$$DH^2 = DA^2 - AH^2 = DM^2 - MH^2$$

$$2^2 - x^2 = 6^2 - (4\sqrt{3} - x)^2$$

これを解いて

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{よって } DH = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

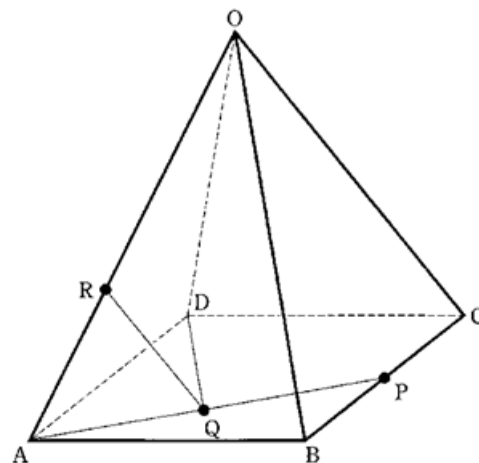
【問 3】

図のように、1 辺が 4cm の正方形 ABCD を底面とし、 $OA=OB=OC=OD=4\sqrt{2}$ cm とする正四角すい OABCD がある。辺 BC の中点を P とし、線分 AP の中点を Q とする。また、辺 OA 上に $QA=QR$ となる点 R をとる。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2008 年度)

問1 $\triangle ADQ$ の面積を求めなさい。



問2 線分 AR の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm ²
問2	cm

解答

問1 4 cm²

問2 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

解説

問2

$\triangle OBP$ で三平方の定理より $OP = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABP$ で三平方の定理より $AP = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$RQ = AQ = QP = \sqrt{5}$

よって $\angle QAR = \angle QRA = a$, $\angle QRP = \angle QPR = b$ とおくと

$2a + 2b = 180^\circ$ より $a + b = 90^\circ$

つまり $\angle PRA = 90^\circ$

ここで $AR = x$ とおくと

$OR = 4\sqrt{2} - x$ PR^2 に

$\triangle OPR$ と $\triangle ARP$ の三平方の定理を利用して

$PR^2 (2\sqrt{7})^2 - (4\sqrt{2} - x)^2 = (2\sqrt{5})^2 - x^2$

これを解いて

$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

【問 4】

点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とし、底面が 1 辺 5cm の正方形で、高さが 10cm の正四角柱を X とする。
次の問1, 問2に答えなさい。

(千葉県 2008 年度)

図 1

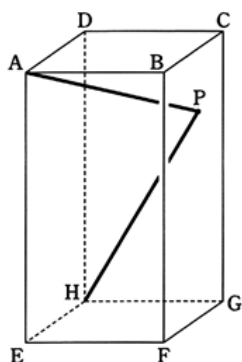


図 2

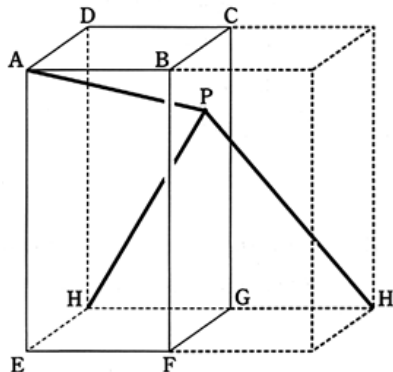
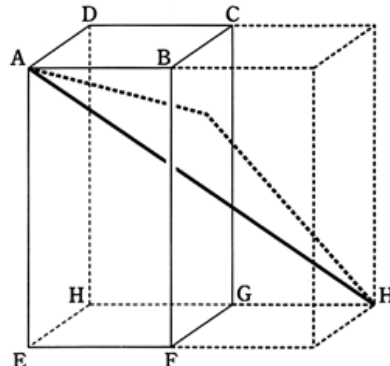


図 3



問1 図 1 は、正四角柱 X において、面 BFGC 上に点 P をとり、点 A と点 P、点 P と点 H を、立体の内部でそれぞれ結んだ線分を表したものである。ひろみさんは、2 つの線分の長さの和 $AP + PH$ が最小になるときの値を求めるために、次のように考えた。

ひろみさんの考え

図 2 のように、正四角柱 X と同じ立体を、面 BFGC 側で 4 つの頂点が重なるように並べ、辺 HG の延長上にある頂点を H' とすると、 $PH = PH'$ だから、 $AP + PH = AP + PH'$ となる。

これにより、図 3 のように、点 A と点 H' を結んだ線分 AH' の長さが、 $AP + PH$ の最小の値と等しくなることが分かる。

この考えを参考にして、 $AP + PH$ の最小の値を求めなさい。

問2 図4は、正四角柱Xにおいて、面BFGC上に点P、面CGHD上に点Q、面DHEA上に点Rをとり、点Aと点P、点Pと点Q、点Qと点R、点Rと点Fを、立体の内部でそれぞれ結んだ線分を表したものである。かおるさんは、4つの線分の長さの和 $AP+PQ+QR+RF$ が最小になるときの値を求めることにした。そこで、問1のひろみさんの考えを参考にして、図5のように、正四角柱Xと同じ立体を、頂点が重なるようにいくつか並べた図をかいて考えた。

図4

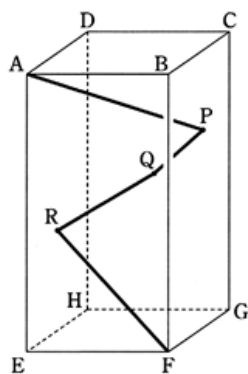
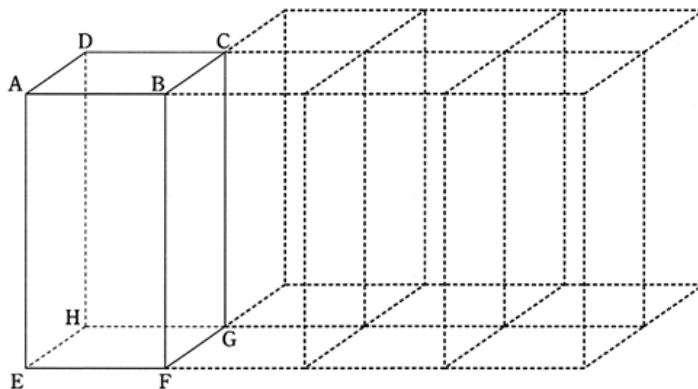


図5



この考えを参考にして、 $AP+PQ+QR+RF$ の最小の値を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm

解答

問1 15 cm

問2 $5\sqrt{17}$ cm

解説

問1

AP+PH が最小になるときの長さは AH' と一致する。

よって三平方の定理を利用して $AH' = \sqrt{5^2 + (5+5)^2 + 10^2} = 15$ cm

問2

AP+PQ+QR+RF が最小になるとき

求める長さはもとの直方体を横に 3 つ縦に 2 つ並べたときの対角線の長さになる。

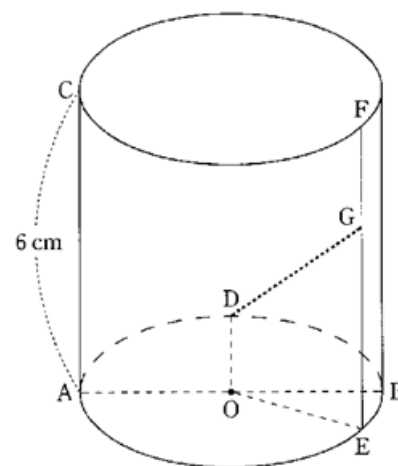
このとき横は $5 \times 3 = 15$ 縦は $5 \times 2 = 10$ 高さは 10 だから

求める長さは $\sqrt{15^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$ cm

【問 5】

図は、線分 AB を直径とする円 O を底面とし、 $AC=6\text{cm}$ を高さとする円柱である。点 D は円 O の周上の点で、 $\angle AOD=90^\circ$ であり、点 E は点 D をふくまない $\widehat{AB}$ 上の点で、 $\angle AOE=150^\circ$ である。また、点 F はこの円柱の 2 つの底面のうち円 O とは異なる円の周上の点で、線分 EF は底面に垂直である。 $AB=AC$ のとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(神奈川県 2008 年度)



問1 この円柱の体積を求めなさい。

問2 線分 EF 上に点 G を $EG=4\text{cm}$ となるようにとるとき、2 点 D, G 間の距離を求めなさい。

解答欄

問1	cm^3
問2	cm

解答

問1 $54\pi \text{ cm}^3$

問2 $\sqrt{43} \text{ cm}$

解説

問2

$\triangle ODE$ は $OD=OE=3$, $\angle DOE=360^\circ-90^\circ-150^\circ=120^\circ$ の二等辺三角形である。

よって O から底辺 DE に垂線 OH をひくと

$\triangle ODH$ は $\angle DOH=60^\circ$ より $OD:DH=2:\sqrt{3}$ の直角三角形になる。

よって $3:DH=2:\sqrt{3}$

$$DH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

したがって $DE=3\sqrt{3}$

$\triangle GDE$ で

三平方の定理より $DG = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{43} \text{ cm}$

【問 6】

図のような、1 辺の長さが 6cm の立方体がある。頂点 F から対角線 AG に引いた垂線と対角線 AG の交点を P とし、辺 BC の中点を M とする。このとき、次の問1～問4に答えなさい。

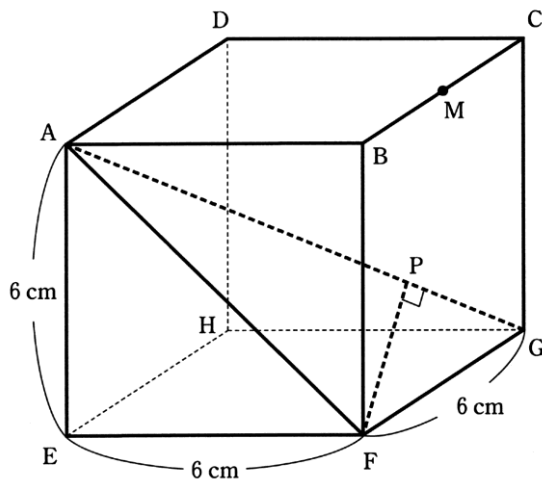
(新潟県 2008 年度)

問1 対角線 AG の長さを求めなさい。

問2 $\triangle AFG \sim \triangle FPG$ であることを証明しなさい。

問3 $\triangle AFP$ の面積を求めなさい。

問4 4 点 M, A, F, P を結んでできる三角すいの体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	証明
問3	cm ²
問4	cm ³

解答

問1 $6\sqrt{3}$ cm

問2

証明

辺 FG は平面 AEFB に垂直だからこの平面上にある線分 AF に垂直である。

したがって $\triangle AFG$ と $\triangle FPG$ において

$$\angle AFG = \angle FPG = 90^\circ \quad \cdots \text{ア}$$

また共通な角だから

$$\angle AGF = \angle FGP \cdots \text{イ}$$

ア, イより

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AFG \sim \triangle FPG$ である。

問3 $12\sqrt{2}$ cm²

問4 24 cm³

解説

問3

$\triangle AFG \sim \triangle FPG$ より

$$AG : FG = FG : PG$$

$$6\sqrt{3} : 6 = 6 : PG$$

$$PG = \frac{6 \times 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{よって } AP = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$AP : PG = 4\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 2 : 1$$

$$\text{したがって } \triangle AFP = \frac{2}{3} \triangle AFG = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times FG \times AF = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

問4

M から平面 AFGD に垂線 MH をひく。

$$MH = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

よって三角すい MAFP の体積は

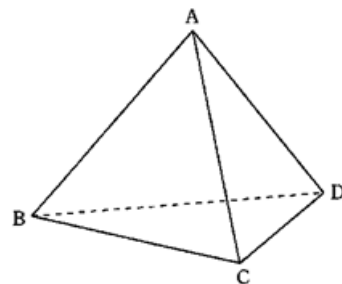
$$\frac{1}{3} \times 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 24 \text{ cm}^3$$

【問 7】

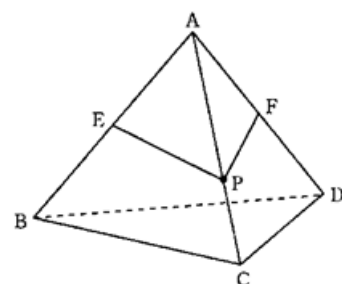
図のような正四面体 ABCD について、次の問いに答えなさい。

(富山県 2008 年度)

(1) 辺 AB とねじれの位置にある辺を答えなさい。



(2) 右の正四面体 ABCD の 1 辺の長さを 2cm とする。辺 AB, AD の中点をそれぞれ E, F とし、点 P が辺 AC 上を動くものとする。線分 EP と PF の長さの和が最も小さくなるとき、その値を求めなさい。



解答欄

(1)	
(2)	cm

解答

(1) 辺 CD

(2) $\sqrt{3}$ cm

解説

(2)

EP+PF が最も短くなるのは

展開図の四角形 ABCD において P が線分 EF 上にくるときだから線分 EF である。

展開図において BD と AC の交点を H とすると

$\triangle ABC$, $\triangle ADC$ は正三角形だから

$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$$

$$BD = 2\sqrt{3}$$

$\triangle ABD$ において

AE=EB, AF=FD より中点連結定理から

$$\text{求める長さ } EF = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 8】

図 1 は、12 個の氷をつくる製氷皿を模式的に表したものである。図 2 は、図 1 の製氷皿の氷 1 個をつくる部分の容器を表したものであり、四角形 $ABCD$ と $EFGH$ は 1 辺の長さがそれぞれ 3cm と 2cm の正方形で、容器の深さは 2cm である。また、 $AB \parallel EF$, $AE = BF$ で、4 つの側面はすべて合同な台形である。ただし、氷 1 個をつくる部分の容器はすべて同じであり、容器の厚さは考えないものとする。

このとき、下の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2008 年度)

図 1

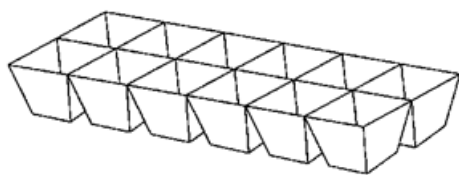
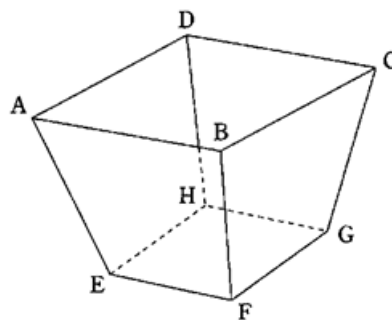


図 2



問1 図 2 の立体において、面 $BFGC$ に平行な辺をすべて書きなさい。

問2 図 2 の立体の辺 AE の長さを求めなさい。

問3 図 1 の製氷皿の 12 個の容器すべてに、水の深さが 1cm になるように水を入れたい。このとき、必要な水の量は何 cm^3 か、求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	
問2	cm
問3	計算
	答 cm ³

解答

問1 辺 AD, 辺 EH

問2 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

問3 61cm^3

解説

問3

AEとCGの延長線の交点をPとし正四角すいP-EFGHの高さを h とする。

$$h:(h+2)=PE:PA=EF:AB=2:3$$

$$3h = 2(h + 2)$$

$$h=4$$

また水の深さを 1cm にしたときの水面の正方形の 1 辺の長さを x とすると

$$2:x=4:(4+1)$$

$$4x=10$$

$$x = \frac{5}{2}$$

よって 1 個の容器に必要な水の量は

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times (4+1) - \frac{1}{3} \times 2^2 \times 4 = \frac{61}{12}$$

したがって 12 個分の容器に必要な水の量は 61 cm^3

【問 9】

図1は、横 10cm、縦 6cm、高さ 8cm の直方体の容器に水をいっぱいに入れたものである。この状態から容器を傾け、水をこぼしていき、容器に残った水の体積を調べる学習をした。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(山梨県 2008 年度)

図1

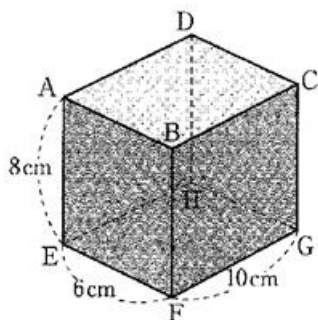


図 2

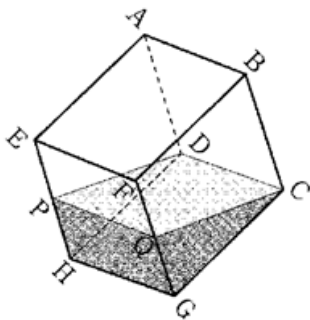
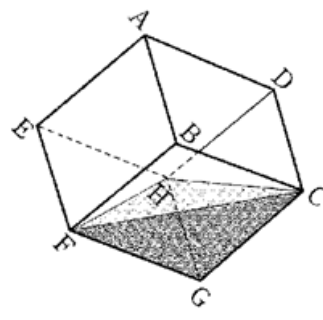


図 3



問1 図 2 において、点 P、Q はそれぞれ辺 EH、辺 FG の中点である。恵子さんは、図 2 のように水面が四角形 CDPQ となった時点でこぼすのをやめた。このとき、こぼす前の水 (図 1) の体積と、残っている水 (図 2) の体積の比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。

問2 良夫さんは、図 3 のように水面が三角形 CHF となった時点でこぼすのをやめた。このとき、残っている水の体積を求めなさい。

問3 律子さんは図 1 の状態から水をこぼしていき、あるところでこぼすのをやめ、傾いた角度を元に戻す途中でとめたところ図 4 のように水面が四角形 RSTU となった。ただし $FR=2\text{cm}$ 、 $FS=3\text{cm}$ 、 $ET=9\text{cm}$ 、 $EU=6\text{cm}$ である。

このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。

図 4

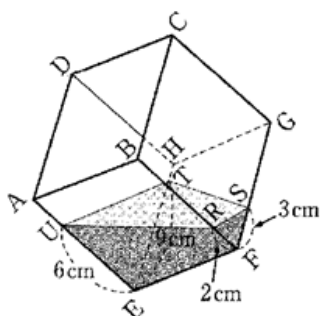
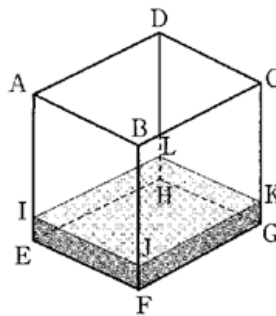


図 5



(1) 図 4 において、 $\triangle FSR \sim \triangle ETU$ となることを証明しなさい。

(2) 図 5 は、図 4 の状態から、さらに角度を元に戻し、底面の長方形 EFGH と水面の長方形 IJKL が平行になった状態である。このときの水の深さ JF を求めなさい。

解答欄

問1	こぼす前の水:残っている水 :	
問2	cm ³	
問3	(1)	証明
	(2)	cm

解答

問1 こぼす前の水:残っている水=4:1

問2 80 cm^3

問3

(1)

証明

$\triangle \text{FSR}$ と $\triangle \text{ETU}$ において

仮定より

$$\text{FR}:\text{EU}=2:6=1:3 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{FS}:\text{ET}=3:9=1:3 \cdots \textcircled{2}$$

また直方体のそれぞれの面は長方形であるから

$$\angle \text{RFS} = \angle \text{UET} = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

2組の辺の比が等しくその間の角が等しいので

$$\triangle \text{FSR} \sim \triangle \text{ETU}$$

$$(2) \quad \frac{13}{10} \text{ cm}$$

解説

問2

求める水の体積は三角すい H-GCF の体積だから

$$\frac{1}{3} \times \triangle \text{CGF} \times \text{HG} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times 6 = 80 \text{ cm}^3$$

問3

(2)

EF, UR, TS の延長線の交点を P とする。

$\triangle \text{PUE}$ において

$$\text{RF} \parallel \text{UE} \text{ より } \text{PF}:\text{PE} = \text{RF}:\text{UE}$$

$$\text{PF} = x \text{ cm とすると}$$

$$x:(x+6) = 2:6$$

$$2(x+6) = 6x$$

$$x = 3$$

よってこのときの水の体積は

三角すい P-UET - 三角すい P-RFS

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times (6+3) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times 3$$

$$= 81 - 3$$

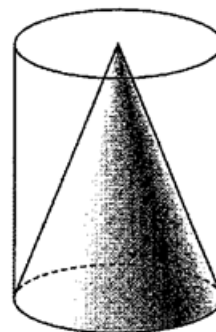
$$= 78$$

これが直方体 IJKL-EFGH の体積と等しいから

$$6 \times 10 \times \text{JF} = 78 \quad \text{JF} = \frac{13}{10} \text{ cm}$$

【問 10】

円柱の容器 A と円錐の形をした鉄のおもり B がある。容器 A、おもり B は、どちらも底面の半径が 6cm、高さが 15cm である。図のように、容器 A におもり B を入れ、底面が水平な状態で水を入れていく。ただし、容器の厚みは考えないものとする。また、円周率は π とする。



(長野県 2008 年度)

- (1) 水面の高さが、おもり B を入れた容器 A の高さの半分になったとき、水面の面積を求めなさい。

- (2) おもり B を入れた容器 A いっぱいにたまった水を、1 辺が 12cm の立方体の容器 C に残らず移した。容器 C の水面の高さを求めなさい。ただし、容器 C は底面が水平になるように置いてあるものとする。

解答欄

(1)	cm ²
(2)	cm

解答

(1) 27π cm²

(2) $\frac{5}{2}\pi$ cm

解説

(1)

おもり B を入れた容器 A にいっぱいたまった水の量は

$$\pi \times 6^2 \times 15 - \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 15 = 360\pi \text{ cm}^3$$

立方体の容器 C に水を移したときの高さを h cm とすると

$$12 \times 12 \times h = 360\pi$$

$$h = \frac{5}{2}\pi \text{ cm}$$

【問 11】

図のように、1 辺が 4cm の立方体と、この立方体の各面の対角線の交点を結んでできる立体Kがある。立体Kは、2 つの正四角すいの底面をぴったり合わせた立体とみることもできる。このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2008 年度)

- (1) 正四角すいの底面の形として、最も適当なものを次のア～エから 1 つ選び、その記号を書きなさい。

ア. 正方形

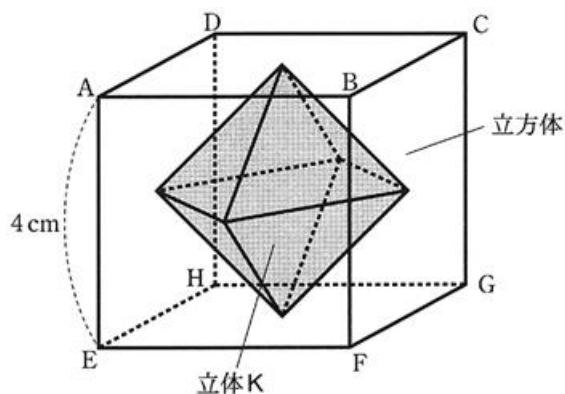
イ. 長方形

ウ. ひし形

エ. 平行四辺形

- (2) 立体Kの体積を求めなさい。

- (3) この立方体の 8 つの頂点から点 A を含む 4 つの点を選び、それらを結んで立体をつくる。できた立体のすべての面が合同な正三角形になるとき、点 A 以外の 3 つの点をすべて書きなさい。



解答欄

(1)			
(2)	cm ³		
(3)			

解答

(1) ア

(2) $\frac{32}{3}\text{cm}^3$

(3) C, F, H

解説

(2)

立体Kは1辺の長さが $4 \div 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$ の正八面体である。

2つの合同な正四角すいと考えると

正四角すいの底面の面積は $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8\text{cm}^2$

高さは $4 \div 2 = 2\text{cm}$ より

体積は $\frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}\text{cm}^3$

よって立体Kの体積は

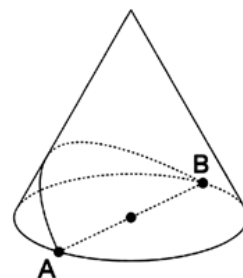
$\frac{16}{3} \times 2 = \frac{32}{3}\text{cm}^3$

【問 12】

図のように、底面の円の直径 AB が 4cm 、母線の長さが 4cm の円すいがある。
このとき、次の問1・問2に答えよ。ただし、円周率は π とする。

(京都府 2008 年度)

問1 円すいの体積と表面積をそれぞれ求めよ。



問2 点 A から円すいの側面にそって点 B までひもをかける。ひもの長さが最も短くなるようにするとき、このひもの長さを求めよ。ただし、ひもの太さは考えないものとする。

解答欄

問1	体積 cm^3
	表面積 cm^2
問2	cm

解答

問1

$$\text{体積} \quad \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}^3$$

$$\text{表面積} \quad 12\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{問2} \quad 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

解説

問2

円すいの頂点を O とする。

求める長さ AB は展開図においておうぎ形 OAB の弦 AB である。

弧 AB は底面の円周の半分であるからその長さは

$$\frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi$$

$$\text{よって} \angle AOB = \frac{360^\circ \times 2\pi}{2\pi \times 4} = 90^\circ$$

よって $\triangle OAB$ は $OA=OB$ の直角二等辺三角形だから

$$AB = \sqrt{2} \, OA = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 13】

図Ⅰ，図Ⅱにおいて，立体 $ABCD-EFGH$ は $AB=AD=4\text{cm}$ ， $AE=a\text{ cm}$ の直方体である。

次の問いに答えなさい。

(大阪府 2008 年度 前期)

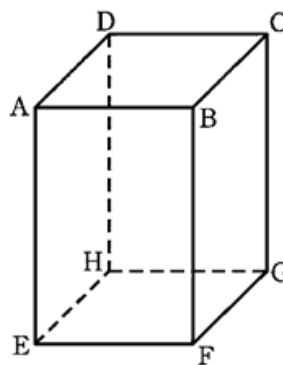
問1 図Ⅰにおいて，直方体 $ABCD-EFGH$ の体積と表面積をそれぞれ a を用いて表しなさい。

問2 図Ⅱは， $a=6$ であるときの状態を示している。図Ⅱにおいて，面 $BFGC$ ， $AEFB$ を通って C から E まで移動するときの道のりが最短となる経路が辺 BF を横切る位置を表す点を M とする。また，面 $DABC$ ， $AEFB$ を通って C から E まで移動するときの道のりが最短となる経路が辺 AB を横切る位置を表す点を N とする。 C と M ， M と E ， C と N ， N と E とをそれぞれ結ぶ。

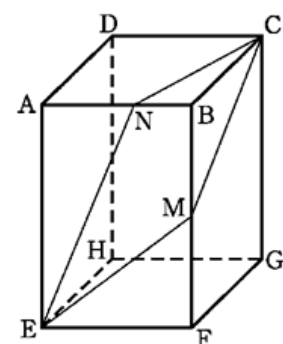
(1) M は辺 BF の中点と一致する。線分 CM の長さを求めなさい。

(2) 線分 NB の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

図Ⅰ



図Ⅱ



解答欄

問1	体積 cm^3	
	表面積 cm^2	
問2	(1)	cm
	(2)	求め方
		線分 NB の長さ cm

解答

問1

体積 $16a \text{ cm}^3$

表面積 $16a + 32\text{cm}^2$

問2

(1) 5 cm

(2)

求め方

図は直方体 $ABCD-EFGH$ を展開してできる図の一部である。

N は C と E とを結んでできる線分 CE と辺 AB との交点と一致する。

このとき $NB \parallel EF$ より

$NB:EF=CB:CF$

$NB=x \text{ cm}$ とすると

$x:4=4:10$

これを解くと

$$x = \frac{8}{5}$$

答 $\frac{8}{5} \text{ cm}$

解説

問1

直方体の体積は縦 $\times$ 横 $\times$ 高さより

$$4 \times 4 \times a = 16a \text{ cm}^3$$

また側面が縦 $a \text{ cm}$ 横 4cm の長方形 4 つ底面が 1 辺 4cm の正方形 2 つでできているので

$$\text{表面積は } 4 \times a \times 4 + 2 \times 4^2 = 16a + 32\text{cm}^2$$

問2

(1)

$$M \text{ は } BF \text{ の中点より } BM = \frac{6}{2} = 3$$

$\triangle CBM$ において

$$\text{三平方の定理より } CM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{cm}$$

【問 14】

写真のようなブランコをモデルにした問題である。図 I，図 II において，線分 OA の長さは 12cm である。 B は線分 OA 上の点であり， $\triangle BAC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BA = 2\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ の直角三角形である。線分 OD と $\triangle EDF$ とは，それぞれ線分 OA と $\triangle BAC$ とを点 O を中心として同じ向きに同じ角度だけ回転させたものであり， $EF \parallel AC$ となっている。このとき， $OA = OD$ ， $\triangle BAC \cong \triangle EDF$ である。 $\angle AOD$ の大きさを α° とし， $0 < \alpha < 90$ とする。



円周率を π として，次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。

(大阪府 2008 年度 前期)

問1 図 I において， G は直線 OA と直線 EF との交点である。このとき， $OA \perp GF$ である。

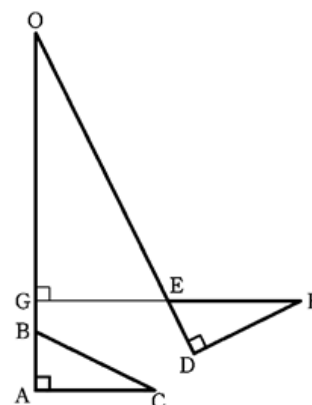
(1) 0° より大きく 180° より小さい角 $\angle OEF$ の大きさを α を用いて表しなさい。

(2) 線分 BC の長さを求めなさい。

(3) ㊦ $\triangle OGE \sim \triangle FDE$ であることを証明しなさい。

㊦ 線分 OG の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

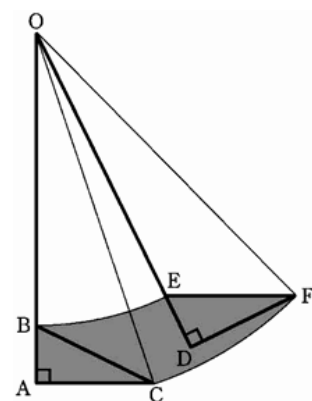
図 I



問2 図 II において，図形 OBE は O を中心とし OB を半径とするおうぎ形である。

図形 OCF は O を中心とし OC を半径とするおうぎ形である。図 II 中の  で示した部分は，線分 BA ， AC ， $\widehat{CF}$ ，線分 FE ， $\widehat{EB}$ によって囲まれてできる図形である。 で示した部分の面積を α を用いて表しなさい。

図 II



解答欄

問1	(1)	度	
	(2)	cm	
		⑦	証明
	(3)	⑧	求め方
問2	cm ²		

解答

問1

(1) $\alpha + 90$ 度

(2) $2\sqrt{5}$ cm

(3)

㉞

証明

$\triangle OGE$ と $\triangle FDE$ において

$OA \perp GF$, $\angle FDE = 90^\circ$ だから

$\angle OGE = \angle FDE \cdots \textcircled{1}$

対頂角は等しいから

$\angle OEG = \angle FED \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OGE \sim \triangle FDE$

$\textcircled{1}$

求め方

$OA = OD$, $\triangle BAC \equiv \triangle EDF$ だから

$FD = 4$ cm, $FE = 2\sqrt{5}$ cm

$OE = OD - ED = 10$ cm

$\triangle OGE \sim \triangle FDE$ だから

$OG : FD = OE : FE$

$OG = x$ cm とすると

$x : 4 = 10 : 2\sqrt{5}$

これを解くと

$x = 4\sqrt{5}$

答 $4\sqrt{5}$ cm

問2 $\frac{1}{6} \pi \alpha + 4\text{cm}^2$

解説

問1

(1)

三角形の1つの外角はそれと隣り合わない2つの内角の和であるから

$$\angle OEF = \angle EOG + \angle OGE = a^\circ + 90^\circ$$

(2)

$\triangle ABC$ で

$$\text{三平方の定理より } BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

(3)

①

$\triangle OGE \sim \triangle FDE$ より

$$OG:FD = OE:FE$$

$$FD = CA = 4$$

$$OE = OD - ED = OA - BA = 12 - 2 = 10$$

$$FE = CB = 2\sqrt{5} \text{ より}$$

$$OG:4 = 10:2\sqrt{5}$$

$$2\sqrt{5} \text{ } OG = 4 \times 10$$

$$OG = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

問2

色のついた部分の面積は

$$\triangle OAC + \text{おうぎ形 } OCF - \text{おうぎ形 } OBE - \triangle OEF$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

$\triangle OAC$ で

$$\text{三平方の定理より } OC = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{おうぎ形 } OCF = \pi \times (4\sqrt{10})^2 \times \frac{a}{360} = \frac{4}{9} \pi a$$

$$OB = 12 - 2 = 10$$

$$\text{おうぎ形 } OBE = \pi \times 10^2 \times \frac{a}{360} = \frac{5}{18} \pi a$$

$$\triangle OEF = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$$

$$\text{よって求める面積は } 24 + \frac{4}{9} \pi a - \frac{5}{18} \pi a - 20 = \frac{1}{6} \pi a + 4 \text{ cm}^2$$

【問 15】

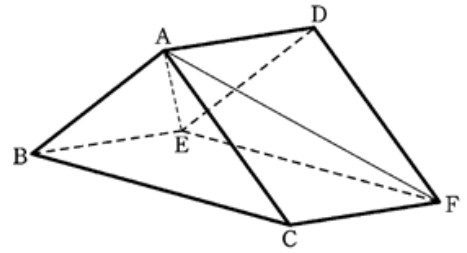
図 I ～図 III において、立体 $ABC-DEF$ は三角柱である。 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ は、合同な二等辺三角形であり、 $AB=AC=4\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$ である。四角形 $ACFD$, $ABED$, $BCFE$ は長方形であり、 $AD=3\text{cm}$ である。A と E, A と F とをそれぞれ結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2008 年度 後期)

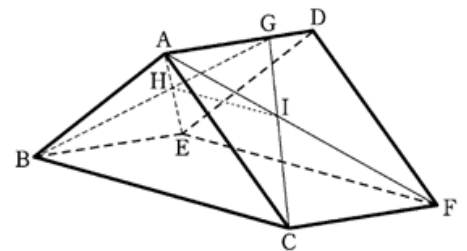
問1 図 I において、立体 $A-BCFE$ の体積を求めなさい。

図 I



問2 図 II において、G は、辺 AD 上にあって A, D と異なる点である。G と B, G と C とをそれぞれ 結ぶ。H は線分 GB と線分 AE との交点であり、I は線分 GC と線分 AF との交点である。このとき、 $\triangle ABG \equiv \triangle ACG$ である。H と I とを結ぶ。このとき、 $HI \parallel BC$, $HI \parallel EF$ である。 $AG=x\text{cm}$ とし、 $0 < x < 3$ とする。

図 II



(1) $\triangle GBC$ の内角 $\angle BGC$ の大きさを α° とする。

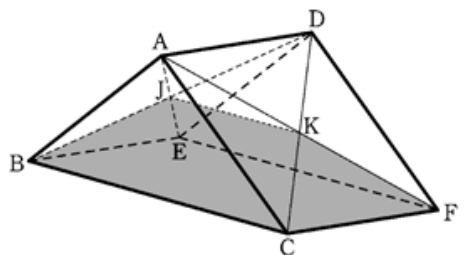
㊦ $\triangle GBC$ の内角 $\angle BGC$ の大きさを α を用いて表しなさい。

㊧ $\alpha=90$ となるときの x の値を求めなさい。求め方も書くこと。

(2) $x=2$ のときの線分 HI の長さを求めなさい。

問3 図 III において、J は、D と B とを結んでできる線分 DB と線分 AE との交点である。K は、D と C とを結んでできる線分 DC と線分 AF との交点である。J と K とを結ぶ。このとき、 $JK \parallel BC$, $JK \parallel EF$ である。立体 $JK-BCFE$ の表面積を求めなさい。

図 III



解答欄

問1			cm^3
問2	(1)	㊦	度
		①	求め方 xの値
	(2)		cm
問3			cm^2

解答

問1 $6\sqrt{7}$

問2

(1)

$$\textcircled{7} \quad 90 - \frac{1}{2}a$$

④

求め方

$\triangle ABG \equiv \triangle ACG$ より

$GB = GC$ であり

また $\angle BGC = 90^\circ$ であるから

$$GC : BC = 1 : \sqrt{2}$$

$$\text{よって } GC = \frac{1}{\sqrt{2}} BC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\angle GAC = 90^\circ$ より

$$AG^2 + AC^2 = GC^2 \text{ だから}$$

$$x^2 + 4^2 = (3\sqrt{2})^2$$

これを解くと

$$0 < x < 3 \text{ より}$$

$$x = \sqrt{2}$$

答 $\sqrt{2}$

$$(2) \quad \frac{12}{5}$$

問3 42

解説

問3

$\triangle ACF$ において

$$\text{三平方の定理より } AF = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

長方形の対角線の長さは等しくそれぞれの中点で交わるから $FK = CK = \frac{5}{2}$

$\triangle KCF$ において K から CF に垂線 KP をひく。

$$CP = FP = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } KP = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2$$

$$\triangle KCF = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3 \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle DBC$ において中点連結定理より

$$JK = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

K から BC に垂線 KQ をひくと

$$CK = \frac{5}{2}$$

$$CQ = (6 - 3) \div 2 = \frac{3}{2} \text{ より}$$

$$KQ = 2$$

$$\text{よって台形 } JBCK = \triangle JBC + \triangle CJK = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 9 \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{長方形 } BCFE = 6 \times 3 = 18 \cdots \textcircled{3}$$

求める表面積は

$$\{\textcircled{1} 2 \text{ つ分}\} + \{\textcircled{2} 2 \text{ つ分}\} + \{\textcircled{3} 1 \text{ つ}\} = 3 \times 2 + 9 \times 2 + 18 = 6 + 18 + 18 = 42 \text{ cm}^2$$

【問 16】

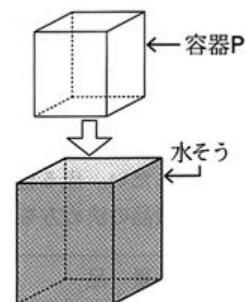
底面が 1 辺 8cm の正方形で深さが 10cm の直方体の水そうと、底面が正方形の直方体の容器を使って実験をした。満水にした水そうの中に、空の容器を垂直に静かに沈めていった。はじめは水そうの外に水があふれたが、沈めた容器の口が水そうの口と同じ高さになると、その後は沈めた容器の中に水が流れ込んだ。次の問いに答えなさい。ただし、水そうと容器の厚さは考えないものとする。

(兵庫県 2008 年度)

問1 図 1 のように、満水にした水そうの中に、底面の 1 辺が 6cm、高さが 7cm の空の容器 P を垂直に静かに沈めた。

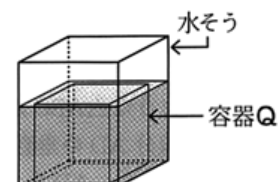
- (1) 容器 P の口が水そうの口と同じ高さになるまでに、水そうからあふれ出した水の量を求めなさい。
- (2) 容器 P の底面が水そうの底についたとき、容器 P にたまった水の深さを求めなさい。

図 1



問2 再び満水にした水そうの中に、今度は底面の 1 辺が 6cm で高さのわからない空の容器 Q を、底面が水そうの底につくまで垂直に静かに沈めた。すると、図 2 のように、容器 Q の水の深さと水そうの水の深さが同じになった。このとき容器 Q の高さを求めなさい。

図 2



解答欄

問1	(1)	cm ³
	(2)	cm
問2	cm	

解答

問1

(1) 252 cm^3

(2) $\frac{16}{3} \text{ cm}$

問2 $\frac{32}{5} \text{ cm}$

解説

問2

容器 Q の高さを $h \text{ cm}$ とする。

容器 Q を入れることで流れ出た水の量は容器 Q の容積と等しいから

$$6 \times 6 \times h = 36h \text{ cm}^3$$

$$\text{残った水の量は } 8 \times 8 \times h = 64h \text{ cm}^3$$

$$\text{よって } 36h + 64h = 8 \times 8 \times 10$$

$$100h = 640$$

$$h = \frac{32}{5} \text{ cm}$$

【問 17】

図 I のように、底面が 1 辺 4cm の正方形で、他の辺の長さがすべて 6cm の正四角すい OABCD がある。

このとき、次の各問いに答えなさい。なお、答えに $\sqrt{\quad}$ が含まれるときは、 $\sqrt{\quad}$ をつけたままで答えなさい。また、 $\sqrt{\quad}$ の中の数は、最も小さい自然数にしないさい。

(鳥取県 2008 年度)

問1 底面 ABCD の対角線 AC の長さを求めなさい。

問2 頂点 O から底面 ABCD に垂線 OH をひいたとき、OH の長さを求めなさい。

問3 頂点 A を通り底面 ABCD に垂直な直線を軸として、正四角すい OABCD を 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

問4 図 II のように、ひもを頂点 A から頂点 C まで正四角すい OABCD の側面にそって、辺 OB と交わるようにかけ、その交点を P とする。ひもの長さが最も短くなるとき、次の各問いに答えなさい。

(1) ひもの長さを求めなさい。

(2) 4 点 P, A, B, C を頂点とする四面体 PABC の体積を求めなさい。

図 I

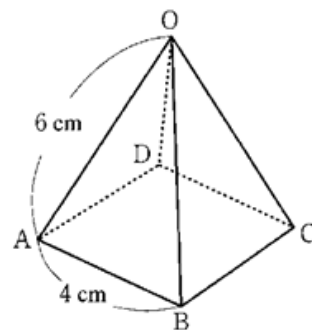
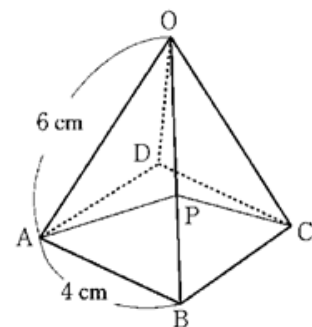


図 II



解答欄

問1	cm	
問2	cm	
問3	cm ³	
問4	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問1 $4\sqrt{2}$ cm

問2 $2\sqrt{7}$ cm

問3 $32\sqrt{7} \pi$ cm³

問4

$$(1) \frac{16}{3} \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(2) \frac{32}{27} \sqrt{7} \text{ cm}^3$$

解説

問3

CO の延長と回転軸との交点を E, O を通り AC と平行な直線と回転軸との交点を F とする。
求める体積は△EAC を回転したものから△OEA を回転させたものを除いたものとなる。

$$FO=AO=2\sqrt{2}$$

$$FA=OE=2\sqrt{7}$$

OF // AC より

$$EF:EA=FO:AC=1:2$$

$$EA=4\sqrt{7}$$

$$\text{求める体積は } \frac{1}{3} \times \pi \times (4\sqrt{2})^2 \times 4\sqrt{7} - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 2\sqrt{7} = 32\sqrt{7} \pi \text{ cm}^3$$

問4

(1)

展開図において四角形 OABC の対角線 AC が最短になるひもと一致する。

$$OA=OC, \angle AOP=\angle COP \text{ より}$$

二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に 2 等分するので

$$\angle APO=90^\circ, AP=CP$$

$$OP=x \text{ とおくと}$$

AP² について三平方の定理を利用して

$$6^2 - x^2 = 4^2 - (6-x)^2$$

$$12x=56$$

$$x=\frac{14}{3}$$

$$\text{よって } AP=\sqrt{6^2 - \left(\frac{14}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{8}{3} \sqrt{2}$$

$$AC=2AP=\frac{16}{3} \sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

P から底面 ABCD に垂線 PK をひく。

△OBH において

PK // OH より

$$PK:OH=BP:BO$$

$$PK:2\sqrt{7} = \left(6 - \frac{14}{3}\right):6$$

$$6PK=\frac{8}{3} \sqrt{7}$$

$$PK=\frac{4}{9} \sqrt{7}$$

よって四面体 PABC の体積は

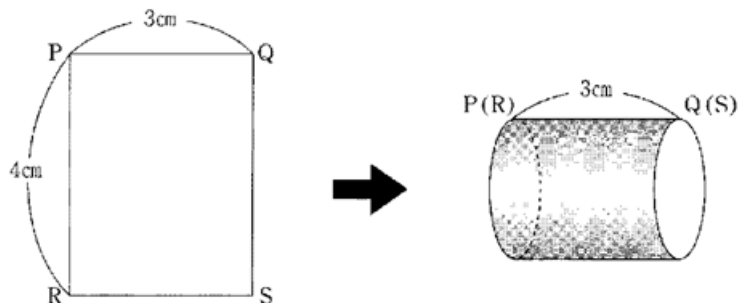
$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times PK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{4}{9} \sqrt{7} = \frac{32}{27} \sqrt{7} \text{ cm}^3$$

【問 18】

図 1 のようなたての長さが 4cm, 横の長さが 3cm の長方形の金属板の辺 PQ と辺 RS をつないで円筒をつくった。線分 PQ は円筒の母線である。下の(1), (2)に答えなさい。

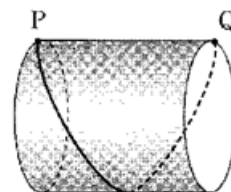
(島根県 2008 年度)

図 1



- (1) 図 2 のように, ひもを円筒の側面に P から Q まで, 最短の長さとなるように 1 回 図 2
巻きつけた。このとき, 次の①, ②に答えなさい。

① 巻きつけたひもの長さを求めなさい。



- ② 巻きつけたひもに沿って円筒を切り開いたときどのような図形になるか, 次のア～エから 1 つ選んで記号で答えなさい。

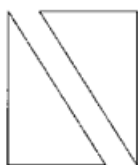
ア



イ



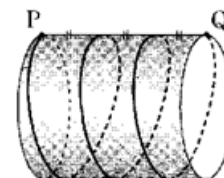
ウ



エ



- (2) 図 3 のように, ひもを円筒の側面に P から Q まで, 線分 PQ を 3 等分する点を 図 3
通り, 最短の長さとなるように 3 回巻きつけた。巻きつけたひもの長さを求めなさい。



解答欄

(1)	①	cm
	②	
(2)	cm	

解答

(1)

① 5cm

② イ

(2) $3\sqrt{17}$ cm

解説

(1)

①

巻きつけたひもの長さが最短となるのは

展開した長方形 PRSQ において P と S を結んだ線が直線となるとき。

よって三平方の定理を利用して $PS = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm}$

(2)

PQ を 3 等分にする点を P に近いほうから A, B とすると $PA = AB = BQ = 1\text{cm}$

よって(1)①と同様に考えて

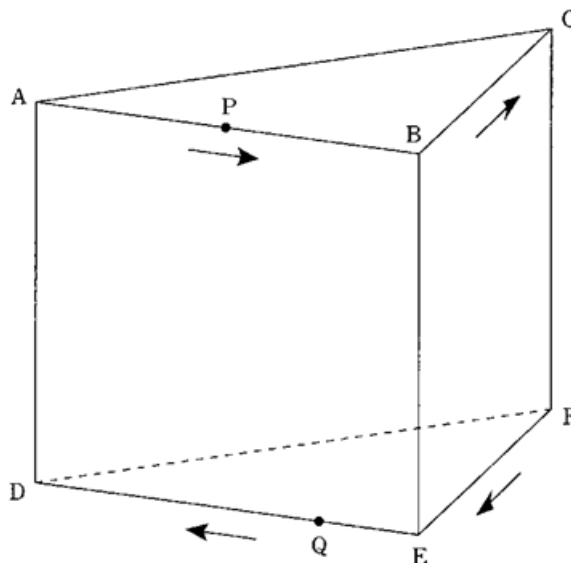
最短となるひもの長さは $3 \times \sqrt{4^2 + 1^2} = 3\sqrt{17}$ cm

【問 19】

図のように、底面が $AB=4\text{ cm}$, $BC=2\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ で、高さが 4 cm の三角柱があります。この三角柱のもう 1 つの底面を $\triangle DEF$ とします。正しくつくられた大小 2 つのさいころを同時に 1 回投げます。大きいさいころの出る目の数を x として、点 P は A を出発し、辺 AB , BC 上を矢印の向きに $x\text{ cm}$ 動いて止まるものとします。また、小さいさいころの出る目の数を y として、点 Q は F を出発し、辺 FE , ED 上を矢印の向きに $y\text{ cm}$ 動いて止まるものとします。

これについて、次の問1・問2に答えなさい。

(広島県 2008 年度)



問1 $x=2$, $y=3$ となるとき、線分 PQ の長さは何 cm ですか。

問2 直線 PQ と直線 BE がねじれの位置にある確率を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	

解答

問1 $\sqrt{17}\text{ cm}$

問2 $\frac{11}{36}$

解説

問2

さいころの目の出方は全部で $6 \times 6 = 36$ 通り

そのうち PQ と BE がねじれの位置になるのは

P が AB 上 (B は除く) にあって Q が FE 上 (E は除く) にあるとき...(ア) と

P が BC 上 (B は除く) にあって Q が ED 上 (E は除く) にあるとき...(イ) である

(ア) のとき(大, 小) = (1, 1), (2, 1), (3, 1) の 3 通り

(イ) のとき(大, 小) = (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) の 8 通り

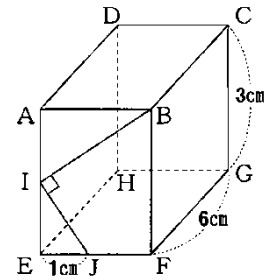
よってねじれの位置にあるのは $3 + 8 = 11$ 通り

求める確率は $\frac{11}{36}$

【問 20】

図のような直方体がある。辺 AE の中点を I とし、点 B と点 I を結ぶ。また、点 J は辺 EF 上の点で、 $\angle BIJ = 90^\circ$ である。CG = 3cm, GF = 6cm, EJ = 1cm であるとき、次の(1), (2)の問いに答えよ。

(香川県 2008 年度)



(1) 点 C と点 F を結ぶ線分 CF の長さは 何 cm か。

(2) この直方体の体積は何 cm^3 か。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) $3\sqrt{5}$ cm

(2) $\frac{81}{2} \text{cm}^3$

解説

問2

(2)

$\text{JF} = x$ cm とする。

三平方の定理を利用して

$\triangle \text{BJF}$ で $\text{BJ}^2 = x^2 + 3^2 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle \text{EIJ}$ で $\text{IJ}^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \textcircled{2}$

$\triangle \text{ABI}$ で $\text{BI}^2 = (1+x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \textcircled{3}$

$\triangle \text{BIJ}$ において三平方の定理より $\text{BJ}^2 = \text{IJ}^2 + \text{BI}^2$

①, ②, ③をあてはめて

$$x^2 + 3^2 = \left\{ 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\} + \left\{ (1+x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\}$$

$$2x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{4}$$

よって $\text{EF} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$ だから

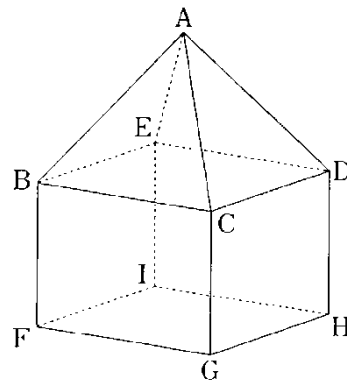
直方体の体積は $\frac{9}{4} \times 6 \times 3 = \frac{81}{2} \text{cm}^3$

【問 21】

図は、正四角すいと直方体を合わせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G, H, I を頂点とする立体を表している。正四角すい ABCDE は、辺の長さがすべて 6cm である。辺 BF の長さは、正四角すい ABCDE の高さに等しい。

次の問1～問3の の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2008 年度)



問1 図に示す立体において、辺 GH とねじれの位置にある辺は、

全部で 本 がある。

問2 図に示す立体において、辺 AD の中点を M とし、辺 AC 上に点 P を、BP+PM の長さが最も短くなるようにとる。このとき、BP+PM の長さは cm である。

問3 図に示す立体において、 $\triangle AFD$ の面積は cm^2 である。

解答欄

問1	
問2	
問3	

解答

問1 8

問2 $3\sqrt{7}$

問3 27

解説

問3

A から FH に垂線をひき BD, FH との交点をそれぞれ K, T とする。

$$BD = 6\sqrt{2}$$

$$BK = \frac{BD}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\triangle ABK \text{ で } AK = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$KT = AK = 3\sqrt{2}$$

よって $\triangle AFD = \triangle ABD + \text{長方形 BFHD} - \triangle ABF - \triangle FDH$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$$

$$= 18 + 36 - 9 - 18 = 27 \text{ cm}^2$$

【問 22】

図のような $AB = 3\sqrt{3}\text{ cm}$, $AD = 3\text{ cm}$, $AE = 8\text{ cm}$ の直方体がある。また, 点 E から AG に垂線をひき, その交点を P とする。

このとき, 次の問1～問5に答えなさい。

(佐賀県 2008 年度 後期)

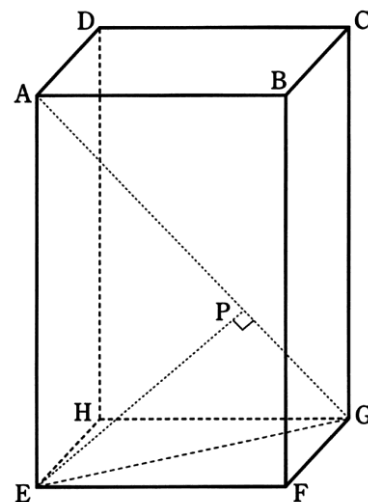
問1 AG の長さを求めなさい。

問2 三角すい $AEFG$ の体積を求めなさい。

問3 $\triangle AEG$ の $\triangle EPG$ であることを証明しなさい。

問4 PG の長さを求めなさい。

問5 三角すい $AEFP$ の体積を V_1 , 三角すい $GEFP$ の体積を V_2 とするとき, $V_1:V_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm ³
問3	証明
問4	cm
問5	V ₁ :V ₂ = :

解答

問1 10cm

問2 $12\sqrt{3} \text{ cm}^3$

問3

$\triangle AEG$ と $\triangle EPG$ において

AE は平面 EFGH に垂直だから

$$\angle AEG = 90^\circ$$

E から AG に垂線をひいたので

$$\angle EPG = 90^\circ$$

よって

$$\angle AEG = \angle EPG \cdots \textcircled{1}$$

共通な角だから

$$\angle AGE = \angle EGP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AEG \sim \triangle EPG$$

問4 $\frac{18}{5} \text{ cm}$

問5 $V_1 : V_2 = 16 : 9$

解説

問5

P から EG に垂線 PK をひく。

三角すい AEFG と三角すい GEFP は底面が $\triangle EFG$ で共通なので

体積の比は高さの比に比例する。

$$\text{よって三角すい AEFG} : \text{三角すい GEFP} = AE : PK = AG : PG = 10 : \frac{18}{5} = 25 : 9$$

三角すい AEFP の体積は

三角すい AEFG - 三角すい GEFP だから

$$V_1 : V_2 = (25 - 9) : 9 = 16 : 9$$

【問 23】

図 1, 図 2 のように, O を頂点とし, 底面の半径が 1cm , 高さが $\sqrt{15}\text{cm}$ の円すいが
ある。

このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2008 年度)

問1 図 1 において, 円すいの母線の長さを $x\text{cm}$ とするとき, x の値を求めよ。

問2 図 1 の円すいの体積は何 cm^3 か。

問3 図 1 の円すいの表面積は何 cm^2 か。

問4 図 2 において, 線分 AB は底面の直径である。また, 2 点 C, D は, それぞれ母線 OA, OB 上にあり, $OC=OD=1\text{cm}$ である。円すいの側面にそって線分 CD を直径とする円周になる線をひく。次に, 点 A から円すいの側面にそって点 D を通り 1 周して点 A に戻ってくる最短の線をひく。円すいの側面において, これら 2 本の線によって囲まれる部分 (図 2 の影をつけた部分) の面積は何 cm^2 か。

図 1

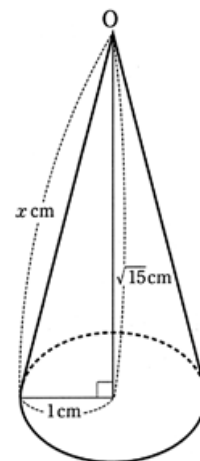
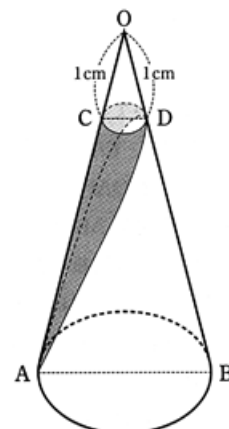


図 2



解答欄

問1	$x =$
問2	cm^3
問3	cm^2
問4	cm^2

解答

問1 $x=4$

問2 $\frac{\sqrt{15}}{3} \pi \text{ cm}^3$

問3 $5 \pi \text{ cm}^2$

問4 $2\sqrt{2} - \frac{1}{4} \pi \text{ cm}^2$

解説

問4

おうぎ形 OAA' で $\angle AOA' = 360^\circ \times \frac{2\pi \times 1}{2\pi \times 4} = 90^\circ$

$\triangle OAA'$ は直角二等辺三角形より $AA' = \sqrt{2} OA = 4\sqrt{2}$

OB と AA' の交点を H とすると $AH = \frac{AA'}{2} = 2\sqrt{2}$

$\angle AOB = \angle A'OB = 45^\circ$ より

求める面積は $2(\triangle OAD - \text{おうぎ形 } OCD) = 2\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{2} - \pi \times 1^2 \times \frac{45}{360}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{4} \pi \text{ cm}^2$

【問 24】

図 1, 図 2 のように, O を頂点とし, 底面の半径が 1cm , 母線の長さが 4cm の円すいがある。このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2008 年度)

問1 図 1 の円すいの高さは何 cm か。

問2 図 1 の円すいの体積は何 cm^3 か。

問3 図 1 の円すいの表面積は何 cm^2 か。

問4 図 2 において, 線分 AB は底面の直径である。また, 2 点 C, D は, それぞれ母線 OA, OB 上にあり, $OC=OD=1\text{cm}$ である。円すいの側面にそって線分 CD を直径とする円周になる線をひく。次に, 点 A から円すいの側面にそって点 D を通り 1 周して点 A に戻ってくる最短の線をひく。円すいの側面において, これら 2 本の線によって囲まれる部分 (図 2 の影をつけた部分) の面積は何 cm^2 か。

図 1

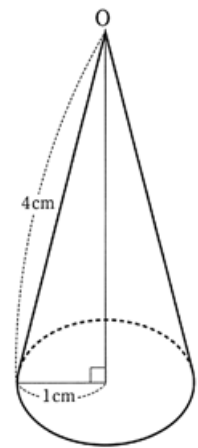
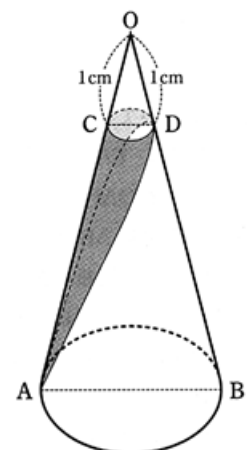


図 2



解答欄

問1	cm
問2	cm^3
問3	cm^2
問4	cm^2

解答

問1 $\sqrt{15}$ cm

問2 $\frac{\sqrt{15}}{3} \pi \text{ cm}^3$

問3 $5\pi \text{ cm}^2$

問4 $2\sqrt{2} - \frac{1}{4} \pi \text{ cm}^2$

解説

問1

三平方の定理より $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$

問4

おうぎ形 OAA' で

$$\angle AOA' = 360^\circ \times \frac{2\pi \times 1}{2\pi \times 4} = 90^\circ$$

$\triangle OAA'$ は直角二等辺三角形より $AA' = \sqrt{2} OA = 4\sqrt{2}$

OB と AA' の交点を H とすると

$$AH = \frac{AA'}{2} = 2\sqrt{2}$$

$\angle AOB = \angle A'OB = 45^\circ$ より

求める面積は

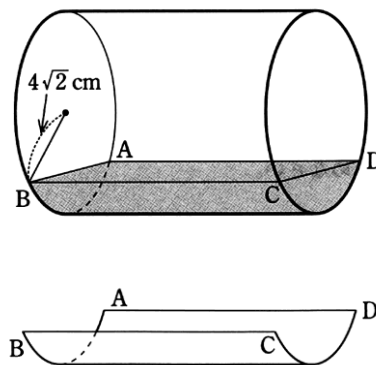
$$2(\triangle OAD - \text{おうぎ形 OCD}) = 2\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{2} - \pi \times 1^2 \times \frac{45}{360}\right) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{4} \pi \text{ cm}^2$$

【問 25】

図のように、底面の半径が $4\sqrt{2}$ cm の透明な円柱の容器に水を入れ、水平に倒した。そのときの水面の形は $AB=8$ cm, $AD=15$ cm の長方形であった。次の(1), (2)の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(大分県 2008 年度)

- (1) 円柱の容器の側面で水にふれている部分(下図)の面積を求めなさい。



- (2) 円柱の容器に入っている水の体積を求めなさい。

解答欄

(1)	cm ²
(2)	cm ³

解答

(1) $30\sqrt{2} \pi$ cm²

(2) $120\pi - 240$ cm³

解説

(1)

底面の円の中心を O とすると $OA=OB=4\sqrt{2}$

$AB=8$ より $OA:OB:AB=1:1:\sqrt{2}$ だから $\angle AOB=90^\circ$

よって弧 AB の長さは $2\pi \times 4\sqrt{2} \times \frac{90}{360} = 2\sqrt{2} \pi$

したがって側面で水にふれている部分の面積は $2\sqrt{2} \pi \times 15 = 30\sqrt{2} \pi$ cm²

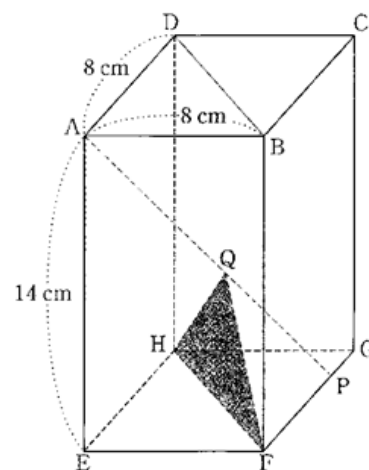
【問 26】

図は、点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする直方体で、 $AB=AD=8\text{cm}$ 、 $AE=14\text{cm}$ である。点 P は辺 FG 上にあつて、 $FP=6\text{cm}$ である。また、点 Q は線分 AP と長方形 BDHF をふくむ平面との交点である。このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2008 年度)

問1 線分 HF の長さを求めなさい。

問2 $\triangle QHF$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm ²

解答

問1 $8\sqrt{2}$ cm

問2 $24\sqrt{2}$ cm²

解説

問2

Q から底面 EFGH に垂線 QK をひくと QK は $\triangle AEP$ と長方形 BDHF との交線になる。

PF // HE より

PK : EK = PF : EH = 6 : 8 = 3 : 4

よって $\triangle AEP$ で

QK // AE より

QK : AE = PK : PE QK : 14 = 3 : 7

7QK = 14 × 3

K = 6

よって $\triangle QHF = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times 6 = 24\sqrt{2}$ cm²

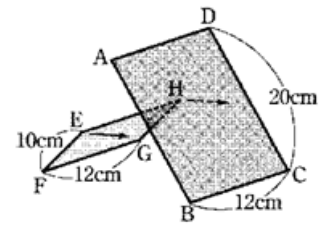
【問 27】

2枚の長方形の板 $ABCD$, $EFGH$ がある。この2枚の長方形の板を、図 I のように、頂点 E , H がそれぞれ、辺 AB , DC 上にくるように組み立てて、写真立てをつくる。

$BC=FG=12\text{cm}$, $DC=20\text{cm}$, $EF=10\text{cm}$ のとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、円周率は π とし、板の厚さは考えないものとする。

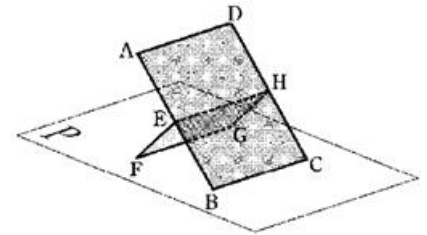
(宮崎県 2008 年度)

図 I



問1. 図 II は、図 I の頂点 E , H がそれぞれ、辺 AB , DC の中点と重なるように組み立てたものであり、辺 BC , FG は平面 P 上にある。 $\angle AEF=90^\circ$ のとき、図 II の6点 E , F , B , H , G , C を頂点とする三角柱の体積を求めなさい。

図 II



問2. 図 III は、図 II において、辺 AD を辺 FG に重ねたものである。次に、図 III の辺 FG を平面 P に固定したまま、図 IV のように、辺 BC を平面 P 上で動かして、辺 FG に近づける。このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 辺 BC を、図 III の位置から、 $\angle EFB=18^\circ$ になるまで動かすとき、2枚の長方形の板は図 IV のように動く。そのうち、長方形の板 $EFGH$ が動いてできる立体の表面積を求めなさい。

図 III

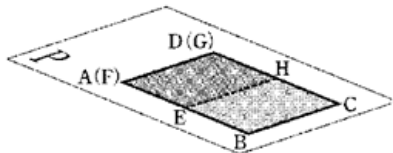
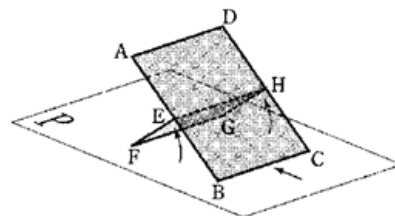
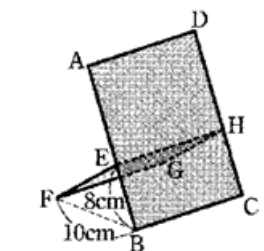


図 IV



(2) 辺 BC を、図 III の位置から、図 IV のように、 $BF=5\text{cm}$ になるまで動かすとき、頂点 A がえがく線の長さを求めなさい。

問3. 図 V は、図 I において、 $BE=CH=8\text{cm}$, $BF=10\text{cm}$ となるように組み立てたものである。このとき、図 V の頂点 A と G を結んだ線分 AG の長さを求めなさい。



解答欄

問1	cm ³	
問2	(1)	cm ²
	(2)	cm
問3	AG= cm	

解答

問1 600cm³

問2

(1) $22\pi + 240$ cm²

(2) $5\sqrt{15}$ cm

問3 AG=22 cm

解説

問2

(1)

表面は半径 10cm 中心角 18° のおうぎ形の底面 2 枚と
縦 10cm 横 12cm の長方形 2 枚と

開くと縦が $2\pi \times 10 \times \frac{18}{360} = \pi$ cm 横 12cm の曲面 1 枚からなる。

よって求める表面積は

$$\pi \times 10^2 \times \frac{18}{360} \times 2 + 10 \times 12 \times 2 + \pi \times 12 = 10\pi + 240 + 12\pi = 22\pi + 240 \text{ cm}^2$$

(2)

E から FB, AF に垂線 EP, EQ をひく。

EA=EF=EB より $\angle BEP = \angle FEP = a$, $\angle AEQ = \angle FEQ = b$ とする。

$$2a + 2b = 180^\circ \quad a + b = 90^\circ$$

よって $\angle PEQ = a + b = 90^\circ$ $\angle PFQ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

よって△AFB で

$$\text{三平方の定理を利用して } AF = \sqrt{20^2 - 5^2} = 5\sqrt{15} \text{ cm}$$

問3

FB=FE=10 より

F から EB に垂線 FK をひくと BK=EK=4

△FBK で

$$\text{三平方の定理より } FK^2 = 10^2 - 4^2 = 84$$

K から CD に垂線 KT をひくと四角形 FKTG は長方形になるので

$$KG^2 = FK^2 + FG^2 = 84 + 12^2 = 228$$

△AKG で

$$AG^2 = AK^2 + KG^2 = 16^2 + 228 = 484$$

AG>0 より

$$AG = \sqrt{484} = 22 \text{ cm}$$

【問 28】

図のような 1 辺の長さが **2cm** の立方体がある。このとき、次の問いに答えなさい。

(沖縄県 2008 年度)

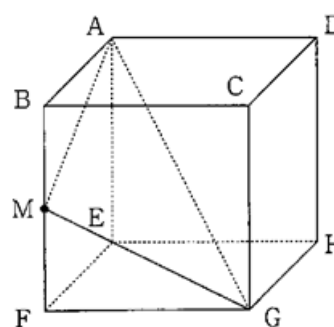
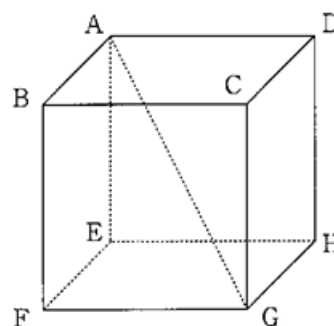
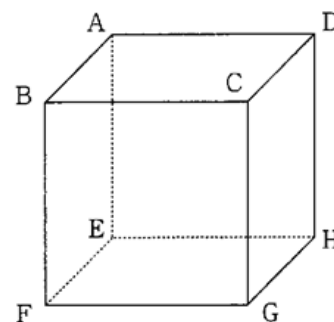
問1 辺 **AB** とねじれの位置にある辺はいくつあるか求めなさい。

問2 対角線 **AG** の長さを求めなさい。

問3 点 **M** は辺 **BF** の中点であり、 $\triangle AMG$ を、対角線 **AG** を軸として 1 回転させてできる回転体を考える。ただし円周率は π とする。

(1) この回転体の体積を求めなさい。

(2) この回転体の表面積を求めなさい。



解答欄

問1		
問2	cm	
問3	(1)	cm ³
	(2)	cm ²

解答

問1 4

問2 $2\sqrt{3}$ cm

問3

(1) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}^3$

(2) $2\sqrt{10} \pi \text{ cm}^2$

解説

問3

(2)

三平方の定理より $AM = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

同様に $MG = \sqrt{5}$

$\triangle AMG$ は $AM = MG$ の二等辺三角形だから

M から AG に垂線 MK をひくと $AK = GK = \sqrt{3}$

よって $MK = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}$

回転体は底面の半径が $\sqrt{2}$ 高さが $\sqrt{3}$ の2つの円すいの底面どうしを合わせた形になる。

表面積は円すいの側面積の2倍だから

$$2 \times \pi \times (\sqrt{5})^2 \times \frac{2\pi \times \sqrt{2}}{2\pi \times \sqrt{5}} = 2\sqrt{10} \pi \text{ cm}^2$$