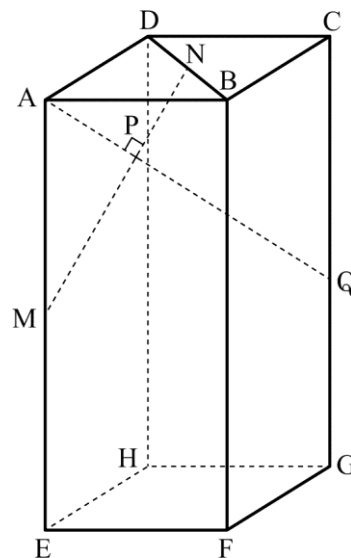


5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2016 年度出題】

【問 1】

右の図の直方体で、 $AB=AD=\sqrt{6}$ cm, $AE=6$ cm である。AE, BD の中点をそれぞれ M, N, 点 A から MN にひいた垂線と MN との交点を P とする。AP を延長して CG と交わった点を Q とするとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

（青森県 2016 年度）



(1) MN の長さを求めなさい。

(2) AP の長さを求めなさい。

(3) AP の長さと PQ の長さの比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm
(3)	:

解答

(1) $2\sqrt{3}$ cm

(2) $\frac{3}{2}$ cm

(3) 3:5

解説

(1)

$AC = \sqrt{2} AB = \sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ cm で AC と BD の交点が N であるから

$$AN = \frac{1}{2} AC = \sqrt{3} \text{ cm である。}$$

また $AM = \frac{1}{2} AE = 3$ cm で

$\triangle AMN$ に三平方の定理を用いて

$$MN^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12 \text{ より}$$

$$MN = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle AMN$ は $\angle MAN = 90^\circ$ の直角三角形で

$$AN : MN = 1 : 2 \text{ より}$$

$\angle ANM = 60^\circ$ である。

$\triangle APN$ は

$\angle APN = 90^\circ$, $\angle ANP = 60^\circ$, $\angle NAP = 30^\circ$ の直角三角形であるから

$$AP : AN = \sqrt{3} : 2$$

$$\text{よって } AP = \frac{\sqrt{3} \times AN}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

(3)

$\triangle AQC$ は

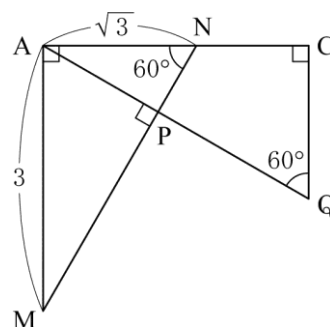
$\angle ACQ = 90^\circ$, $\angle CAQ = 30^\circ$, $\angle AQC = 60^\circ$ の直角三角形であるから

$$AQ : AC = 2 : \sqrt{3}$$

$$\text{よって } AQ = \frac{2 \times AC}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \text{ cm となり}$$

$$PQ = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{ cm だから}$$

$$AQ : PQ = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = 3 : 5$$



【問 2】

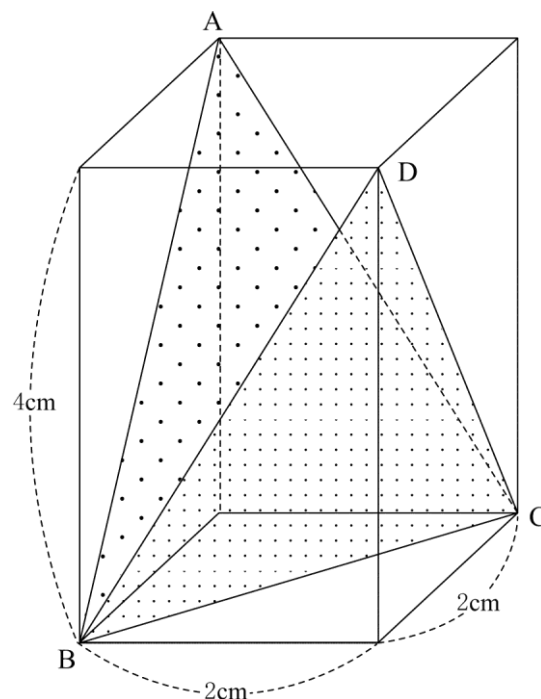
図で、底面の 1 辺が 2 cm、高さが 4 cm の正四角柱の中に、
合同な 2 つの三角形 ABC と三角形 DBC が入っています。2 つ
の三角形の各頂点は正四角柱の頂点で、三角形の各辺は正四
角柱の面の対角線になっています。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(岩手県 2016 年度)

問1 線分 BC の長さを求めなさい。

問2 頂点 D と面 ABC の距離を求めなさい。



解答欄

問1	cm
問2	cm

解答

問1 $2\sqrt{2}$ cm

問2 $\frac{8}{3}$ cm

解説

問1

1 辺が 2 cm の正方形の対角線の長さに等しいから $2\sqrt{2}$ cm

問2

底面の正方形の頂点のうち

頂点 A からひいた垂線と交わる点を E とし

頂点 D からひいた垂線と交わる点を F とすると

四角形 AEFD は $AE=4$ cm, $AD=BC=2\sqrt{2}$ cm の長方形となる。

線分 BC と線分 EF の交点を G とすると

G は線分 EF の中点で $EG=\sqrt{2}$ cm

$\triangle AEG$ で

三平方の定理より $AG=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ cm

頂点 D と面 ABC の距離は

D から面 ABC にひいた垂線の長さ

すなわち D から線分 AG にひいた垂線 DH の長さで表される。

$\triangle AEG$ と $\triangle DHA$ において

$\angle AEG=\angle DHA=90^\circ \cdots \textcircled{1}$

$\angle EAG+\angle DAH=90^\circ \cdots \textcircled{2}$

$\angle HDA+\angle DAH=90^\circ \cdots \textcircled{3}$

②, ③より

$\angle EAG=\angle HDA \cdots \textcircled{4}$

①, ④より

2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AEG \sim \triangle DHA$

よって

$AE:DH=AG:DA$

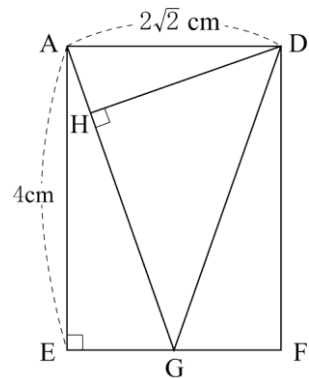
$DH=x$ cm とすると

$4:x=3\sqrt{2}:2\sqrt{2}$

$4:x=3:2$

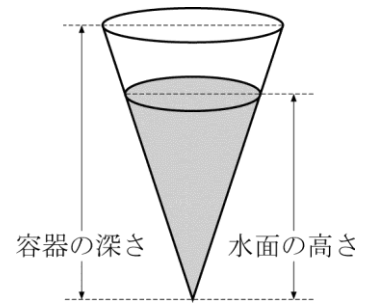
$3x=8$

$x=\frac{8}{3}$



【問 3】

底面の半径が 4 cm の円錐の形をした、深さが 12 cm の空の容器がある。この容器に水を入れ、右の図のように水面が容器の底面と平行になるようにした。このとき、水面の高さが 9 cm になった。この状態の容器に、はじめに入れた水と等しい体積の水を加えると、容器から水はあふれるか、あふれないか、正しい方を○で囲み、その理由を式と言葉を用いて書きなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。



(秋田県 2016 年度)

解答欄

あふれる あふれない	
〔理由〕	

解答

あふれない

〔理由〕

はじめに入れた水でできた円錐と容器の円錐は相似であるから

相似比は $9:12=3:4$ であり

体積比は $3^3:4^3=27:64$ となる。

はじめに入れた水の体積は

容器の円錐の体積の半分以下であるから

はじめに入れた水と同じ体積の水を加えても水はあふれない。

解説

容器全体の水の量は $\frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 12 = 64 \pi \text{ cm}^3$

水面の高さ 9 cm までの水の量は

半径が $\frac{9}{12} \times 4 = 3 \text{ cm}$ なので

$\frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 9 = 27 \pi \text{ cm}^3$

よって全体の半分よりも少ないのであふれない。

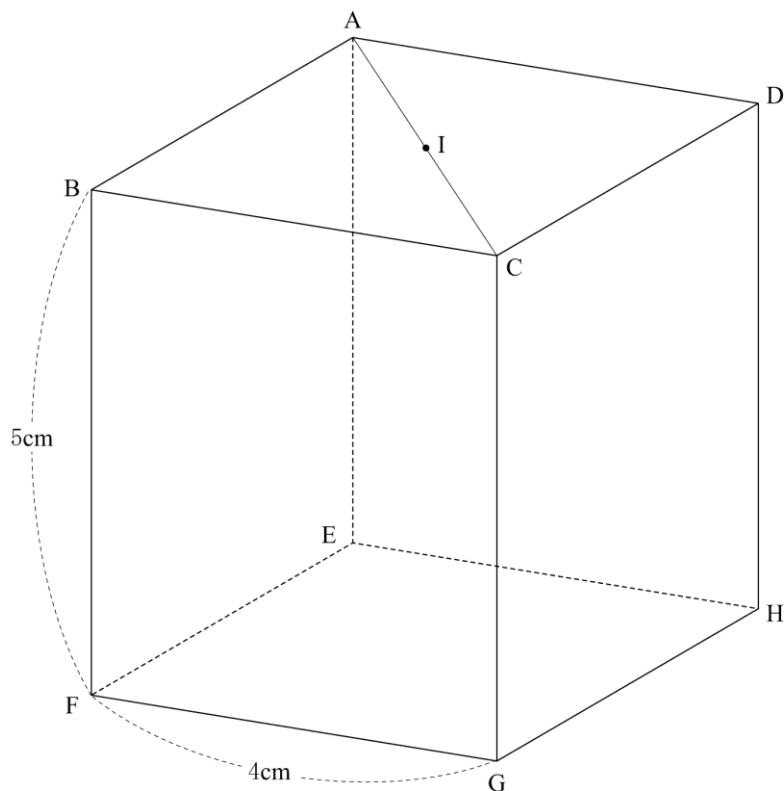
【問 4】

図のような、底面が 1 辺 4 cm の正方形で、高さが 5 cm の直方体がある。線分 AC の中点を I とする。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(福島県 2016 年度)

問1 線分 AI の長さを求めなさい。



問2 辺 CG 上に $\angle EIJ = 90^\circ$ となる点 J をとる。また、線分 BH と線分 FI との交点を K とする。

(1) 線分 CJ の長さを求めなさい。

(2) 4 点 K, E, J, I を結んでできる三角錐の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問1 $2\sqrt{2}$ cm

問2

(1) $\frac{8}{5}$ cm

(2) $\frac{44}{15}$ cm³

解説

問1

$$AI = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$$

問2

(1)

CJ = x とする。

$$IJ^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 \text{ より } IJ = \sqrt{x^2 + 8}$$

$$IE^2 = 5^2 + (2\sqrt{2})^2 = 33 \quad IE = \sqrt{33}$$

$$EJ^2 = (4\sqrt{2})^2 + (5-x)^2$$

△EIJ において $\angle EIJ = 90^\circ$ なので

三平方の定理より

$$EJ^2 = IJ^2 + IE^2$$

$$32 + (5-x)^2 = x^2 + 8 + 33$$

$$10x = 57 - 41 = 16$$

$$x = \frac{8}{5}$$

(2)

$$\text{底面を} \triangle IEJ \text{ とするとその面積は } IJ = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + 8} = \frac{2}{5} \sqrt{66}$$

$$IE = \sqrt{33} \text{ より } \frac{1}{2} \times \sqrt{33} \times \frac{2}{5} \sqrt{66} = \frac{33}{5} \sqrt{2}$$

高さは K から底面までの距離で

K は平面 IBFH 上の点なので K を通り辺 IB に平行な線をひく。

この線と辺 BF との交点を P 底面との交点を Q とすると高さは KQ となる。

K を通る直線 BH と平面 AEGC との交点を M とすると

M は線分 BH の中点である。

$$\text{また } PQ = IB = 2\sqrt{2}$$

$$\text{このとき } PK : KQ = BK : KM$$

△BIK ∽ △HFK で

相似比が IB : FH = 1 : 2 なので

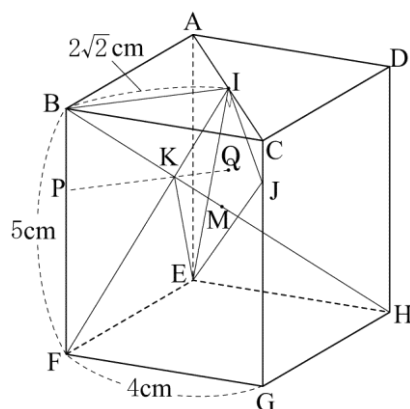
$$BK = \frac{1}{3} BH$$

$$\text{また } KM = \frac{1}{2} BH - \frac{1}{3} BH = \frac{1}{6} BH$$

$$\text{したがって } BK : KM = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2 : 1$$

$$KQ = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

$$\text{よって三角錐の体積は } \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \sqrt{2} \times \frac{33}{5} \sqrt{2} = \frac{44}{15} \text{ cm}^3$$



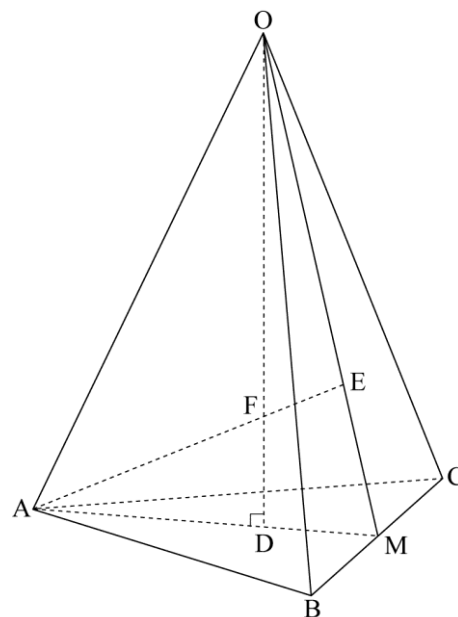
【問 5】

図のように、1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ cm である正三角形を底面とし、 $OA=OB=OC=10$ cm とする正三角すい $OABC$ がある。辺 BC の中点を M とし、頂点 O から底面に垂直におろした直線と底面との交点を D とすると、点 D は線分 AM 上にあり、 $OD=4\sqrt{6}$ cm である。 $\triangle OAM$ において、 $\angle OAM$ の二等分線と辺 OM との交点を E とし、線分 OD と線分 AE の交点を F とする。

このとき、次の問1, 問2に答えなさい。

(茨城県 2016 年度)

問1 正三角すい $OABC$ の体積を求めなさい。



問2 $\triangle ADF$ と $\triangle OFE$ の面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	cm ³
問2	:

解答

問1 $12\sqrt{2} \text{ cm}^3$

問2 13:25

解説

問1

$\triangle ABM$ は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の三角形となるので $AM=\sqrt{3}$ $BM=3$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3} \text{ より}$$

$$\text{求める体積は } \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 12\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

問2

$OA=10$, $OD=4\sqrt{6}$, $AM=3$, $AD=2$

右図で AE は $\angle OAM$ の二等分線より

$FD=FD'$

$EH=EH'$

$$\triangle OAD = \frac{1}{2} \times AD \times OD = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\triangle OAD = \frac{1}{2} \times OA \times FD' + \frac{1}{2} \times AD \times FD = 6FD$$

$$\text{よって } FD = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ より}$$

$$\triangle ADF = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{次に } \triangle OAM = \frac{1}{2} \times AM \times OD = \frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

$$\triangle OAM = \frac{1}{2} \times OA \times EH' + \frac{1}{2} \times AM \times EH = \frac{13}{2} EH$$

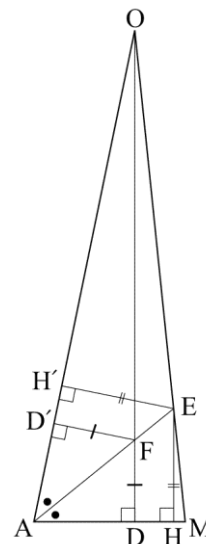
$$\text{よって } EH = \frac{12\sqrt{6}}{13} \text{ より}$$

$$\triangle EAM = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{12\sqrt{6}}{13} = \frac{18\sqrt{6}}{13}$$

$$\text{また } \triangle OAF = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ より}$$

$$\triangle OEF = \triangle OAM - \triangle OAF - \triangle EAM = 6\sqrt{6} - \frac{10\sqrt{6}}{3} - \frac{18\sqrt{6}}{13} = \frac{50\sqrt{6}}{39} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } \triangle ADF : \triangle OEF = \frac{2\sqrt{6}}{3} : \frac{50\sqrt{6}}{39} = 13:25$$



【問 6】

図1の立体 $ABCDEF$ は、三角柱の形をした透明な容器である。この容器を水平な台の上に置き、容器の体積の半分の水を入れて密閉した。その後、図2のように辺 BE を水平な台にぴったりとつけて、辺 BE が台から離れないようにしたまま、容器を左右に傾けた。次の問1、問2に答えなさい。

ただし、三角柱の側面はすべて長方形であり、容器の厚さは考えないものとする。

(群馬県 2016 年度)

問1 水面が点 A と重なったとき、水面が辺 BC と触れる点を P とする。三角形 ABC において、点 P をコンパスと定規を用いて作図しなさい。ただし、作図に用いた線は消さないこと。

問2 $AB=15\text{ cm}$ 、 $BC=9\text{ cm}$ とし、辺 AB 上に $AQ=3\text{ cm}$ である点 Q をとる。水面が点 Q と重なったとき、水面が辺 BC と触れる点を R とする。線分 CR の長さを求めなさい。

図1

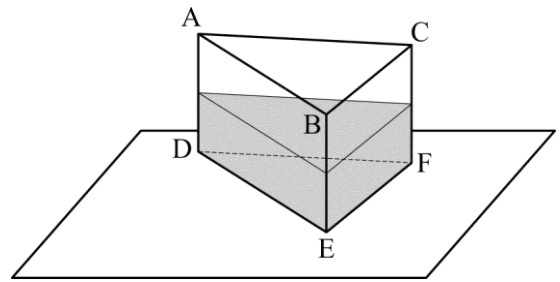
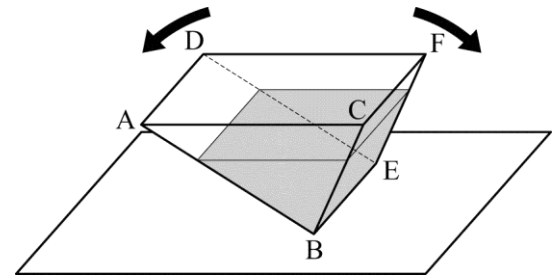
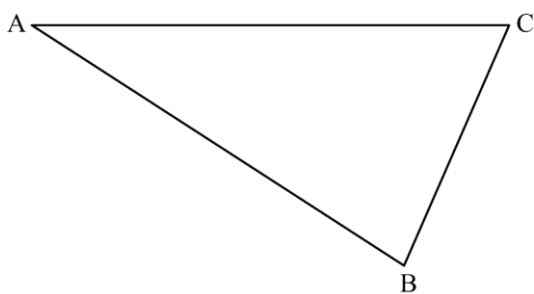


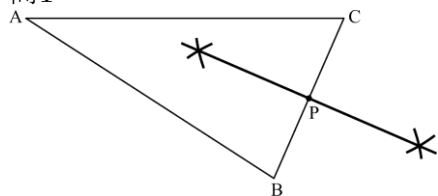
図2



解答欄

問1	
問2	cm

問1



問2 $\frac{27}{8}$ cm

問1

よって辺 BC の垂直二等分線を引く。

右の図のように点 C, R から辺 AB の延長上に垂線 CG, RH を引く。

$$\triangle \text{QBR} = \frac{1}{2} \triangle \text{ABC} \text{ となる。}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CG = \frac{15}{2} \times CG$$

$$\Delta Q_{BR} = \frac{1}{2} \times Q_B \times R_H = 6 \times R_H$$

$$\text{よって } 6 \times \text{RH} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times \text{CG} \text{ より}$$

$$\frac{\text{RH}}{\text{CG}} = \frac{15}{4 \times 6} = \frac{5}{8} \dots \textcircled{1}$$

$$CB:RB=CG:RH$$

CB=9cm より

9: $x = \text{CG} : \text{RH}$

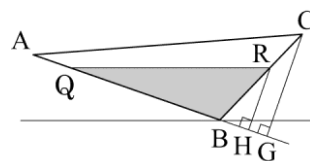
$$\text{よって } 9\text{RH} = x \times \text{CG}, \quad \frac{\text{RH}}{\text{CG}} = \frac{x}{9} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\frac{x}{9} = \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{45}{8} \text{ cm}$$

$$\text{よって CR} = 9 - \frac{45}{8} = \frac{27}{8} \text{ cm}$$



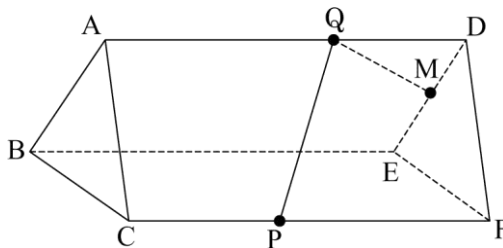
【問 7】

右の図1に示した立体 $ABC-DEF$ は、 $AB=BC=CA=4\text{ cm}$ 、 $AD=9\text{ cm}$ 、 $\angle ABE=\angle CBE=90^\circ$ の正三角柱である。辺 DE の中点を M とする。辺 CF 上にある点を P 、辺 AD 上にある点を Q とし、点 M と点 Q 、点 P と点 Q をそれぞれ結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2016 年度)

図1

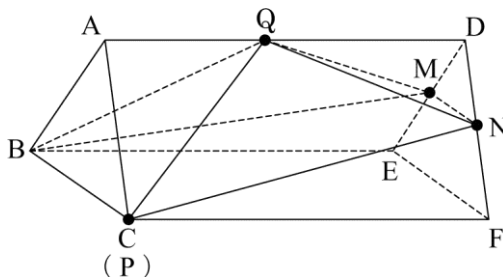


問1 次の 中の「お」「か」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図1において、 $PQ+QM=\ell\text{ cm}$ とする。

$FP=8\text{ cm}$ のとき、 ℓ の値が最も小さくなる場合の ℓ の値は、 お か である。

図2



問2 次の 中の「き」「く」「け」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の図2は、図1において、点 P が頂点 C に一致するとき、辺 DF の中点を N とし、頂点 B と点 M 、頂点 B と点 Q 、点 M と点 N 、点 N と点 P 、点 N と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。

$DQ=5\text{ cm}$ のとき、立体 $Q-BPNM$ の体積は、 き く け cm^3 である。

解答欄

問1	お	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	か	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
問2	き	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	く	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	け	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

解答

問1

お 1

か 0

問2

き 1

く 4

け 3

解説

問1

長方形 ABED を辺 AD で折って展開図で B と A と C と直線で結び長方形 BCFE をつくと
 $\ell = PQ + QM$ は P, Q, M が直線上にあるとき最小となる。

△MPF について

三平方の定理より $\ell^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

よって $\ell = 10$ で ℓ は最小値となる。

問2

△ABC の面積は頂点 A から辺 BC へ垂線 AH を下ろすと

△ABH は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形なので

$AH = 2\sqrt{3}$

したがって面積は $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

同様に△DMN の面積は $\sqrt{3}$

辺 AD, BM, CN の延長線の交点を O とおくと

立体 OABC は高さ 18cm の三角錐になり立体 ODMN も高さ 9cm の三角錐になる。

立体 ABC-DMN の体積は $\frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 18 - \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 9 = 21\sqrt{3} \text{ cm}^3$

三角錐 Q-ABC の体積は $\frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 4 = \frac{16}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$

三角錐 Q-DMN の体積は $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 5 = \frac{5}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$

よって立体 Q-BPNM の体積は $21\sqrt{3} - \left(\frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{3}\sqrt{3} \right) = 14\sqrt{3} \text{ cm}^3$

【問 8】

右の図1は, $AB=3\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$, $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とし, $AD=BE=CF=6\text{ cm}$ を高さとする三角柱である。また, 点 G は辺 BC の中点である。

このとき, 次の問いに答えなさい。

(神奈川県 2016 年度)

問1 この三角柱の表面積を求めなさい。

問2 この三角柱において, 2 点 D , G 間の距離を求めなさい。

問3 図2のように, この三角柱の辺 CF 上に点 H を $AD=AH$ となるようにとる。このとき, 面 ABH と点 C との距離を求めなさい。

図1

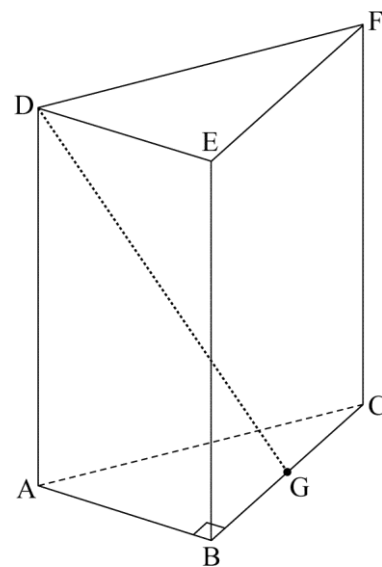
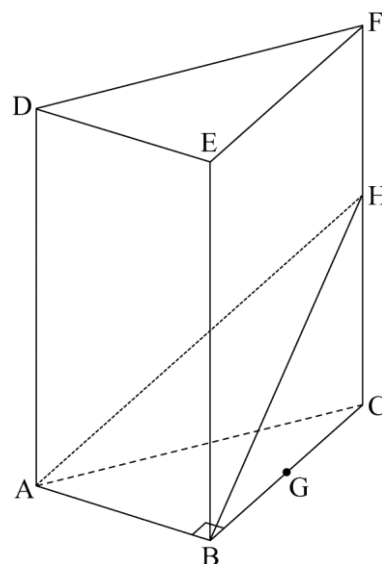


図2



解答欄

問1	cm^2
問2	cm
問3	cm

解答

問1 84 cm^2

問2 7 cm

問3 $\frac{4\sqrt{33}}{9} \text{ cm}$

解説

問1

$AC=5 \text{ cm}$ なので表面積は $2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + 6 \times (3+4+5) = 84 \text{ cm}^2$

問2

$\triangle DAB$ において

三平方の定理より $DB = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$

$\triangle DBG$ は $\angle B=90^\circ$ なので

三平方の定理より $DG^2 = (3\sqrt{5})^2 + 2^2$

$DG=7 \text{ cm}$

問3

$\triangle AHC$ は $\angle C=90^\circ$ なので

三平方の定理より $HC = \sqrt{6^2-5^2} = \sqrt{11} \text{ cm}$

したがって三角錐 $H-ABC$ の体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

また $\triangle BHC$ において

三平方の定理より

$BH^2 = (\sqrt{11})^2 + 4^2$

$BH = 3\sqrt{3}$

$\triangle AHB$ の面積は $\frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

面 ABH と点 C の距離を x とおくと

三角錐 $H-ABC$ の体積より

$\frac{1}{3} \times \frac{9}{2}\sqrt{3} \times x = 2\sqrt{11}$

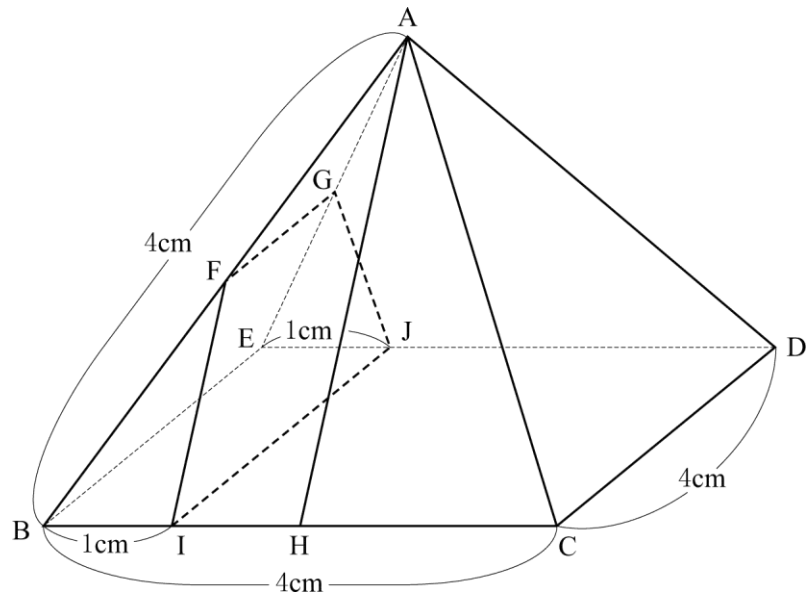
よって $x = \frac{4\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{33}}{9} \text{ cm}$

【問 9】

下の図のように、1 辺の長さが 4 cm の正方形を底面とし、 $AB=AC=AD=AE=4$ cm の正四角すい $ABCDE$ がある。辺 AB , AE , BC の中点をそれぞれ F , G , H とする。また、辺 BC 上に $BI=1$ cm となる点 I , 辺 ED 上に $EJ=1$ cm となる点 J をとる。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(新潟県 2016 年度)



問1 線分 AH と線分 FI の長さを、それぞれ答えなさい。

問2 四角形 $FIJG$ について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 辺 FG の長さを答えなさい。

(2) この四角形の面積を求めなさい。

問3 立体 $FBI-GEJ$ の体積を求めなさい。

解答欄

[illegible]

解答

問1

$$AH = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$FI = \sqrt{3} \text{ cm}$$

問2

$$(1) \quad FG = 2 \text{ cm}$$

(2)

〔求め方〕

ED の中点を K

HK の中点を L とおくと

正四角すいの高さは AL で

$$AL^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 8$$

$$AL = 2\sqrt{2}$$

四角形 FIJG は台形でその高さは

$$\frac{1}{2}AL = \sqrt{2} \text{ である。}$$

$$\text{よって面積は } \frac{1}{2} \times (2+4) \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{答 } 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

問3

〔求め方〕

F, G から辺 IJ へ垂線 FM, GN を下ろし

点 M, N を通り BI に平行な線をひき

BE との交点をそれぞれ P, Q とする。

$\triangle FMP$, $\triangle GNQ$ で

立体 FBI-GEJ を 3 つの立体に分ける。

四角すい F-BIMP の体積は

$$\frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{1}{3} \sqrt{2}$$

四角すい G-EQNJ の体積も同じ。

三角柱 FMP-FNQ の体積は

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times 2 = \sqrt{2}$$

$$\text{よって求める体積は } 2 \times \frac{1}{3} \sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{答 } \frac{5\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$$

解説

問1

F, I は辺 AB, BH の中点であるから $AH = 2FI$

$$\triangle ABH \text{ において三平方の定理より } AH = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } FI = \sqrt{3} \text{ cm}$$

問2

(1)

F, G は辺 AB, AE の中点であるから

$\triangle AFG \sim \triangle ABE$ で相似比は 1:2

$$\text{よって } FG = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}$$

【問 10】

右の図1のように、底面の半径が 1 cm 、母線の長さが 3 cm の円すいがある。
このとき、次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(富山県 2016 年度)

問1 この円すいの体積を求めなさい。

問2 この円すいの表面積を求めなさい。

問3 右の図2のように、底面の円周上の点 P から円すいの側面を 1 周して、点 P までひもをかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さを求めなさい。

図1

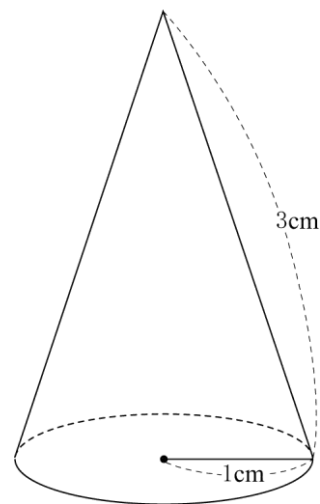
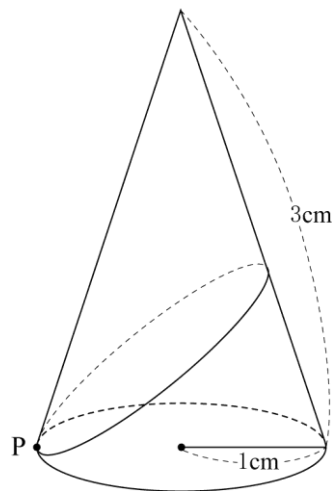


図2



解答欄

問1	cm^3
問2	cm^2
問3	cm

解答

問1 $\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2 $4\pi \text{ cm}^2$

問3 $3\sqrt{3} \text{ cm}$

解説

問1

円すいの高さは三平方の定理により $\sqrt{3^2-1^2} = 2\sqrt{2}$

よって体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \text{ cm}^3$

問2

底面の面積は $\pi \times 1^2 = \pi \text{ cm}^2$

側面積は $\pi \times 3^2 \times \frac{2\pi \times 1}{2\pi \times 3} = 3\pi \text{ cm}^2$

よって表面積は $\pi + 3\pi = 4\pi \text{ cm}^2$

問3

円すいの展開図をかくと

半径が 3, 中心角が $360^\circ \times \frac{1}{3} = 120^\circ$ の扇形となりそのときの弦が最も短くなる。

扇形の中心から弦に垂線を引くと 1 つの角が 60° の直角三角形になるので辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ である。

よってひもの長さは $2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

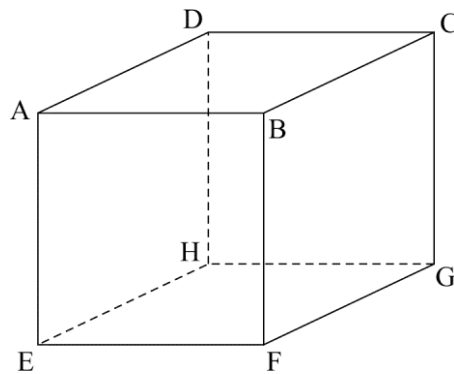
【問 11】

図1～図3の立体 $ABCD-EFGH$ はいずれも、1 辺が 6 cm の立方体である。 図1

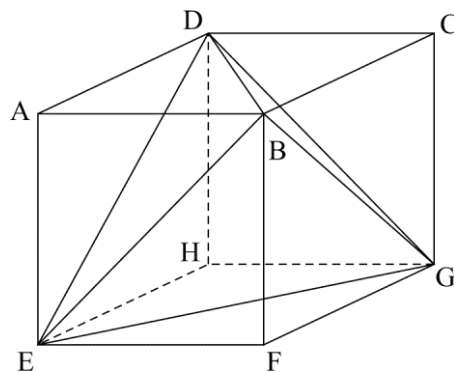
このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2016 年度)

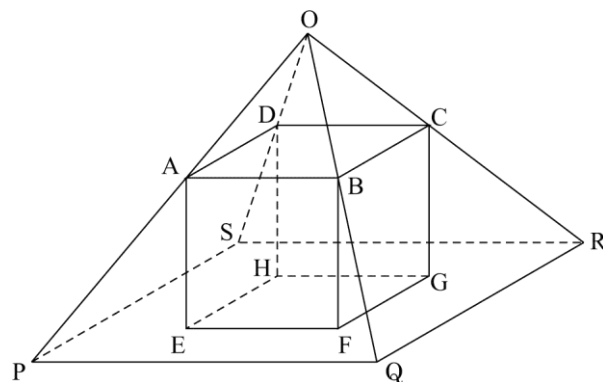
問1 図1において、辺 AE と平行な辺をすべて書きなさい。



問2 図2において、4 点 B, D, E, G を頂点とする立体 $BDEG$ の体積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。



問3 図3のように、すべての辺の長さが等しい正四角錐 $OPQRS$ があり、その中に立方体 $ABCD-EFGH$ が入っている。この立方体の頂点のうち、4 点 A, B, C, D はそれぞれ辺 OP, OQ, OR, OS 上にあり、4 点 E, F, G, H は、いずれも底面 $PQRS$ 上にある。このとき、この正四角錐 $OPQRS$ の一辺の長さを求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。



解答欄

問1	
問2	〔計算〕 答 cm^3
問3	〔計算〕 答 cm

解答

問1 辺 BF, 辺 CG, 辺 DH

問2

〔計算〕

立体 BDEG の体積は

立方体の体積－三角錐 ABDE の体積×4 であるから

$$6^3 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6^2 \right) \times 6 \times 4 = 72$$

〔答〕 72 cm^3

問3

〔計算〕

△OPR の 3 辺の長さの比は $1:1:\sqrt{2}$ であるから

△OPR は直角二等辺三角形である。

これより△OAC, △EAP も直角二等辺三角形である。

よって

$$OA = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 6\sqrt{2} = 6$$

$$AP = \sqrt{2} \times 6 = 6\sqrt{2}$$

したがって $OP = 6 + 6\sqrt{2}$

〔答〕 $(6 + 6\sqrt{2}) \text{ cm}$

解説

問1

同じ平面上にあってどこまでいっても交わらない辺を選ぶ。

問2

求める立体 BDEG は

1 辺 6 cm の立方体から

直角をはさむ 2 辺がともに 6 cm の直角二等辺三角形を底面とし
高さ 6 cm の三角錐 4 つを除いたものである。

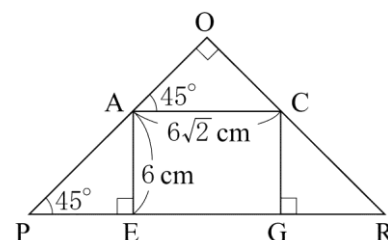
問3

OP = OA + AP より

OA と AP の長さを求める。

△OPR は

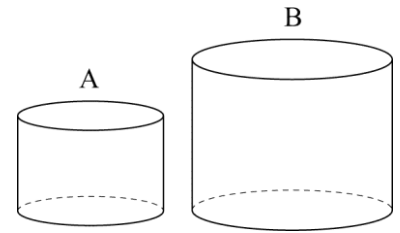
OP = OR = PQ = QR より $PR = \sqrt{2} OP$ となり右の図のようになる。



【問 12】

右の図のように 2 つの円柱の容器 A, B がある。A と B の底面の半径の比は 3:4 で, A の高さは 10 cm, B の高さは 16 cm である。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, 容器の厚みは考えないものとする。

(福井県 2016 年度)



問1 A と B の底面積の比を求めよ。

問2 容器 A, B を同じペンキで満たして, A は 6 個セットで 3000 円, B は 2 個セットで 3000 円で売られている。

どちらのセットを買うほうが割安であるか, 下のア, イ, ウから 1 つ選び, 解答欄の () に書き入れ, 言葉や数, 式などを使って説明せよ。

ア A のセットを買うほうが割安 イ B のセットを買うほうが割安 ウ どちらも同じ

()

〔説明〕

解答欄

問1	A の底面積 : B の底面積 = :
問2	() 〔説明〕

解答

問1

A の底面積 : B の底面積 = 9 : 16

問2

(ア)

〔説明〕

条件から

高さの比は 5 : 8 なので

容器 A と容器 B の体積の比は

$9 \times 5 : 16 \times 8 = 45 : 128$ である。

よって A のセットと B のセットの総体積の比は

$45 \times 6 : 128 \times 2 = 135 : 128$ となる。

A のセットも B のセットも同じ 3000 円なので

総体積が大きい A のセットを買うほうが割安である。

解説

問1

円は相似で相似な図形の面積の比は相似比の 2 乗になるので

A の底面積 : B の底面積 = $3^2 : 4^2 = 9 : 16$

問2

A セットと B セットの代金は同じなので

総体積が大きいほうが割安である。

底面積の比は問1で求めた。

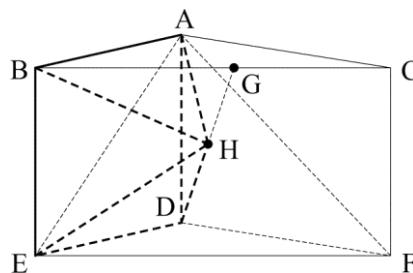
高さの比は $10 : 16 = 5 : 8$ であることから考える。

【問 13】

図で、A、B、C、D、E、Fを頂点とする立体は、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ を底面とし、側面がすべて長方形である三角柱で、G は辺 BC の中点、H は線分 GD と平面 AEF との交点である。

AB=AC=10 cm, BC=12 cm, AD=6 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(愛知県 A 2016 年度)



(1) 線分 GD の長さは何 cm か、求めなさい。

(2) 四角すい HABED の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1) 10 cm

(2) 48 cm^3

解説

(1)

$\triangle ABC$ は二等辺三角形なので $\angle AGB = 90^\circ$

$\triangle AGB$ に三平方の定理を用いると $AG = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm}$

$\triangle AGD$ に三平方の定理を用いると $GD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$

(2)

EF の中点を I とおくと直線 AH と辺 EF の交点は I となるので
四角形 ADIG は長方形となりその対角線の交点が H

したがって $GH = HD$

また H は辺 AG の垂直二等分線上にあるので

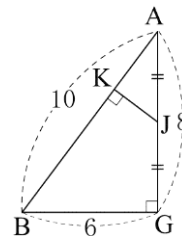
AG の中点を J とすると、H からと J からの四角形 ABED までの距離は同じである。

J から辺 AB までの距離は J から辺 AB へ垂線 JK を下ろすと

$\triangle AJK \sim \triangle ABG$ で相似比は $4:10 = 2:5$

したがって $JK = \frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5}$

よって四角すいの体積は $\frac{1}{3} \times 10 \times 6 \times \frac{12}{5} = 48 \text{ cm}^3$

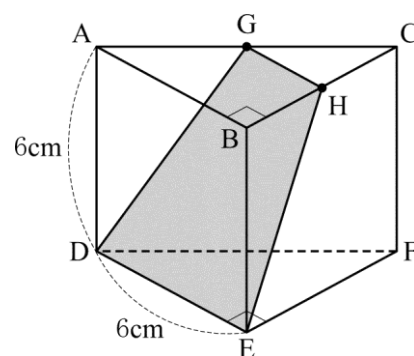


【問 14】

右の図のように、点 A, B, C, D, E, F を頂点とし、 $\angle DEF = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 DEF を底面の 1 つとする三角柱がある。辺 AC の中点を G 、辺 BC の中点を H とし、4 点 D, E, H, G を結んで四角形 $DEHG$ をつくる。

辺 AD の長さが 6 cm 、辺 DE の長さが 6 cm のとき、次の各問いに答えなさい。

なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。



(三重県 2016 年度)

(1) 辺 GH の長さを求めなさい。

(2) 四角形 $DEHG$ の面積を求めなさい。

(3) 四角形 $DEHG$ を、辺 EH を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ²
(3)	cm ³

解答

(1) 3 cm

(2) $\frac{27\sqrt{5}}{2} \text{ cm}^2$

(3) $63\sqrt{5} \pi \text{ cm}^3$

解説

(1)

△CAB で点 G, H はそれぞれ辺 CA, CB の中点だから
中点連結定理より

$$GH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ cm}$$

(2)

四角形 DEHG は $GH \parallel DE$, $\angle DEH = \angle GHE = 90^\circ$ の台形である。

直角三角形 BEH で

$$HE^2 = BH^2 + BE^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$HE > 0$ より

$$HE = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

したがって求める面積は $\frac{(3+6) \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{27\sqrt{5}}{2} \text{ cm}^2$

(3)

できる立体は右の図の直角三角形 ODE を辺 OE を軸として 1 回転させてできる円錐
を点 H を通る底面に平行な平面で切った上部の円錐を取り除いた回転体になる。

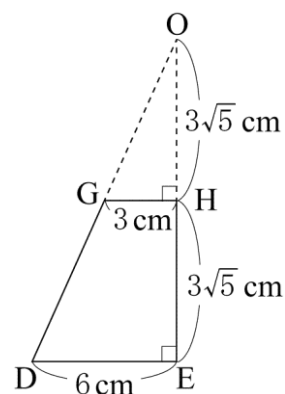
もとの円錐と切り取った小さい円錐は相似で相似比は 2:1 だから

体積の比は $2^3:1^3=8:1$

よって台形 DEHG を回転させてできる立体の体積は

大きい円錐の体積の $\frac{8-1}{8} = \frac{7}{8} = 7$ にあたる。

したがって求める体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6\sqrt{5} \times \frac{7}{8} = 63\sqrt{5} \pi \text{ cm}^3$



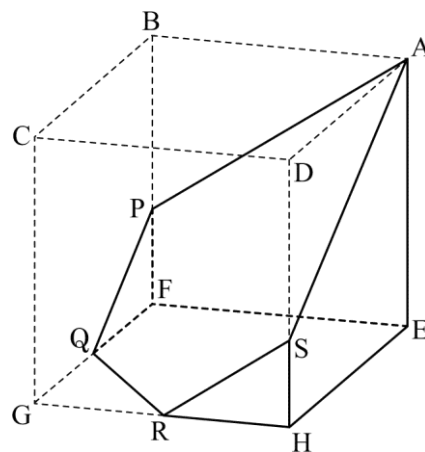
【問 15】

右の図のように、1 辺の長さが 6 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ を、切り口が五角形になるように頂点 A を通る平面で切り、できた 2 つの立体のうち、頂点 E を含むものを立体 X とする。また、切り口の五角形の頂点を順に A, P, Q, R, S とすると、 $PF=SH=2$ cm で、点 Q と点 R はそれぞれ線分 FG 、線分 GH の中点であった。

このとき、次の問1・問2に答えよ。

(京都府 2016 年度 前期)

問1 2 点 A, S を通る直線と、2 点 E, H を通る直線との交点を T とするとき、線分 TH の長さを求めよ。また、 $\angle HRT$ の大きさを求めよ。



問2 立体 X の体積を求めよ。

解答欄

問1	TH = cm
	$\angle HRT =$ °
問2	cm^3

解答

問1

$$TH = 3 \text{ cm}$$

$$\angle HRT = 45^\circ$$

$$\text{問2 } 75 \text{ cm}^3$$

解説

問1

$$TH = x \text{ cm} \text{ とおくと}$$

右の図で $\triangle THS \sim \triangle TEA$

相似比は $2:6=1:3$ より

$$x:(x+6)=1:3$$

$$x+6=3x$$

$$x=3 \text{ cm}$$

また $HR=3 \text{ cm}$ より

$\triangle HTR$ は直角二等辺三角形であるから $\angle HRT=45^\circ$

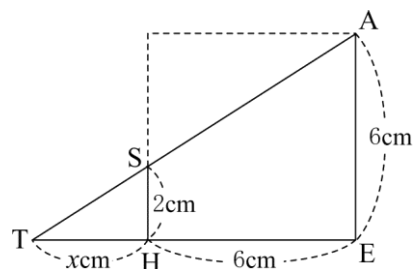
問2

立体 X は

直角をはさむ辺が 9 cm の直角二等辺三角形を底面として高さ 6 cm の三角錐から

直角をはさむ辺が 3 cm の直角二等辺三角形を底面として高さ 2 cm の三角錐 2 つを取り除いたものである。

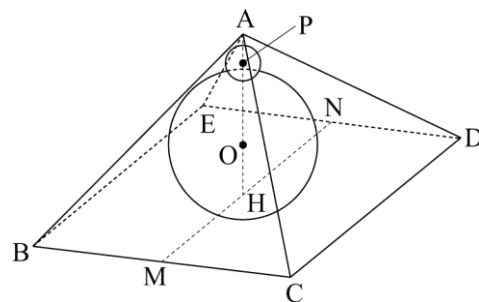
$$\text{よってその体積は } \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 9 \right) \times 6 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \right) \times 2 \times 2 = 81 - 6 = 75 \text{ cm}^3$$



【問 16】

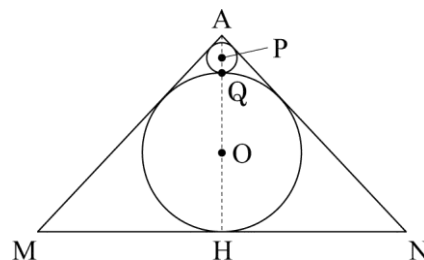
右の図1のように、底面の1辺が6 cm、高さが $\sqrt{7}$ cmの正四角錐A-BCDEがあり、2辺BC, DEの中点をそれぞれM, Nとし、線分MNの中点をHとする。また、線分AH上に2点O, Pがあり、正四角錐の内部に、点Oを中心とする球と点Pを中心とする球がある。

図1



右の図2は、この立体を3点A, M, Nを通る平面で切った切り口を表している。図2中の円Oは△AMNの各辺と接している、円Pは2辺AM, ANと接している。また、2円O, Pは線分AH上の点Qを通り、点Qにおける円Oの接線と円Pの接線は同じ直線である。

図2



このとき、次の問1～問3に答えよ。

(京都府 2016 年度 中期)

問1 辺ABの長さを求めよ。また、正四角錐の表面積を求めよ。

問2 点Oを中心とする球の半径を求めよ。

問3 点Oを中心とする球の体積と点Pを中心とする球の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問1	AB=	cm
	表面積	cm ²
問2		cm
問3	点Oを中心とする球の体積 : 点Pを中心とする球の体積 = :	

解答

問1

$$AB=5\text{ cm}$$

$$\text{表面積 } 84\text{ cm}^2$$

$$\text{問2 } \frac{3\sqrt{7}}{7}\text{ cm}$$

$$\text{問3 } 343:1$$

解説

問1

$$BH=3\sqrt{2}$$

△ABH において

三平方の定理より

$$AB^2=(\sqrt{7})^2+(3\sqrt{2})^2=25$$

$$AB=5\text{ cm}$$

△ABM は

辺の比が 3:4:5 の直角三角形なので

$$AM=4$$

$$\text{よって正四角錐の表面積は } \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 4 + 6^2 = 48 + 36 = 84\text{cm}^2$$

問2

$$\triangle AMN \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

円 O の半径を r とおくと△AMN の面積から

$$\frac{1}{2} (4+4+6)r = 3\sqrt{7}$$

$$r = \frac{3\sqrt{7}}{7}\text{ cm}$$

問3

$$QH = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{したがって } AQ = \sqrt{7} - \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$AH:AQ = \sqrt{7} : \frac{\sqrt{7}}{7} = 7:1 \text{ なので}$$

球の半径も同じ比になる。

$$\text{よって体積比は } 7^3:1^3=343:1$$

【問 17】

図1～図3において、立体 $ABC-DEF$ は五つの平面で囲まれてできた立体である。 $\triangle ABC$ は $BA=BC=5\text{ cm}$, $AC=4\text{ cm}$ の二等辺三角形であり、 $\triangle DEF$ は 1 辺の長さが 4 cm の正三角形である。四角形 $ADEB$ は、 $AD \parallel BE$, $\angle ADE = \angle DEB = 90^\circ$, $AD=6\text{ cm}$, $BE=3\text{ cm}$ の台形である。四角形 $CFEB$ は $CF \parallel BE$ の台形であり、台形 $CFEB \equiv$ 台形 $ADEB$ である。四角形 $ADFC$ は長方形である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 B 2016 年度)

問1 図1において、

- (1) 次のア～カのうち、面 DEF と垂直な辺はどれですか。すべて選び、記号を○で囲みなさい。

- | |
|----------|
| ア 辺 AB |
| イ 辺 AC |
| ウ 辺 AD |
| エ 辺 BC |
| オ 辺 BE |
| カ 辺 CF |

- (2) $\triangle ABC$ の内角 $\angle ABC$ の大きさを α° とするとき、 $\triangle ABC$ の内角 $\angle BAC$ の大きさを α を用いて表しなさい。

図1

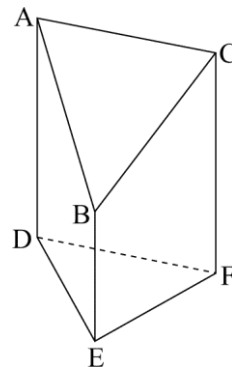


図2

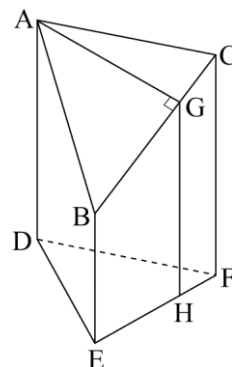
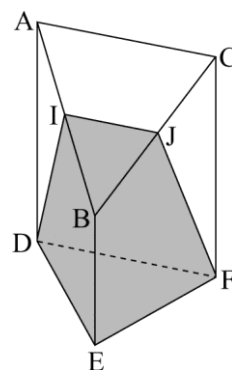


図3



問2 図2において、 G は、 A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。 H は、 G を通り辺 CF に平行な直線と辺 EF との交点である。線分 GH の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

問3 図3において、 I は辺 AB の中点であり、 J は辺 BC の中点である。 D と I , I と J , J と F とをそれぞれ結ぶ。

- (1) $\triangle DEF$ の面積を求めなさい。
- (2) 立体 $IBJ-DEF$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	ア イ ウ エ オ カ
	(2)	度
問2	[求め方]	
問3	(1)	cm ²
	(2)	cm ³

解答

問1

(1) ウ オ カ

(2) $90 - \frac{1}{2}a$ 度

問2

〔求め方〕

$BG = x$ cm とすると

$CG = 5 - x$ cm

$\angle AGB = 90^\circ$ だから

$$AG^2 = AB^2 - BG^2 \dots \textcircled{7}$$

$\angle AGC = 90^\circ$ だから

$$AG^2 = AC^2 - CG^2 \dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

$$AB^2 - BG^2 = AC^2 - CG^2$$

よって

$$5^2 - x^2 = 4^2 - (5 - x)^2$$

これを解くと

$$x = \frac{17}{5}$$

Bを通り辺 EF に平行な直線と線分 GH, 辺 CF との交点をそれぞれ K, L とすると

$$KH = BE = 3 \text{ cm}$$

$LF = BE = 3 \text{ cm}$ だから

$$CL = CF - LF = 3 \text{ cm}$$

$GK \parallel CL$ だから

$$GK : CL = BG : BC = \frac{17}{5} : 5 = 17 : 25$$

$$\text{よって } GK = \frac{17}{25} CL = \frac{51}{25} \text{ cm}$$

$$\text{したがって } GH = GK + KH = \frac{126}{25} \text{ cm}$$

$$\frac{126}{25} \text{ cm}$$

問3

(1) $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$

(2) $10\sqrt{3} \text{ cm}^3$

解説

問1

(1)

$AD \perp DE$, $AD \perp DF$ より $AD \perp$ 面 DEF

同様に $BE \perp$ 面 DEF , $CF \perp$ 面 DEF

よって面 DEF と垂直な辺はウの辺 AD , オの辺 BE , カの辺 CF である。

(2)

$BA=BC$ だから

$$\angle BAC = (180^\circ - a^\circ) \times \frac{1}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} a^\circ$$

問2

$BG=x$ cm とする。

直角三角形 ABG で

$$AG^2 = AB^2 - BG^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2 \cdots \textcircled{ア}$$

直角三角形 ACG で

$$AG^2 = AC^2 - CG^2 = 4^2 - (5-x)^2 = -x^2 + 10x - 9 \cdots \textcircled{イ}$$

$\textcircled{ア}$, $\textcircled{イ}$ より

$$25 - x^2 = -x^2 + 10x - 9$$

これを解くと

$$x = \frac{17}{5}$$

よって

$$BG = \frac{17}{5} \text{ cm}$$

$$CG = 5 - \frac{17}{5} = \frac{8}{5} \text{ cm}$$

次に BF と GH の交点を K とする。

$\triangle BFC$ で $GK \parallel CF$ だから

$GK:CF = BG:BC$ より

$$GK:6 = \frac{17}{5} : 5$$

$$GK = \frac{102}{25} \text{ cm}$$

また $\triangle FBE$ で

$KH \parallel BE$ だから

$$KH:BE = FH:FE = CG:CB = \frac{8}{5} : 5 = 8:25 \text{ より}$$

$$KH:3 = 8:25$$

$$KH = \frac{24}{25}$$

$$\text{したがって } GH = GK + KH = \frac{102}{25} + \frac{24}{25} = \frac{126}{25} \text{ cm}$$

解説

問3

(1)

正三角形 DEF で

D から辺 EF にひいた垂線の長さを h cm とすると

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} DE = 2\sqrt{3}$$

$$\text{よって } \triangle DEF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(2)

立体 ABC-DEF を右の図1のように

点 B を通り面 DEF に平行な平面で切って2つに分けると

体積は正三角柱⑦の体積と四角錐④の体積の和として求められる。

⑦の正三角柱の体積は

$$\triangle DEF \text{ の面積が } 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ だから } 4\sqrt{3} \times 3 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

④の四角錐の底面は縦 3 cm, 横 4 cm の長方形で

高さは正三角形 DEF の高さに等しいから $2\sqrt{3}$ cm である。

$$\text{よって } ④ \text{ の四角錐の体積は } \frac{1}{3} \times (3 \times 4) \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

したがって立体 ABC-DEF の体積は

$$12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

次に右の図2のように C と I, F と I を結び

白い立体を四角錐 I-ADFC と三角錐 I-CJF とに分ける。

四角錐 I-ADFC の底面は長方形 ADFC で

高さは正三角形 DEF の高さの $\frac{1}{2}$ に等しいから

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times (6 \times 4) \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

三角錐 I-CJF の底面を $\triangle CJF$ とみると高さは正三角形 DEF の高さの $\frac{1}{2}$ に等しい。

$$\text{また } \triangle CJF \text{ の底辺を } CF \text{ とみると高さは } \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}$$

$$\text{よって三角錐 I-CJF の体積は } \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 2 \right) \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{したがって立体 IBJ-DEF の体積は } 20\sqrt{3} - (8\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 10\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

図1

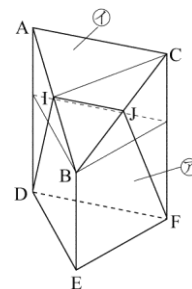
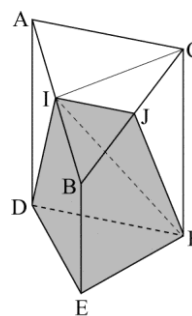


図2



【問 18】

図1, 図2において, 立体 $ABCD-EFGH$ は六つの平面で囲まれてできた立体である。四角形 $ABCD$ は 1 辺の長さが 2 cm の正方形であり, 四角形 $EFGH$ は 1 辺の長さが 6 cm の正方形である。平面 $ABCD$ と平面 $EFGH$ は平行である。四角形 $BFGC$ は $BC \parallel FG$ の台形であり, $BF = CG = 6$ cm である。四角形 $AEFB$, $CGHD$, $DHEA$ は, すべて台形 $BFGC$ と合同な台形である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 C 2016 年度)

問1 図1において, A と F , D と G とをそれぞれ結ぶ。このとき, 4 点 A, F, G, D は同じ平面上にあって, この 4 点を結んでできる四角形 $AFGD$ は $AD \parallel FG$ の台形である。 B と H とを結ぶ。 I は, 線分 BH と平面 $AFGD$ との交点である。このとき, I は台形 $AFGD$ の対角線の交点である。

(1) 台形 $AFGD$ の面積を求めなさい。

(2) ⑦ 線分 BH の長さを求めなさい。

④ 線分 BI の長さを求めなさい。

問2 図2において, J は台形 $AEFB$ の対角線の交点であり, K は台形 $CGHD$ の対角線の交点である。 J と K とを結ぶ。このとき, $AD \parallel JK$ である。 L は, J から辺 FG にひいた垂線と辺 FG との交点である。

(1) 線分 JL の長さを求めなさい。

(2) 立体 $JK-EFGH$ の体積を求めなさい。

図1

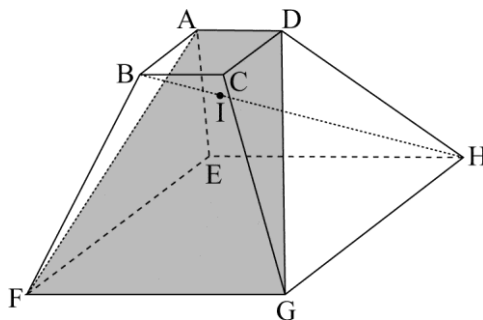
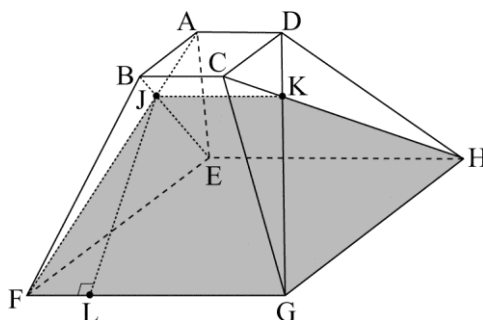


図2



解答欄

問1	(1)	cm^2	
	(2)	⑦	cm
		⑧	cm
問2	(1)	cm	
	(2)	cm^3	

解答

問1

(1) $8\sqrt{11} \text{ cm}^2$

(2)

㉞ $2\sqrt{15} \text{ cm}$

㉟ $\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$

問2

(1) $\frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ cm}$

(2) $\frac{45\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$

解説

問1

(1)

点 A から辺 FG に垂線をひき FG との交点を M とする。

△BFG で、BG = $x \text{ cm}$ とする。

BF = 6cm, FM = 2cm, GM = 6 - 2 = 4 cm だから

BF² - FM² = BG² - GM² より

$$6^2 - 2^2 = x^2 - 4^2$$

$$x^2 = 48$$

$x > 0$ より

$$x = 4\sqrt{3}$$

AF = BG = $4\sqrt{3} \text{ cm}$ だから

直角三角形 AFM で

AF² = AM² + FM² より

$$(4\sqrt{3})^2 = AM^2 + 2^2$$

$$AM^2 = 48 - 4 = 44$$

AM > 0 より

$$AM = 2\sqrt{11} \text{ cm}$$

$$\text{したがって台形 AFGD の面積は } (2+6) \times 2\sqrt{11} \times \frac{1}{2} = 8\sqrt{11} \text{ cm}^2$$

(2)

㉞

点 B から線分 FH にひいた垂線と FH の交点を N とする。

直角三角形 BFN で BN² = BF² - FN² BF = 6cm, FN = $2\sqrt{2} \text{ cm}$ より

$$BN^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 36 - 8 = 28$$

BN > 0 より

$$BN = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

直角三角形 BNH で

BH² = BN² + NH²

$$BN = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$NH = \frac{2}{3} FH = \frac{2}{3} \times \sqrt{2} FG = \frac{2}{3} \times \sqrt{2} \times 6 = 4\sqrt{2} \text{ cm より}$$

$$BH^2 = (2\sqrt{7})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 28 + 32 = 60$$

BH > 0 より

$$BH = 2\sqrt{15} \text{ cm}$$

㉟

$$BI = \frac{1}{4} BH = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$$

解説

問2

(1)

右の図1で問1の(1)より $AF = 4\sqrt{3}$ cm

$AB \parallel EF$ より $AJ:JF = AB:EF = 1:3$ だから

$$JF = 4\sqrt{3} \times \frac{3}{4} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

右の図2で $FL:FM = FJ:FB = 3:4$ で $FM = 2$ cm だから

$$FL = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

よって直角三角形 JFL で $JF^2 = FL^2 + JL^2$ だから

$$JL^2 = JF^2 - FL^2 = (3\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 27 - \frac{9}{4} = \frac{99}{4}$$

$JL > 0$ より

$$JL = \frac{3\sqrt{11}}{2} \text{ cm}$$

(2)

右の図のように立体 JK-EFGH を3つの部分①, ②, ③に分ける。

立体①で点 J から面 FGHE にひいた垂線の長さを h cm とすると

問1の(2)㉞より $BN = 2\sqrt{7}$ cm だから

$$h = \frac{3}{4} BN = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ cm}$$

よって①の体積は

$$\frac{1}{3} \times 6 \times FL \times h = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$$

また立体②は三角柱でその体積は

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3\sqrt{7}}{2} \times \left(6 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{27\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$$

$$\text{したがって求める立体の体積は } \frac{9\sqrt{7}}{2} \times 2 + \frac{27\sqrt{7}}{2} = \frac{45\sqrt{7}}{2} \text{ cm}^3$$

図1

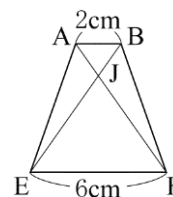
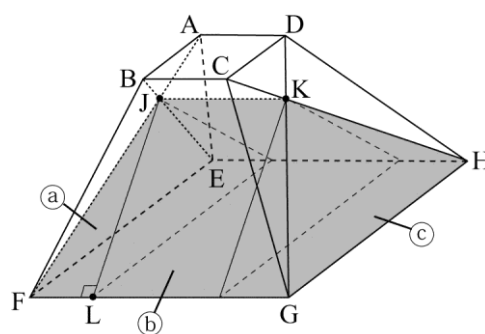
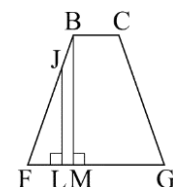


図2



【問 19】

4 種類の球 A, B, C, D がある。A, B, C, D の直径はそれぞれ 12 cm, 6 cm, 4 cm, 3 cm であり、どれも水に沈むものとする。

次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(兵庫県 2016 年度)

問1 A の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

問2 ある中学生が、次のようなレポートを書いた。レポートの内容が正しくなるように [①] , [③] にあてはまる値と [②] にあてはまる式を書き、 [(i)] にあてはまるものを【 I 】のア, イから、 [(ii)] にあてはまるものを【 II 】のウ～オからそれぞれ 1 つ選んで、その符号を書きなさい。

「立方体の容器にちょうどはいる球を小さくしていくと、すき間の体積はどうなるか？」

1 辺が 12 cm の立方体の容器と球のすき間の体積を調べるために、この容器に水をいっぱいまで入れることを考える。

図1のように、容器に A を 1 個入れるとき、この容器にはいる水の体積を計算すると [①] cm^3 である。

図 1

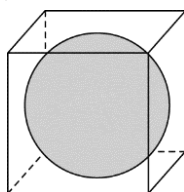
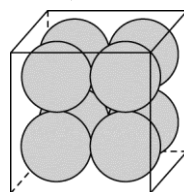
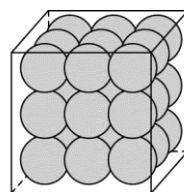


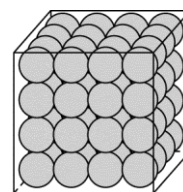
図2



B を 8 個
入れるとき



C を 27 個
入れるとき



D を 64 個
入れるとき

次に、容器に、8 個の B, 27 個の C, 64 個の D を、図2のように、底面に並べる縦、横の個数と、積み重ねる段数をすべて同じにして、ちょうどはいるように入れる。同様の入れ方で、球の直径を小さくしていくとき、容器にはいる水の体積について予想を立てた。

《予想》球の直径が小さいほど、容器にはいる水の体積は小さい。

この予想が正しいかどうかを確かめるために次のような計算をした。

直径が容器の 1 辺を x 等分したときの 1 つの長さと等しい球を x^3 個、図2と同様の入れ方で容器に入れるとき、球の直径は [②] cm なので、この容器にはいる水の体積は [③] cm^3 である。

《結論》1 辺が 12 cm の立方体の容器にちょうどはいるように、直径が等しい球を入れるとき《予想》は [(i)] , この容器と球のすき間の体積は [(ii)] 。

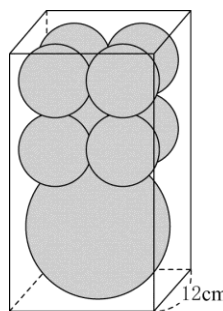
【 I 】 ア 正しく
イ 間違っており

【 II 】 ウ 球の直径が小さいほど大きい
エ 球の直径が小さくなくても変わらない
オ 球の直径が小さいほど小さい

問3 図3のような、1 個の A と 8 個の B がちょうどはいる 1 図3

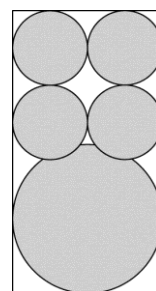
辺が 12 cm の正方形を底面とする正四角柱の容器を正面から見ると、図4のように見える。

この容器の高さは何 cm か、求めなさい。



正面

図4



解答欄

問1	cm^3	
問2	①	
	②	
	③	
	(i)	
	(ii)	
問3	cm	

解答

問1 $288\pi \text{ cm}^3$

問2

① $1728 - 288\pi$

② $\frac{12}{x}$

③ $1728 - 288\pi$

(i) イ

(ii) エ

問3 $15 + 3\sqrt{7} \text{ cm}$

解説

問1

A の半径は 6cm なので $\frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$

問2

(1)には $12^3 - 288\pi = 1728 - 288\pi \text{ cm}^3$

(2)には 12cm を x 等分するので $\frac{12}{x} \text{ cm}$

(3)には球の半径は $\frac{6}{x}$ なので容器に入る水の量は $2^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{6}{x} \right)^3 \times x^3 = 1728 - 288\pi \text{ cm}^3$

また(i)にはイ, (ii)には上の(1), (3)よりエが入る。

問3

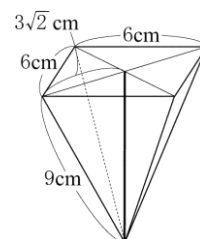
容器の高さは B の直径 + 半径と A の半径と次の四角錐の高さの合計となる。

四角錐は中段の 4 個の中心を結んだ正方形を底面とし

A の中心からこの底面までが高さとなる。

高さは $\sqrt{9^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{63}$

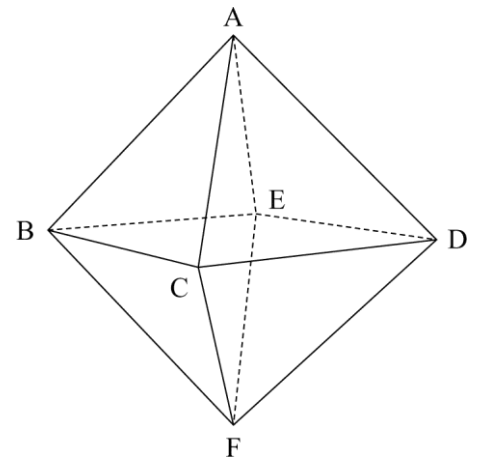
よって $9 + 6 + \sqrt{63} = 15 + 3\sqrt{7} \text{ cm}$



【問 20】

右の図1は、一辺の長さが 4 の正八面体である。このとき、次の各問に答えなさい。

図1



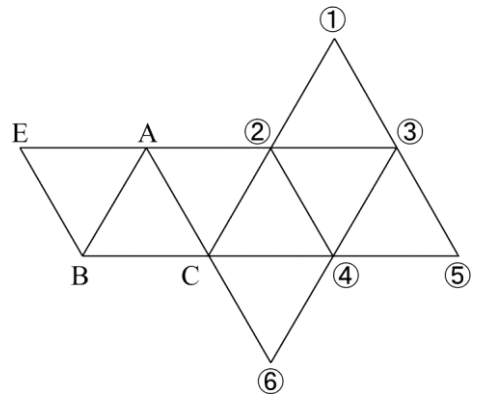
(鳥取県 2016 年度)

問1 線分 BD の長さを求めなさい。

問2 この正八面体の体積を求めなさい。

問3 右の図2は、この正八面体の展開図である。図2の①～⑥の中で、頂点 B にあたる点をすべて選び、番号で答えなさい。

図2

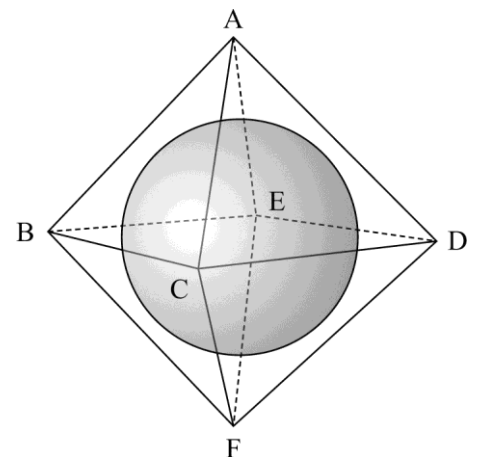


問4 辺 BC の中点を M, 辺 ED の中点を N とする。この正八面体を 3 点 A, M, N を通る平面で切り、2 つの立体に分けたとき、切り口はどんな形になるか。次のア～エから正しいものをひとつ選び、記号で答えなさい。

ア 二等辺三角形 イ 正方形 ウ ひし形 エ 五角形

問5 右の図3のように、この正八面体の 8 つの側面にぴったりと接している球がある。この球の半径を求めなさい。

図3



解答欄

問1	BD=
問2	
問3	
問4	
問5	

解答

問1 $BD = 4\sqrt{2}$

問2 $\frac{64}{3}\sqrt{2}$

問3 ⑤, ⑥

問4 ウ

問5 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

解説

問1

$$BD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

よって $BD = 4\sqrt{2}$

問2

頂点 A から平面 BCDE へ垂線 AO を下ろすと O は各頂点から同じ距離にあるので $AO = 2\sqrt{2}$

よって正八面体の体積は $\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{2} \times 2 = \frac{64}{3}\sqrt{2}$

問3

図2の展開図と図1の正八面体の頂点を対応させると

①が A, ②が D, ③が E, ④が F, ⑤, ⑥が B となる。

よって⑤, ⑥

問4

$$AM = AN = MF = NF = 2\sqrt{3}, MN = 4, AF = 4\sqrt{2}$$

よってウのひし形となる。

問5

球の中心は問2の O と同じ点で三角錐 OABC が 8 個で正八面体の体積となる。

球の半径を R とおくと $\triangle ABC$ の面積が $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ なので

$$8 \times \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times R = \frac{64}{3}\sqrt{2}$$

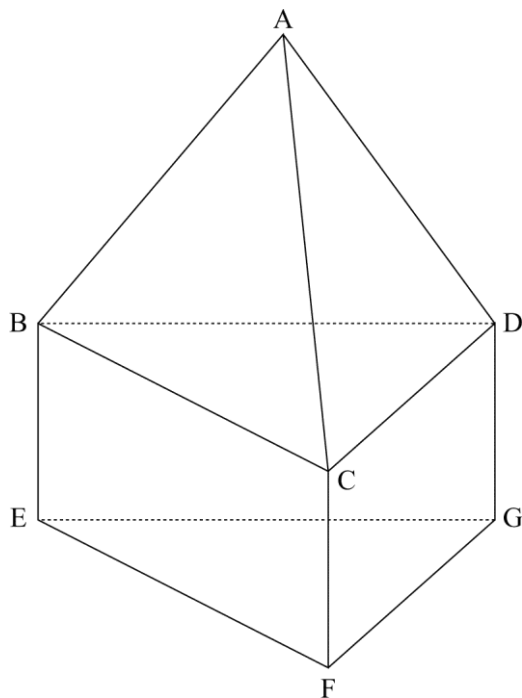
$$R = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

【問 21】

下の図は、正四面体と三角柱を合わせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G を頂点とする立体を表している。正四面体 ABCD の 1 辺の長さは 4 cm であり、三角柱 BCDEFG の側面はすべて合同な長方形である。

次の問1～問3に最も簡単な数で答えよ。ただし根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2016 年度)



問1 図に示す立体において、辺 CD とねじれの位置にある辺は、全部で何本あるか答えよ。

問2 図に示す立体において、辺 BC 上に点 H、辺 AC 上に点 I を、 $EH + HI + ID$ の長さが最も短くなるようにとる。BE = $\sqrt{3}$ cm のとき、 $EH + HI + ID$ の長さを求めよ。

問3 図に示す立体において、辺 CD, DB の中点をそれぞれ J, K とする。点 A と点 K を結び、点 J を通り線分 AK に垂直な直線と線分 AK との交点を L とする。三角すい LBJD の体積は、正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ。

解答欄

問1	本
問2	cm
問3	倍

解答

問1 4本

問2 $3\sqrt{7}$ cm

問3 $\frac{1}{12}$ 倍

解説

問1

辺 AB, BE, EF, EG の4本ある。

問2

立体を展開したときの $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, 長方形 BEFC の部分は右の図のようになる。

EH+HI+ID の長さが最も短くなるのは

右の図で線分 ED と BC, AC の交点をそれぞれ H, I としたときである。

三平方の定理より $CJ = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm

よって $EH + HI + ID = \sqrt{(4+2)^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 27} = 3\sqrt{7}$ cm

問3

中点連結定理より $KJ = \frac{1}{2} BC = 2$ cm

また $AK = AJ = 2\sqrt{3}$ cm である。

$\triangle AKJ$ を考え点 A, L から辺 KJ に垂線 AP, LQ を引く。

三平方の定理より

$$AP^2 = (2\sqrt{3})^2 - 1^2 = 11$$

$$AP = \sqrt{11} \text{ cm}$$

$$\triangle AKJ = \frac{1}{2} \times KJ \times AP = \frac{1}{2} \times AK \times JL \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{11} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times JL \quad JL = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3} \text{ cm}$$

$$\triangle JKL = \frac{1}{2} \times KJ \times LQ = \frac{1}{2} \times LK \times JL \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times LQ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{33}}{3}$$

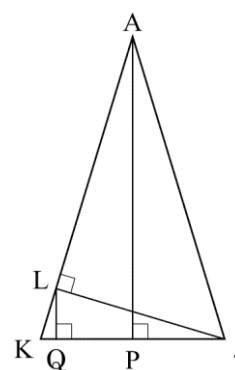
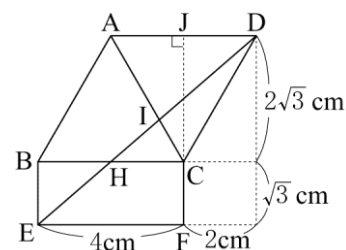
$$LQ = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

三角すい LBJD と正四面体 ABCD の底面積の比は

$\triangle BJD : \triangle BCD = 1 : 2$ で

高さの比は $LQ : AP = \frac{\sqrt{11}}{6} : \sqrt{11} = 1 : 6$ より

三角すい LBJD の体積は正四面体 ABCD の体積の $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ 倍



【問 22】

図1のように、底面の半径が 3 cm、母線の長さが 12 cm の円すいがある。
このとき、問1～問4に答えなさい。

(佐賀県 2016 年度 一般)

問1 円すいの側面となるおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

問2 円すいの体積を求めなさい。

問3 右の図2のように、円すいを底面に平行な平面で、高さが等しくなるように 2 つの立体に分けて、上側の立体を逆にした型を、下側の立体からくりぬいてできた立体がある。

このとき、この立体の体積を求めなさい。

問4 右の図3のように、問3の図2の立体を底面に平行な平面で、高さが等しくなるように 2 つの立体に分けて、上側の立体を逆にした型を、下側の立体からくりぬいてできた立体がある。

このとき、この立体の体積を求めなさい。

図1

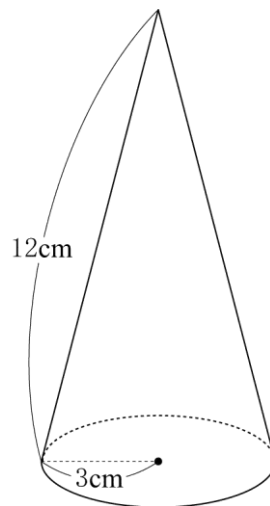


図2

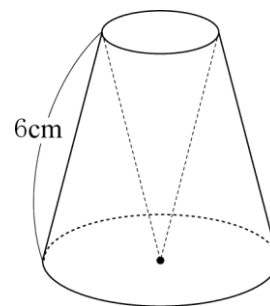
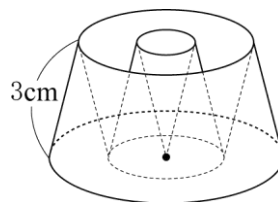


図3



解答欄

問1	度
問2	cm^3
問3	cm^3
問4	cm^3

解答

問1 90 度

問2 $9\sqrt{15} \pi \text{ cm}^3$

問3 $\frac{27\sqrt{15}\pi}{4} \text{ cm}^3$

問4 $\frac{27\sqrt{15}\pi}{8} \text{ cm}^3$

解説

問1

側面となるおうぎ形の弧の長さは底面の円周の長さと等しい。

よっておうぎ形の中心角を x° とすると

$$2\pi \times 12 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 3$$

$x=90$

よって 90°

問2

円すいの高さを $h \text{ cm}$ とする。

$$\text{三平方の定理より } h = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15}$$

$$\text{よって円すいの体積は } \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{15} = 9\sqrt{15} \pi \text{ cm}^3$$

問3

円すいを 2 つの立体に分けたときの上側の立体はもとの円すいと相似な円すいになる。

相似比は $1:2$ だから体積の比は $1^3:2^3=1:8$

したがって上側の立体を逆にした型を下側の立体からくりぬいてできた立体の体積は

$$\text{もとの円すいの体積の } 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \text{ 倍になる。}$$

$$\text{よって求める体積は } 9\sqrt{15} \pi \times \frac{3}{4} = \frac{27\sqrt{15}\pi}{4} \text{ cm}^3$$

問4

円すいを底面に平行な 3 つの平面で高さが等しくなるように 4 つの立体に分け

それぞれの体積を上から順に V_1, V_2, V_3, V_4 とすると

図3の立体の体積は $V_4 - V_3 + V_2 - V_1$ となる。

またもとの円すいの体積を V とすると相似比と体積の比の関係より

$$V_1:V=1^3:4^3=1:64$$

$$(V_1+V_2):V=1:8=8:64$$

$$(V_1+V_2+V_3):V=3^3:4^3=27:64$$

$$\text{したがって } V_1 = \frac{1}{64} V$$

$$V_2 = \frac{8}{64} V - \frac{1}{64} V = \frac{7}{64} V$$

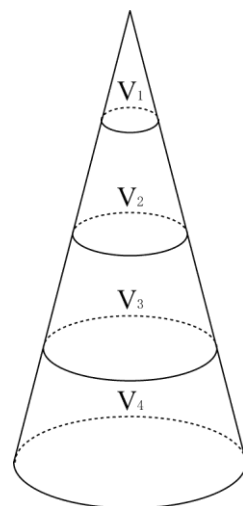
$$V_3 = \frac{27}{64} V - \frac{8}{64} V = \frac{19}{64} V$$

$$V_4 = V - \frac{27}{64} V = \frac{37}{64} V$$

よって図3の立体の体積はもとの円すいの体積の

$$\frac{37}{64} - \frac{19}{64} + \frac{7}{64} - \frac{1}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8} \text{ 倍になるから}$$

$$9\sqrt{15} \pi \times \frac{3}{8} = \frac{27\sqrt{15}\pi}{8} \text{ cm}^3$$



【問 23】

図1～図3のように、6 つの点 A, B, C, D, E, F を頂点とする三角柱 ABCDEF があり、側面はいずれも底面に垂直で、 $AB = BC = AD = 4$ cm, $\angle ABC = 90^\circ$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2016 年度)

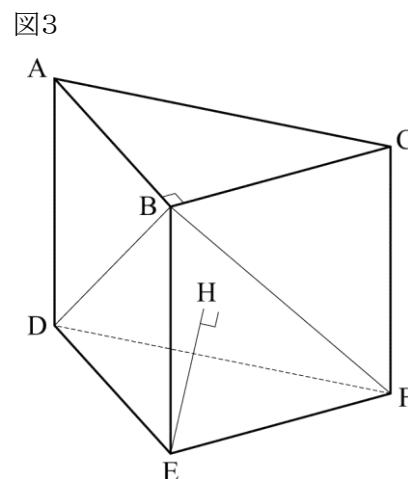
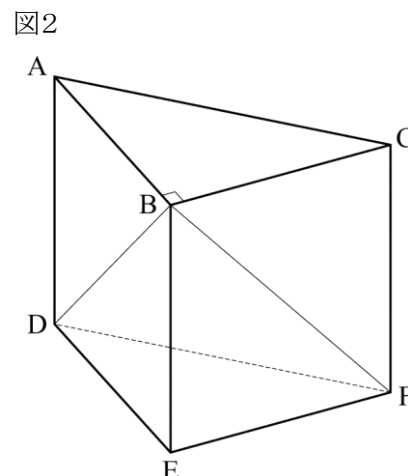
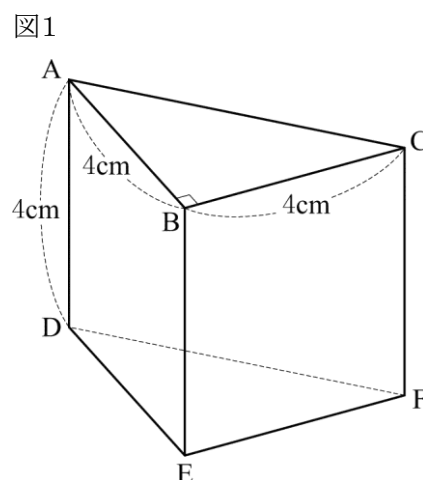
問1 図1の三角柱 ABCDEF において、辺 AB とねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

問2 三角柱 ABCDEF の体積は何 cm^3 か。

問3 図2において、 $\angle DBF$ の大きさは何度か。

問4 図2において、 $\triangle BDF$ の面積は何 cm^2 か。

問5 図3のように、点 E から $\triangle BDF$ にひいた垂線と $\triangle BDF$ との交点を H とする。このとき、線分 EH の長さは何 cm か。



解答欄

問1	本
問2	cm^3
問3	$\angle DBF =$ °
問4	cm^2
問5	cm

解答

問1 3 本

問2 32 cm^3

問3 $\angle DBF = 60^\circ$

問4 $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$

問5 $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

解説

問1

辺 AB とねじれの位置にある辺は FC, EF, DF の 3 本

問2

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = 32 \text{ cm}^3$$

問3

BD, BF, DF いずれも合同な 3 つの直角三角形の斜辺であり $BD = BF = DF$

よって $\angle DBF = 60^\circ$

問4

3 辺とも $4\sqrt{2}$ の正三角形なので点 B から点 DF に下ろした垂線の長さは 3 辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ を用いると

$$2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{よって面積は } \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

問5

三角すい B-DEF の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}$$

$EH = x$ とおくと

$$\frac{1}{3} \times 8\sqrt{3} x = \frac{32}{3}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

【問 24】

図1～図3のように、6 つの点 A, B, C, D, E, F を頂点とする三角柱 ABCDEF があり、側面はいずれも底面に垂直で、 $AB = BC = AD = 4$ cm, $\angle ABC = 90^\circ$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2016 年度)

問1 図1の三角柱 ABCDEF において、辺 AB とねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

問2 三角柱 ABCDEF の体積は何 cm^3 か。

問3 図2, 図3のように、辺 AB, 辺 AC の中点をそれぞれ M, N とする。
このとき、次の(1)～(3)に答えよ。

(1) 線分 MN の長さは何 cm か。

(2) 三角すい NMDE の体積は何 cm^3 か。

(3) 図3のように、点 M から $\triangle NDE$ にひいた垂線と $\triangle NDE$ との交点を H とする。このとき、線分 MH の長さは何 cm か。

図1

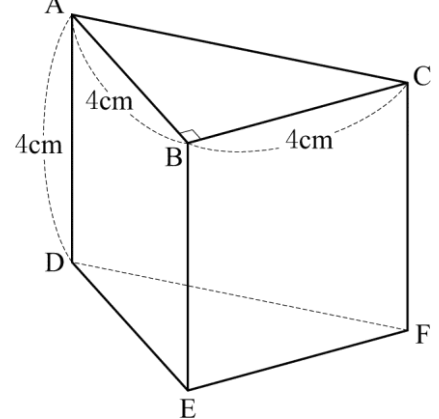


図2

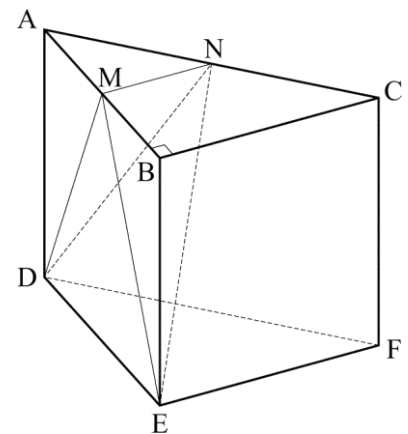
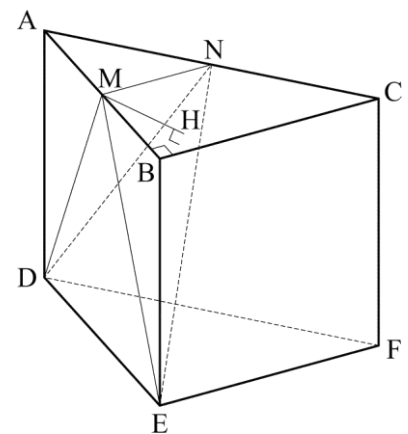


図3



解答欄

問1	本	
問2	cm^3	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^3
	(3)	cm

解答

問1 3本

問2 32 cm^3

問3

(1) 2 cm

(2) $\frac{16}{3} \text{ cm}^3$

(3) $\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$

解説

問1

辺 AB とねじれの位置にある辺は FC, EF, DF の 3 本

問2

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = 32 \text{ cm}^3$$

問3

(1)

M, N は辺 AB, AC の中点であるから

$$\text{中点連結定理により } MN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm}$$

(2)

三角すい NMDE において底面を $\triangle MDE$, 高さを MN にとると

$$\text{体積は } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 2 = \frac{16}{3} \text{ cm}^3$$

(3)

$$ME = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad NE^2 = (2\sqrt{5})^2 + 2^2 = 24 \quad NE = 2\sqrt{6}$$

N から辺 DE に下ろした垂線 NP の長さは

$$NP^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2^2 = 20$$

$$NP = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle NDE \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$MH = x$ とおくと

$$\frac{1}{3} \times 4\sqrt{5} \times x = \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

【問 25】

図1は、底面の半径が 4 cm、高さが 4 cm の円柱である。図2は、底面の半径が 4 cm、体積が図1の円柱と同じ円すいであり、頂点を A、底面の円の中心を B とする。また、底面と線分 AB は垂直に交わっている。図3は、半径 5 cm の球を、中心 O を通る平面で切ってきた半球の形をした容器である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、円周率は π とし、図3の容器の厚さは考えないものとする。

(熊本県 2016 年度)

図1

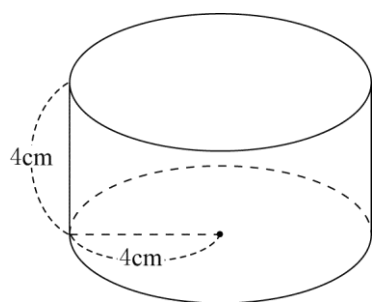


図2

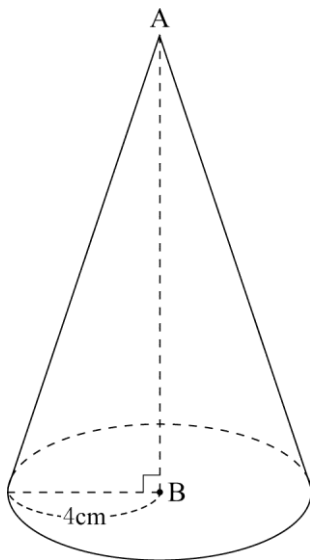
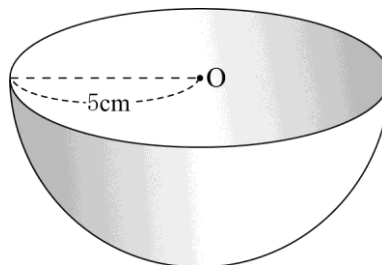


図3



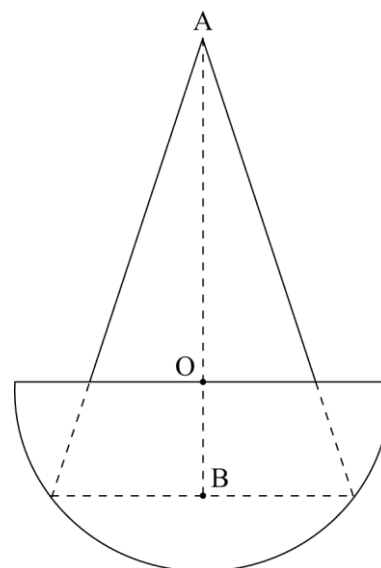
問1 図1の円柱の体積を求めなさい。

問2 図2の円すいの高さ AB を求めなさい。

問3 図3の半球の形をした容器の中に図2の円すいを、円すいの底面が半球の切り口と平行になるように置く。右下の図4は、このときの立面図である。

(1) 線分 OB の長さを求めなさい。

(2) 図4において、図2の円すいを半球の切り口よりも上側の部分と下側の部分に分けると、下側の部分の体積を求めなさい。



解答欄

問1	cm^3	
問2	cm	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^3

解答

問1 $64\pi \text{ cm}^3$

問2 12 cm

問3

(1) 3 cm

(2) $37\pi \text{ cm}^3$

解説

問1

円柱の体積は $\pi \times 4^2 \times 4 = 64\pi \text{ cm}^3$

問2

円すいの高さ AB を $x \text{ cm}$ とおくと

$$\frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times x = \pi \times 4^3$$

$$x = 12 \text{ cm}$$

問3

(1)

図4において円すいの底面の左側と球の接するところを C とおくと

OC は球の半径なので $OC = 5 \text{ cm}$, $CB = 4 \text{ cm}$ なので $3:4:5$ の直角三角形を考え $OB = 3 \text{ cm}$

(2)

上側にある円すいは全体の円すいと比べると

高さが $12 - 3 = 9 \text{ cm}$ なので

辺の比は $9:12 = 3:4$

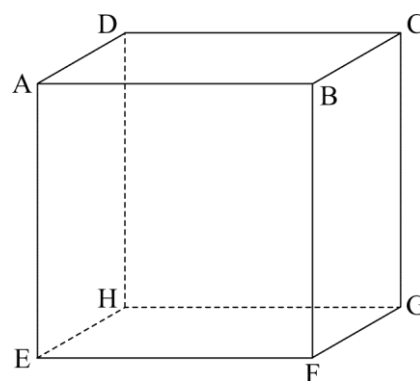
したがって上側の円すいの体積は $64\pi \times \frac{3^3}{4^3} = 27\pi \text{ cm}^3$

よって求める下側の部分の体積は $64\pi - 27\pi = 37\pi \text{ cm}^3$

【問 26】

右の図のように、1 辺の長さが 4 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。
次の問1～問3に答えなさい。

(大分県 2016 年度)



問1 立方体の 8 つの頂点から異なる 2 点を選び、その点を結んで線分をつくる。できる線分のうち、長さがもっとも長くなるときの線分の長さを求めなさい。また、そのときの線分をすべて答えなさい。

問2 立方体の 8 つの頂点から異なる 3 点を選び、その点を結んで三角形をつくる。できる三角形のうち、面積がもっとも大きくなるときの三角形の面積を求めなさい。

問3 立方体の 8 つの頂点から、次の[ア], [イ]のようにして異なる 4 点を選び、その点を結んで三角すいをつくる。

[ア](2)で考えた面積がもっとも大きくなる場合の三角形の頂点を 3 点選ぶ。

[イ][ア]以外の 5 つの頂点から 1 点を選ぶ。

このときできる三角すいのうち、体積がもっとも大きくなるときの三角すいの体積を求めなさい。

解答欄

問1	長さ	cm
	線分	
問2		cm^2
問3		cm^3

解答

問1

長さ $4\sqrt{3}$ cm

線分 AG, BH, CE, DF

問2 $8\sqrt{3}$ cm²

問3 $\frac{64}{3}$ cm³

解説

問1

2 点を結んでできる線分でもっとも長いものの 1 つは $AG = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$ cm で
もっとも長い線分は AG, BH, CE, DF

問2

面積がもっとも大きい三角形の 1 つは△AFC である。

△AFC は

1 辺の長さが $4\sqrt{2}$ cm の正三角形で

A から辺 FC へ垂線 AH をひくと

$AH^2 = (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 24$ より

$AH = 2\sqrt{6}$ cm であるから

$$\triangle AFC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

問3

[ア]で△AFC を選ぶと三角すい H-AFC の体積がもっとも大きくなる。

求める体積は立方体から三角すい H-AEF の体積の 4 倍をひいたものなので

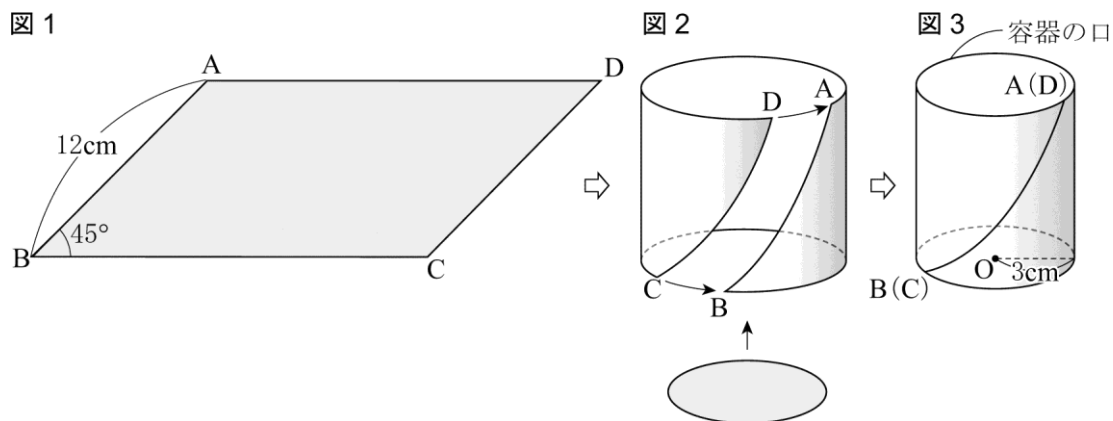
$$4^3 - \left(\frac{1}{3} \times 8 \times 4 \right) \times 4 = \frac{64}{3} \text{ cm}^3$$

【問 27】

図1のような、 $AB=12\text{ cm}$ 、 $\angle ABC=45^\circ$ の平行四辺形 $ABCD$ の紙がある。この紙を図2のように、辺 AB と辺 DC が重なるようにまるめ、円の形の紙を底面になるようにはりつけて、図3のような円柱の形の容器をつくる。

この容器において、底面の円 O の半径が 3 cm のとき、下の問1～問4に答えなさい。ただし、円周率は π とし、紙の厚さは考えないものとする。

(宮崎県 2016 年度)



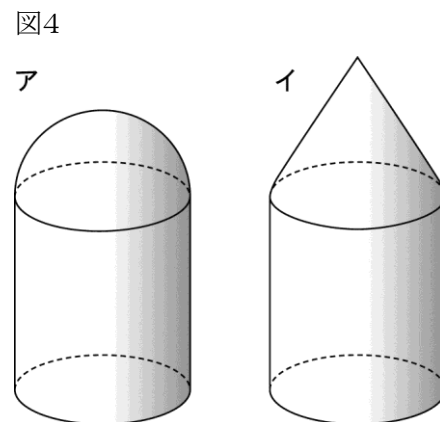
問1 図1の平行四辺形 $ABCD$ において、 A から辺 BC に垂線をひき、辺 BC との交点を E とする。線分 AE の長さを求めなさい。

問2 図3の容器の側面積を求めなさい。

問3 図4は図3の容器を2つ用意し、容器の口の部分にぴったりと重なる半球と円錐を、それぞれの容器にはりつけて、2つの立体ア、イをつくったものである。

アの体積がイの体積より、 $6\pi\text{ cm}^3$ 大きいとき、アとイの表面積は、どちらがどれだけ大きいか、次の の(①)にはア、イのどちらかを、(②)には当てはまる値を入れなさい。

(①)の表面積の方が、(②) cm^2 大きい。



問4 図5のような、底面が長方形 $QRST$ で、 $PQ=PR=PS=PT$ の四角錐がある。図6は、この四角錐を、図3の容器に入れたものである。このとき、四角錐の頂点 Q, R は底面の円周上に、頂点 S, T は容器の口の円周上にそれぞれあり、頂点 P は容器の側面の内側に、ぴったりとくっついた。

$\angle QOR = 120^\circ$ のとき、この四角錐の体積を求めなさい。

図5

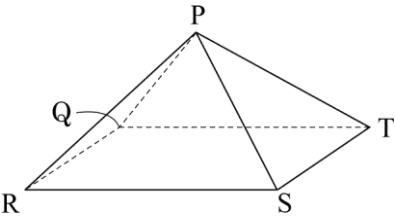
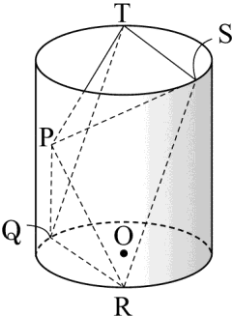
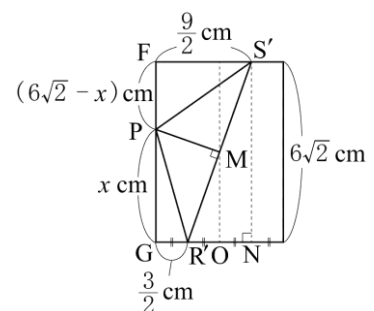


図6



解答欄

問1	cm	
問2	cm ²	
問3	①	
	②	
問4	cm ³	



【問 28】

鉄でできた円錐の形をしたおもりがある。図1のようにおもりを倒し、すべらないように平面上を転がしたところ、おもりは5回転して半径10 cmの円をちょうど3周した。このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(沖縄県 2016 年度)

図1

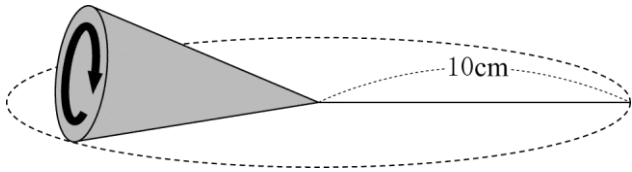
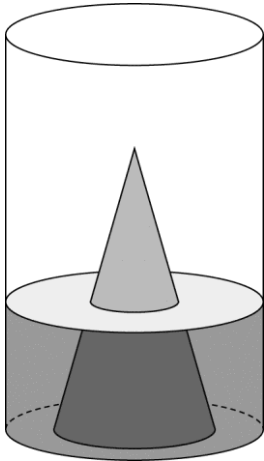


図2



問1 半径10 cmの円の円周の長さを求めなさい。

問2 このおもりの底面の半径を求めなさい。

問3 水が入っている円柱の形をした水そうがあり、水の高さは2 cmである。ここに図1のおもりを図2のように入れると、水の高さが最初の高さの2倍になった。この水そうの底面の半径を求めなさい。ただし、水そうの厚みは考えないものとする。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm

解答

問1 20π cm

問2 6 cm

問3 $\sqrt{42}$ cm

解説

問1

$$2\pi \times 10 = 20\pi \text{ cm}$$

問2

おもりの底面の半径を r とすると

$$2\pi r \times 5 = 20\pi \times 3$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

問3

おもりの水面以下の体積と水の高さが 2cm 上がった分の体積は同じである。

水面の高さは 4 cm

$$\text{おもりの高さは三平方の定理により } \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

水面はおもりの高さのちょうど $\frac{1}{2}$ のところなので

$$\text{水面以下のおもりの体積は } \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right\} = 84\pi \text{ cm}^3$$

よって水そうの底面の半径を r とすると

$$2\pi r^2 = 84\pi$$

$$r^2 = 42$$

$r > 0$ より

$$r = \sqrt{42} \text{ cm}$$