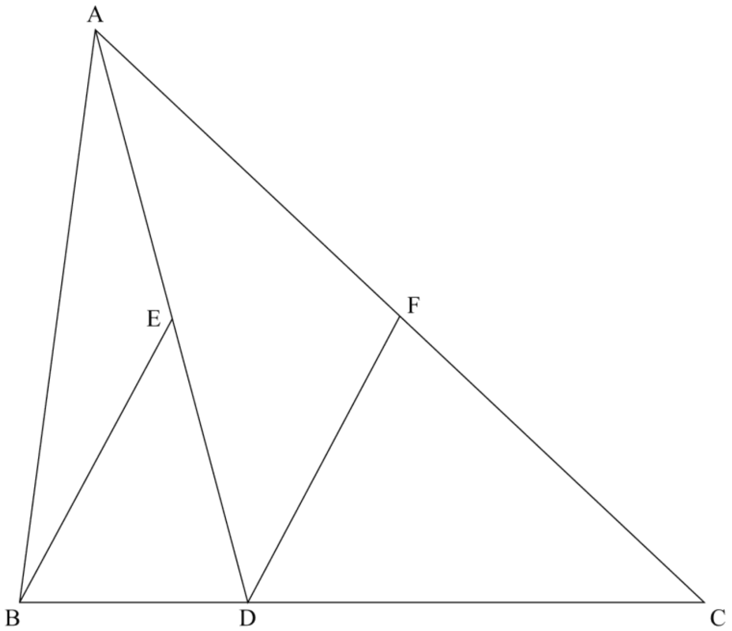
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2016 年度出題】

【問 1】

下の図のように，△ABC の辺 BC 上に BD : DC＝1 : 2 となる点 D をとる。また，線分 AD，辺 AC の中点をそれぞれ E，F とする。

このとき，BE＝DF となることを証明しなさい。

（福島県　2016 年度）



解答欄

〔証明〕

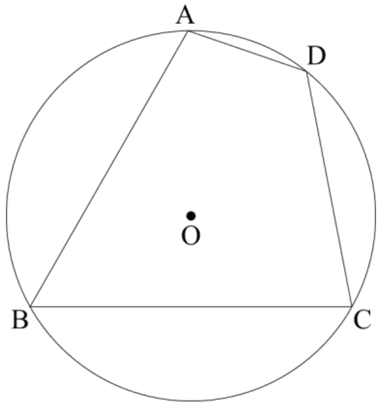
解答
〔証明〕
(例1)
線分 EF をひく。
BD:DC＝1:2 より
BD＝$\frac{1}{2}$DC…①
△ADC において
E, F はそれぞれ AD, AC の中点であるから
中点連結定理より
EF＝$\frac{1}{2}$DC…②
EF // DC…③
①, ②より
BD＝EF…④
③より
BD // EF…⑤
④, ⑤より
1 組の対辺が平行でその長さが等しいから
四角形 BDFE は平行四辺形である。
平行四辺形の対辺は等しいから
BE＝DF
(例2)
線分 EF をひく。
△BDE と△FED において
DE は共通…①
BD:DC＝1:2 より
BD＝$\frac{1}{2}$DC…②
△ADC において
E, F はそれぞれ AD, AC の中点であるから
中点連結定理より
EF＝$\frac{1}{2}$DC…③
EF // DC…④
②, ③より
BD＝FE…⑤
④より
BD // EF であり平行線の錯角は等しいから
∠BDE＝∠FED…⑥
①, ⑤, ⑥より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△BDE≡△FED
したがって BE＝DF
解説
BE＝DF を示すので
四角形 BEFD が平行四辺形であることを示せればよい。
E と F を結ぶ。
EF // DC で EF＝$\frac{1}{2}$DC
また条件より BD＝$\frac{1}{2}$DC
これらより BD＝EF かつ BD // EF が言えるので
四角形 BEFD は平行四辺形となる。

【問 2】

図1のように，四角形 ABCD の 4 点 A，B，C，D は点 O を中心とする円周上にあるものとします。次の問1，問2に答えなさい。

（滋賀県　2016 年度）

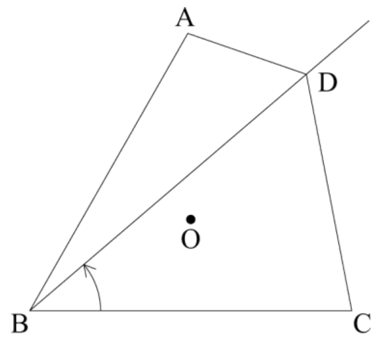
図1



問1 図2のように，四角形 ABCD を，点 B を回転の中心として時計の針の回転と反対の向きに，辺 BC が半直線 BD に重なるまで回転移動させます。点 A が移動した後の点を P とするとき，線分 PB をコンパスと定規を使って作図しなさい。

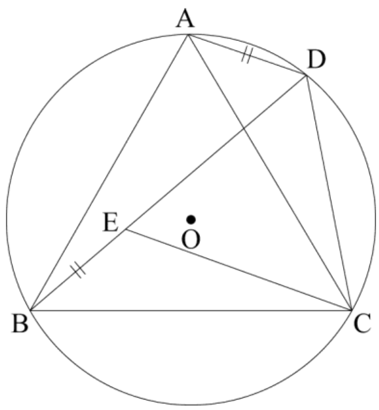
ただし，作図に使った線は消さないこと。

図2



問2 図3において，AB＝BC＝CA のとき，線分 BD 上に AD＝BE となる点 E をとります。次の(1)，(2)の各問いに答えなさい。

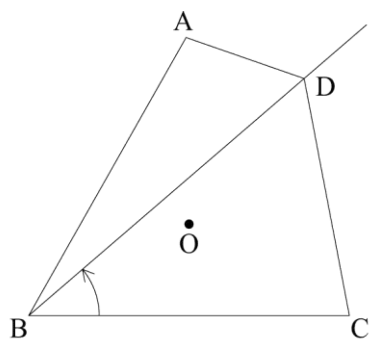
図3

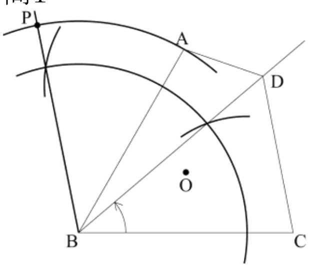


(1) OA＝OB＝OC＝a とするとき，△ABC の面積を a を用いた式で表しなさい。

(2) △DEC が正三角形であることを証明しなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td></td></tr>
</table>

解答
問1


問2
(1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$
(2)
△DAC と△EBC について
仮定より
AD＝BE…①
AC＝BC…②
弧 CD に対する円周角は等しいので
∠CAD＝∠CBD
ゆえに∠DAC＝∠EBC…③
①, ②, ③より
2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△DAC≡△EBC
合同な図形の対応する辺は等しいから
CD＝CE…④
よって△CDE は二等辺三角形であり 2 つの底角は等しいので
∠CDE＝∠CED…⑤
また弧 BC に対する円周角は等しいので
∠BDC＝∠BAC＝60°…⑥
⑤, ⑥より
∠CDE＝∠CED＝60°
したがって∠DCE＝60° であり
∠DCE＝∠DEC
2 つの角が等しいので
△DEC は二等辺三角形である。
よって DE＝DC…⑦
④, ⑦より
DE＝EC＝CD となる。
ゆえに△DEC は正三角形である。

解説
問1
円において長さの同じ弧の中心角は等しい。
このことを用いて∠CBDを∠ABPになるようにまず作図する。
そのためにBC, BD, BAと交わる円をBを中心にかき
線分との交点をP, Q, RとしてPQの長さと同じものをRを中心にかく。
回転移動では線分の長さは変わらないのでBを中心に半径BAの円をかく。
問2
(1)
Oと頂点A, B, Cを結ぶと3つの合同な三角形ができる。
Oから辺BCへ垂線OHを下ろすと
△OBHは辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の三角形となるので

$\mathrm{OH}=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{BH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\mathrm{BC}=\sqrt{3}\,a$

よって△ABCの面積は $3\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\,a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

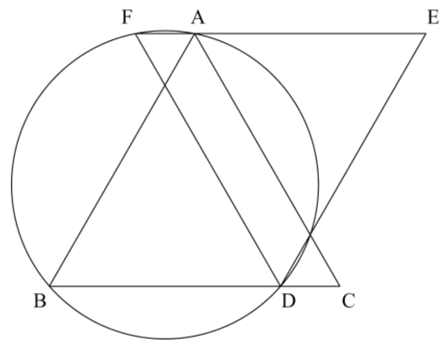
(2)
△ADCと△BCEは
AD＝BE
同じ正三角形の辺により
AC＝BC
また$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$とする円周角により∠DAC＝∠EBC
したがって△ADC≡△BCE
よってCD＝CE
また$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$の円周角より∠BAC＝∠EDC＝60°
△CDEはCD＝CEの二等辺三角形なので∠DEC＝60°
以上により正三角形を証明できる。

【問 3】

1 辺が 10 cm の 2 つの正三角形△ABC と△DEF がある。図のように，点 A が辺 FE 上，点 D が辺 BC 上にあり，BD＝8 cm，FE // BC となるように△ABC と△DEF を重ね，3 点 A，F，D を通る円をかいた。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県　2016 年度）



問1 四角形 FDCA が平行四辺形であることを次のように証明した。

$\boxed{\text{(i)}}$ ～ $\boxed{\text{(iii)}}$ にあてはまるものを，あとのア～キからそれぞれ 1 つ選んでその符号を書き，この証明を完成させなさい。

＜証明＞

仮定から，　FA // DC…①

平行線の $\boxed{\text{(i)}}$ は等しいので，①から　∠AFD＝∠FDB＝60°　…②

②と∠ACB＝60°　より，　∠FDB＝∠ACB…③

③より，$\boxed{\text{(ii)}}$ が等しいので，　FD // AC…④

①，④より，$\boxed{\text{(iii)}}$ から，四角形 FDCA は平行四辺形である。

ア　対頂角	イ　同位角	ウ　錯角
エ　2 組の対辺がそれぞれ平行である		オ　2 組の対辺がそれぞれ等しい
カ　2 組の対角がそれぞれ等しい		キ　1 組の対辺が平行でその長さが等しい

問2 AD の長さは何 cm か，求めなさい。

問3 図の円の半径は何 cm か，求めなさい。

問4 図の円周上に，点 G を線分 DG がこの円の直径となるようにとり，AB と DG の交点を H とする。また，点 I を△GDI が正三角形となるように，直線 GD について点 B と反対側にとる。

(1) △GHA の面積は△HBD の面積の何倍か，求めなさい。

(2) △ABD と△GDI の重なった部分の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

解答欄

問1	(ｉ)	
	(ii)	
	(iii)	
問2	cm	
問3	cm	
問4	(1)	倍
	(2)	cm^2

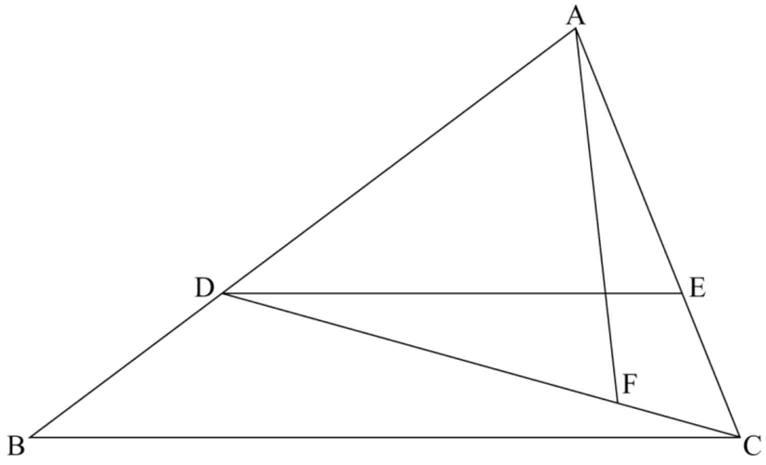
解答
問1
(ｉ) ウ
(ii) イ
(iii) エ
問2　$2\sqrt{21}$ cm
問3　$2\sqrt{7}$ cm
問4
(1)　$\frac{7}{16}$ 倍
(2)　$\frac{28\sqrt{3}}{3}$ cm^2

解説
問2
点Aから辺BDに垂線ATを下ろすと△ABTは辺の比が$1:2:\sqrt{3}$の三角形であるので$AT=5\sqrt{3}$
よってADは三平方の定理より
$AD^2=(5\sqrt{3})^2+3^2=84$
$AD=2\sqrt{21}$ cm
問3
BDとFDのそれぞれの垂直二等分線の交点が円の中心Oとなる。
Oを通りBDの垂直二等分線とFA, AB, BDとの交点をP, Q, Rとし
Oを通るFDの垂直二等分線とFDとの交点をUとする。
△PFQも△OUQも$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形で
$FQ=2$, $QU=3$より
$PQ=\sqrt{3}$
$OQ=2\sqrt{3}$
$OP=3\sqrt{3}$
$PA=1$
△OAPに三平方の定理を用いると
$OA^2=(3\sqrt{3})^2+1^2=28$
よって半径は$OA=2\sqrt{7}$ cm
問4
(1)
円周角, 対頂角が等しいことから
△GHA∽△HBD
△AGDは$\angle A=90^\circ$の直角三角形なので
三平方の定理を用いると
$AG^2=GD^2-AD^2=(4\sqrt{7})^2-(2\sqrt{21})^2=28$
$AG=2\sqrt{7}$
面積は相似比の2乗の比になるので$\dfrac{(2\sqrt{7})^2}{8^2}=\dfrac{7}{16}$倍
(2)
△GDIが正三角形なので$\angle AGD=60^\circ$, $\angle ADG=30^\circ$
Hから辺ADへ垂線HXを下ろす。
$HD=x$とおくと(1)より$AH=\dfrac{2\sqrt{7}}{8}x=\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$
また△HXDより$HX=\dfrac{x}{2}$, $XD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$
△AHXに三平方の定理を用いると
$AX^2=AH^2-HX^2=\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}x\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{3}{16}x^2$
$AX=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$
$AX+XD=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=2\sqrt{21}$
$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}\,x=2\sqrt{21}$
$x=\dfrac{8}{3}\sqrt{7}$
したがって$HX=\dfrac{4}{3}\sqrt{7}$
よって△AHDの面積は$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{7}\times2\sqrt{21}=\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ cm^2

【問 4】

下の図のように，△ABC の辺 AB 上に点 D，辺 AC 上に点 E があり，DE // BC です。また，線分 CD 上に点 F があり，∠AFD＝∠ACB です。このとき，4 点 A，D，F，E は 1 つの円周上にあることを証明しなさい。

（広島県　2016 年度）



解答欄

〔仮定〕図において，DE // BC，∠AFD＝∠ACB

〔結論〕4 点 A，D，F，E は 1 つの円周上にある。

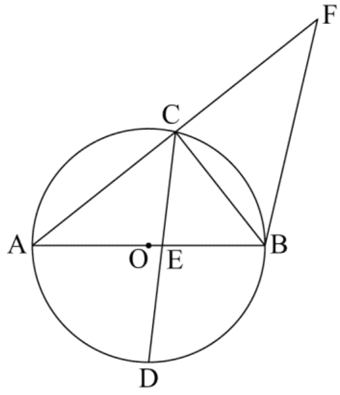
〔証明〕

解答
〔仮定〕 図において，DE // BC，∠AFD＝∠ACB
〔結論〕 4 点 A，D，F，E は 1 つの円周上にある。
〔証明〕
2 点 E, F が直線 AD について同じ側にある。…①
平行線の同位角は等しいから
∠AED＝∠ACB…②
∠AFD＝∠ACB であることと②より
∠AED＝∠AFD…③
①，③より
円周角の定理の逆から 4 点 A，D，F，E は 1 つの円周上にある。
解説
仮定と，平行線の同位角は等しいことより円周角の定理の逆を用いる。

【問 5】

下の図のように，線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の周上に点 C をとり，三角形 ABC をつくる。∠ACB の二等分線を引き，∠ACB の二等分線と円 O の交点のうち，点 C 以外の交点を D とし，線分 CD と線分 AB の交点を E とする。また，線分 AC を点 C の方向へ延長し，その延長線上に CD // FB となるように点 F をとる。このとき，次の問1・問2に答えなさい。

（高知県　2016 年度）



問1　三角形 CBF は二等辺三角形であることを証明せよ。

問2　AB＝10 cm，AC＝8 cm とするとき，次の(1)・(2)の問いに答えよ。

(1) 線分 AE の長さを求めよ。

(2) 線分 DE の長さを求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕 したがって三角形 CBF は二等辺三角形である。	
問2	(1)	cm
	(2)	cm

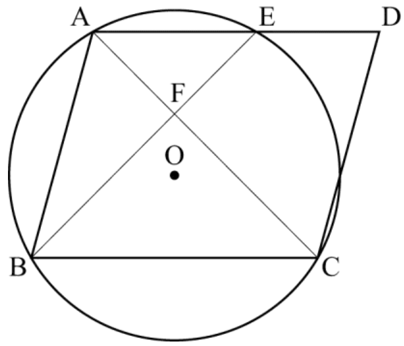
解答
問1
〔証明〕
CD // FB より同位角は等しいから
∠CFB＝∠ACE…①
CD // FB より錯角は等しいから
∠CBF＝∠BCE…②
また線分 CE は∠ACB の二等分線であるから
∠ACE＝∠BCE…③
①, ②, ③より
∠CFB＝∠CBF…④
④より三角形 CBF は 2 つの角が等しい。
したがって三角形 CBF は二等辺三角形である。
問2
(1) $\frac{40}{7}$ cm
(2) $\frac{25}{7}\sqrt{2}$ cm
解説
問1
CD // FB により同位角が等しいことより∠ACE＝∠CFB…①
また錯角が等しいことより∠BCE＝∠CBF…②
CE が∠ACB の二等分線であるから∠ACE＝∠BCE…③
①, ②, ③より
∠CFB＝∠CBF
よって△CBF は二等辺三角形である。
問2
(1)
AB が直径なので
∠ACB＝90°
△ABC に三平方の定理を用いると C
B＝CF＝$\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$
CE // FB より
AE : EB＝AC : CF＝8 : 6＝4 : 3
よって AE＝$\frac{4}{4+3}\times 10=\frac{40}{7}$ cm
(2)
(1)より EB＝$10-\frac{40}{7}=\frac{30}{7}$
△CBF は問1より直角二等辺三角形であるから
BF＝$6\sqrt{2}$
CD // FB より
CE＝$\frac{4}{7}\times 6\sqrt{2}=\frac{24\sqrt{2}}{7}$
△AEC∽△DEB で
相似比は$\frac{24\sqrt{2}}{7}:\frac{30}{7}=4\sqrt{2}:5$
AE : ED＝$4\sqrt{2}:5$
ED＝$\dfrac{\frac{40}{7}\times 5}{4\sqrt{2}}=\frac{50}{7\sqrt{2}}=\frac{25}{7}\sqrt{2}$ cm

【問 6】

右の図1は，平行四辺形 ABCD と，3 つの頂点 A, B, C を通る円 O である。辺 AD と円 O との交点を E，対角線 AC と線分 BE との交点を F とする。$\angle BAC = 60^\circ$，$AC \perp BE$ であるとき，次の問1～問3に答えなさい。

（鹿児島県　2016 年度）

図1



問1　$\angle ACD$ の大きさは何度か。

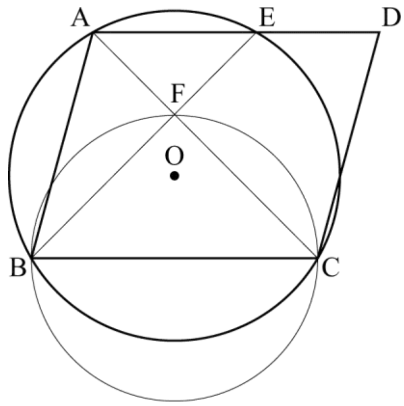
問2　$\triangle BCF$ が直角二等辺三角形であることを証明せよ。

問3　$BC = 2\sqrt{3}$ cm とする。次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1) 円 O の半径は何 cm か。

(2) 右の図2は，図1において 3 点 B, C, F を通る円をかいたものである。2 つの円が重なった部分の面積は何 cm^2 か。ただし，円周率は π とし，求め方や計算過程も書くこと。

図2



解答欄

問1	度		
問2	〔証明〕		
問3	(1)	cm	
	(2)	〔求め方や計算〕 答　　　　　　cm^2	

解答

問1　60度

問2

〔証明〕

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいから

$\angle AEF = \angle BCF$…①

平行線の錯角は等しいから

$\angle AEF = \angle CBF$…②

①, ②より$\angle BCF = \angle CBF$

底角が等しいから△BCFは二等辺三角形

また$AC \perp BE$より$\angle BFC = 90^\circ$

よって△BCFは直角二等辺三角形である。

問3

(1)　2 cm

(2)

〔求め方や計算〕

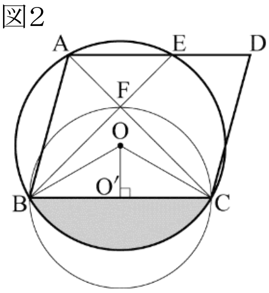
3点B, C, Fを通る円をO′とする。

△BCFが$\angle BFC = 90^\circ$の直角二等辺三角形より

円O′の中心は辺BCの中点であるから

円O′の半径は$\frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$ cm

図2



2つの円O，O′が重なる部分は点Aを含まない$\overset{\frown}{BC}$と弦BCで囲まれた部分と円O′の上半分部分を合わせたものである。

△OBCは二等辺三角形で$\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$

また$OO' \perp BC$であるから△OBO′において$\angle BOO' = 60^\circ$

よって△OBO′は3つの角が30°, 60°, 90°の直角三角形より

$OO' = \frac{1}{\sqrt{3}}BO' = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = 1$ cm

円Oの半径は2 cmより点Aを含まない$\overset{\frown}{BC}$と弦BCで囲まれた部分の面積は

おうぎ形OBC－△OBC

$= \pi 2^2 \times \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1$

$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ cm^2 …①

円O′の上半分部分の面積は

$\pi(\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\pi$ cm^2 …②

①, ②より

$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi = \frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{6}$ cm^2

答　$\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{6}$ cm^2

解説
問1
AB // DC なので錯角は等しいので∠ACD＝60°
問2
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角は等しいので
∠AEF＝∠FCB…①
AE // BC より錯角が等しいので
∠AEF＝∠CBF…②
①，②より
∠FCB＝∠FBC
よって△BCF は二等辺三角形。
問3
(1)
O と B，C を線で結び O から辺 BC へ垂線 BH を下ろす。
円周角の定理より∠BOC＝2∠BAC＝120°
したがって∠BOH＝60°
△OBH は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形で
BH＝$\sqrt{3}$ より
半径は 2 cm
(2)
B，F，C を通る円の中心をO′とすると
∠BFC＝90° により
BC の中点がO′であり
(1)における H の点である。
したがって円O′の半径は $\sqrt{3}$，OO′＝1 であるから
点 A を含まない$\overset{\frown}{BC}$と弦 BC で囲まれた部分の面積は
おうぎ形 OBC－△OBC＝$\pi\times 2^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ cm^2
円O′の上半分の面積は$\pi\times(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\pi$ cm^2
よって求める面積は$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{3}{2}\pi=\frac{17\pi-6\sqrt{3}}{6}$ cm^2