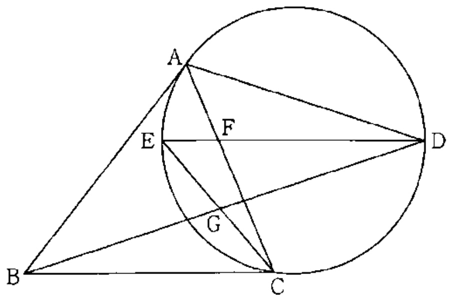
5. 合同・相似以外の証明・その他複合問題【2008 年度出題】

【問 1】

図のように，2 つの△ABC と△ABD があり，BC＝AD とします。3 点 A，C，D を通る円と，∠ADB の二等分線との交点を E とします。線分 AC と DE の交点を F とし，線分 BD と CE の交点を G とします。

次の問いに答えなさい。

（北海道 2008 年度）



問1．△ABC が AB＝BC の二等辺三角形で∠ABD＝30° のとき，∠BAD の大きさを求めなさい。

問2．∠CED＝∠ECB のとき AF＝CG を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	証明

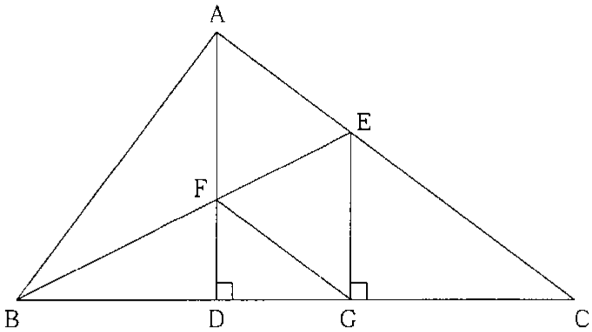
解答
問1　120 度
問2
証明
△AFD と△CGB において
AD＝CB(仮定)…①
∠CAD＝∠CED(円周角)
∠CED＝∠ECB(仮定)から
∠DAF＝∠BCG…②
∠CED＝∠ECB から ED ∥BC
よって∠GDF＝∠GBC…③
③と∠FDA＝∠GDF(仮定)から
∠FDA＝∠GBC…④
①, ②, ④から
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△AFD≡△CGB
したがって AF＝CG
解説
問1
AB＝BC のとき BC＝AD より AB＝AD
よって△ABD は二等辺三角形になるから
∠ADB＝∠ABD＝30°
∠BAD＝180°－30°×2＝120°

【問 2】

図において，△ABC は，∠BAC＝90°，AB＝3cm，AC＝4cm である。点 A から BC にひいた垂線と BC との交点を D，∠ABC の二等分線と AC，AD との交点をそれぞれ E，F とし，点 E から BC にひいた垂線と BC との交点を G とする。

このとき，あとの問いに答えなさい。

（山形県 2008 年度）



問1．AD の長さを求めなさい。

問2．EA＝EG であることを証明しなさい。

問3．DG の長さを求めなさい。

問4．△DFG の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	証明
問3	cm
問4	cm^2

解答

問1　$\dfrac{12}{5}$ cm

問2

証明

△ABEと△GBEにおいて

仮定より

∠BAE＝∠BGE＝90°　…①

BEは∠ABCの二等分線だから

∠ABE＝∠GBE…②

また共通だから

BE＝BE…③

①, ②, ③より

直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので

△ABE≡△GBE

よってEA＝EG

問3　$\dfrac{6}{5}$ cm

問4　$\dfrac{27}{50}$ cm^2

解説

問1

△ABC において

三平方の定理より $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$

△ABC の面積に注目して

$\frac{1}{2}x AB\times AC=\frac{1}{2}\times BC\times AD$ より

$AB\times AC=BC\times AD$　$3\times4=5\times AD$　$AD=\frac{12}{5}$ cm

問3

$EA=EG=x$ cm とおく。

△CAD で

EG∥AD より

$EG:AD=CE:CA$

$x:\frac{12}{5}=(4-x):4$

$\frac{12}{5}(4-x)=4x$

$x=\frac{3}{2}$

$BG=BA=3$ より $CG=5-3=2$

$CG:DG=CE:AE$

$2:DG=\left(4-\frac{3}{2}\right):\frac{3}{2}$

$5DG=6$　$DG=\frac{6}{5}$ cm

問4

$BD=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$

△BGE で DF∥GE より

$DF:GE=BD:BG$

$DF:\frac{3}{2}=\frac{9}{5}:3$

$3DF=\frac{3}{2}\times\frac{9}{5}$

$DF=\frac{9}{10}$

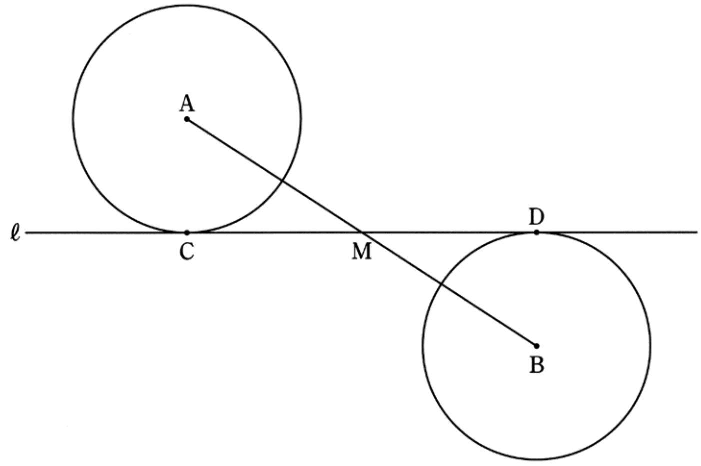
よって $\triangle DFG=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{27}{50}$ cm²

【問 3】

図のように，半径の等しい 2 つの円 A，B があり，直線ℓ にそれぞれ点 C，D で接している。線分 AB とℓ との交点を M とする。

このとき，AM＝BM であることを証明しなさい。

（福島県　2008 年度）



解答欄

証明

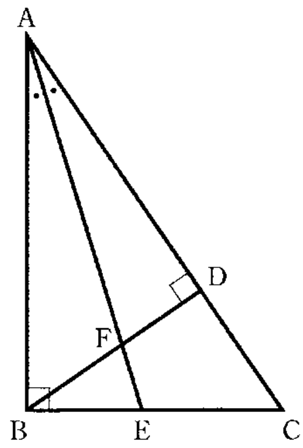
解答
証明
△ACM と△BDM において
2 つの円の半径が等しいから
AC＝BD…(1)
円の接線は接点を通る半径に垂直であるから
∠ACM＝∠BDM＝90°…(2)
対頂角は等しいから
∠AMC＝∠BMD…(3)
三角形の内角の和は 180° であり
(2), (3)より残りの角も等しいから
∠CAM＝∠DBM…(4)
(1), (2), (4)より
1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから
△ACM≡△BDM
合同な三角形では対応する辺の長さが等しいから
AM＝BM
解説
対応する辺が AM と BM になる 2 つの三角形△ACM と△BDM の合同を証明して AM＝BM を示す。

【問 4】

図のように，∠ABC＝90°の直角三角形 ABC において，頂点 B から辺 AC に垂線 BD を引く。また，∠BAC の二等分線と辺 BC，BD との交点をそれぞれ E，F とする。

このとき，BE＝BF であることを証明しなさい。

（栃木県 2008 年度）



解答欄

証明

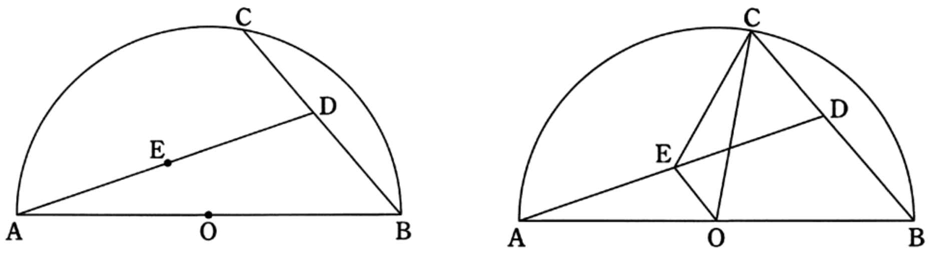
解答
証明
△ABE と△ADF で
仮定より
∠BAE＝∠DAF…①
∠ABE＝∠ADF＝90°…②
①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABE∽△ADF
相似な三角形では，対応する角が等しいから
∠AEB＝∠AFD…③
また対頂角は等しいから
∠AFD＝∠BFE…④
③，④より
∠BEF＝∠BFE
よって 2 角が等しいから
△BEF は二等辺三角形である。
したがって BE＝BF

【問 5】

図のように，線分 AB を直径とする半円があり，点 O は線分 AB の中点である。2 点 A，B と異なる，$\overset{\frown}{AB}$上の点を C とし，2 点 B，C と異なる，線分 BC 上の点を D とする。また，線分 AD の中点を E とする。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（千葉県 2008 年度）



問1．点 C と点 E を結ぶとき，△EDC は二等辺三角形となる。下の $\boxed{\quad}$ の中は，△EDC が二等辺三角形となる証明を途中まで示してある。

$\boxed{\quad}$ の中の $\boxed{(a)}$ ，$\boxed{(b)}$ の中に入る最も適当なものを，語群のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び，符号で答えなさい。また，$\boxed{\quad}$ の中の $\boxed{(c)}$ の中に証明の続きを書き，証明を完成させなさい。ただし，①～⑥に示されている関係を使う場合，番号の①～⑥を用いてもかまわないものとする。

証明
点 C と点 O，点 E と点 O を結ぶ。
△AOE と△COE において，
OE は共通なので，
OE＝OE… ①
半円の半径から，
OA＝OC…②
△ABD において，
仮定から，
AO＝OB…③
AE＝ED…④
③，④より，
$\boxed{(a)}$ から，
OE∥BD…⑤
$\boxed{(b)}$ から，
∠AOE＝∠ABD…⑥
$\boxed{(c)}$
よって，AE＝CE となり，④から
EC＝ED
したがって，
△EDC は二等辺三角形である。

語群

ア　二等辺三角形の底角は等しい
イ　平行線の錯角は等しい
ウ　平行線の同位角は等しい
エ　三平方の定理
オ　円周角の定理
カ　中点連結定理

問2．4 点 O，D，C，E を結び，四角形 ODCE をつくる。四角形 ODCE がひし形になるとき，OA＝a として，このひし形の面積を a を用いて表しなさい。

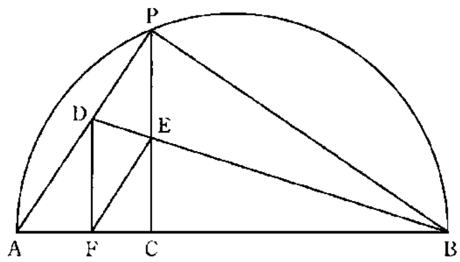
解答欄

<table>
<tr><td rowspan="3">問1</td><td>(a)</td><td></td></tr>
<tr><td>(b)</td><td></td></tr>
<tr><td>(c)</td><td></td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

解答
問1
(a)　カ
(b)　ウ
(c)
半円の半径から OB＝OC より
△OBC は二等辺三角形だから
∠OBC＝∠OCB…⑦
⑤より平行線の錯角は等しいから
∠OCB＝∠COE…⑧
⑥, ⑦, ⑧から
∠AOE＝∠COE…⑨
①, ②, ⑨より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△AOE≡△COE
問2　$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$
解説
問2
四角形 ODCE がひし形のとき
OE＝EC＝CD＝DO
また EC＝ED より
△CED, △OED は正三角形である。
また対角線 OC と ED との交点を H とすると
OC＝OA＝a より CH＝OH＝$\dfrac{a}{2}$
△CEH において
∠CEH＝60° だから
EH＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$CH＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$
よってひし形の面積は
△CEH が 4 つ分だから$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\times\dfrac{a}{2}\times4=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$

【問 6】

図のように，線分 AB を直径とする半円において，弧 AB 上に点 P をとる。点 P から線分 AB にひいた垂線と線分 AB との交点を C，∠PBA の二等分線と線分 PA との交点を D，線分 PC と線分 BD の交点を E とする。また，点 D から線分 AB にひいた垂線と線分 AB との交点を F とし，点 E と点 F を結ぶ。



このとき，四角形 PDFE がひし形であることを，次のように証明した。下の問1，問2に答えなさい。

（石川県 2008 年度）

〔証明〕

△BPD と△BFD において

$\boxed{\quad ア \quad}$ は共通

仮定より∠PBD＝∠FBD

また，AB は直径で，DF⊥AB より

$\boxed{\ イ\ }$＝$\boxed{\ ウ\ }$ ＝90°

よって，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいから

△BPD≡△BFD

エ

問1．$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ にあてはまるものを書きなさい。

問2．$\boxed{エ}$の部分に入る証明の続きを書きなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	エ	証明の続き

解答
問1
ア　BD
イ　∠BPD
ウ　∠BFD
問2
エ
したがって PD＝FD…①
∠PDE＝∠FDE　…②
△PDE と△FDE において
DE は共通…③
①, ②, ③より
2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△PDE≡△FDE
よって PE＝FE　…④
PC⊥AB, DF⊥AB より DF∥PC
平行線の錯角は等しいから
∠FDE＝∠PED…⑤
②, ⑤より
∠PDE＝∠PED
よって
2 角が等しいから△PDE は二等辺三角形となるので
PD＝PE…⑥
①, ④, ⑥より
PD＝FD＝PE＝FE
したがって 4 辺が等しいので
四角形 PDFE はひし形である。
解説
問2
問1より PD＝FD
△PDE≡△FDE より
PE＝FE
△PDE は∠PDE＝∠PED より PD＝PE であることを順に導く。
PD＝FD＝PE＝FE より 4 つの辺が等しいので四角形 PDFE はひし形である。

【問 7】

△ABC は正三角形, D, E はそれぞれ辺 AB, BC 上の点で, AD＝BE である。このとき, ∠BAE＝∠ACD であることを次のように証明したい。$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ をうめて証明を完成せよ。

ただし, D, E は△ABC の頂点上にはないものとする。

（愛知県 2008 年度 A）

証明

△ABE と△CAD で

△ABC は正三角形だから

AB＝$\boxed{\text{ア}}$ …①

∠ABE＝∠$\boxed{\text{イ}}$ ＝60° …②

また, BE＝AD …③

①, ②, ③から

2 辺とその間の角が, それぞれ等しいので

△ABE ≡ △CAD

よって, ∠BAE＝∠ACD

解答欄

ア	
イ	

解答

ア CA

イ CAD

【問 8】

四角形 ABCD で，AD // BC，AD＝BC ならば，四角形 ABCD は平行四辺形であることを次のように証明したい。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ をうめて証明を完成せよ。

（愛知県 2008 年度 B）

(証明)

△ABC と△CDA で

BC＝DA …①

AC＝CA …②

また，AD // BC だから

∠ACB＝∠ $\boxed{ア}$ …③

①，②，③から

2 辺とその間の角が，それぞれ等しいので

△ABC≡△CDA

よって，∠BAC＝∠ $\boxed{イ}$ だから，AB // DC

したがって，2 組の向かいあう辺が，それぞれ平行であるので，四角形 ABCD は平行四辺形である。

解答欄

ア	
イ	

解答
ア CAD
イ DCA

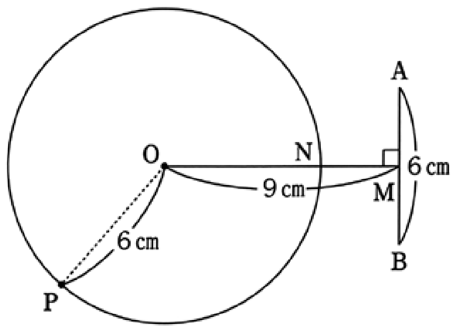
【問 9】

図 1 のように，半径 6 cm の円 O と，その円の外に長さ 6 cm の線分 AB がある。中心 O と線分 AB の中点 M を結んだとき，OM と AB は垂直であり，線分 OM の長さは 9 cm である。また，円 O と線分 OM の交点を N とし，点 P は円 O の周上を動くものとする。

次の問1～問4に答えなさい。

（和歌山県 2008 年度）

図 1



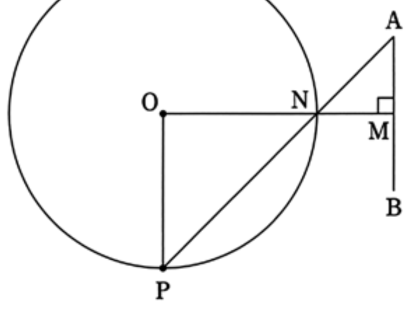
問1. A と N を結ぶとき，AN の長さを求めなさい。

問2. △PAB が二等辺三角形となる P はいくつあるか，求めなさい。

問3. △PAB が直角三角形となるもののうち，面積が最も大きいものについて，その面積を求めなさい。

問4. 図 2 は，3 点 A, N, P が一直線上にあるときのものである。このとき，AN:NP＝1:2 であることを証明しなさい。

図 2



解答欄

問1	AN＝　　　　　　　cm
問2	個
問3	△PAB＝　　　　　　cm^2
問4	証明

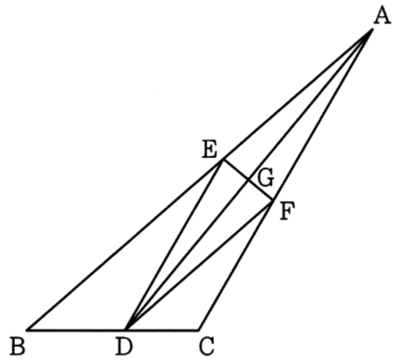
解答
問1　AN＝$3\sqrt{2}$ cm
問2　6 個
問3　△PAB＝27＋$9\sqrt{3}$ cm²
問4
証明
△MNA と△ONP で
△MNA は∠AMN＝90°，MA＝MN の直角二等辺三角形より
∠MNA＝∠MAN＝45°
対頂角は等しいから
∠MNA＝∠ONP＝45° …①
また△ONP は ON＝OP より
二等辺三角形だから
∠OPN＝∠ONP＝45° となり
∠MAN＝∠OPN＝45° …②
よって①，②より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△MNA∽△ONP となる。
ここで MN:ON＝3:6＝1:2 であるから
AN:NP＝1:2 となる。
解説
問2
△PAB が二等辺三角形になるのは AB を底辺とする場合 2 個
AP＝AB＝6 となる場合 2 個
BP＝BA＝6 となる場合 2 個
の計 6 個である。
問3
点 B を通る AB の垂線と円 O とが交わる点のうち B と遠い方の点を P とするとき
△PAB は直角三角形で面積が最も大きくなる場合の1つになる。
このとき O から BP に垂線 OH をひくと
OH＝$\dfrac{6}{2}$＝3，OP＝6 より
PH＝$\sqrt{6^2-3^2}$＝$3\sqrt{3}$
よって△PAB＝$\dfrac{1}{2}$×PB×AB＝$\dfrac{1}{2}$×($3\sqrt{3}$＋9)×6＝27＋$9\sqrt{3}$ cm²

【問 10】

図のような△ABC がある。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D, 線分 AD の垂直二等分線と辺 AB, AC の交点をそれぞれ E, F とし, AD と EF の交点を G とする。

次の問いに答えなさい。

（兵庫県 2008 年度）



問1. 四角形 AEDF がひし形であることを次のように証明した。$\boxed{a}$ には, △AEG と△AFG が合同であることの証明を, $\boxed{b}$, $\boxed{d}$ には, あてはまるものを下の語群のア～オから選びその記号を書きなさい。また, $\boxed{c}$ には, あてはまる平行四辺形になる条件を書き, この証明を完成させなさい。

＜証明＞

△AEG と△AFG において

a △AEG＝△AFG

よって EG＝FG …①

また, 仮定より AG＝ $\boxed{b}$ …②

①, ②より, 四角形 AEDF は $\boxed{\quad c \quad}$ から, 平行四辺形である。

さらに, △AEG≡△AFG より AE＝ $\boxed{d}$

よって, 四角形 AEDF は隣り合う辺の長さが等しい平行四辺形である。

したがって, 4 つの辺の長さがすべて等しいので, 四角形 AEDF はひし形である。

語群　ア AF　イ BD　ウ BE　エ CD　オ DG

問2. DC＝2 cm, CF＝4 cm, ∠C＝120° とする。

(1) △DCF の面積を求めなさい。

(2) 線分 AF の長さを求めなさい。

(3) ひし形 AEDF の面積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="4">問1</td><td>a</td><td colspan="2">△AEG≡△AFG</td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>d</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td>cm^2</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td><td></td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>cm^2</td><td></td></tr>
</table>

解答

問1

a

AG は共通…①

AD は∠A の二等分線だから

∠EAG＝∠FAG…②

EF は AD の垂直二等分線だから

∠AGE＝∠AGF＝90° …③

①, ②, ③より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△AEG≡△AFG

b オ

c 対角線がそれぞれの中点で交わる

d ア

問2

(1) $2\sqrt{3}$ cm^2

(2) $2\sqrt{7}$ cm

(3) $2\sqrt{21}$ cm^2

解説

問2

(1)

F から BC の延長線上に垂線 FH をひく。

△FCH は∠FCH＝60° の直角三角形だから

CH＝$\frac{\mathrm{FC}}{2}=\frac{4}{2}=2$

FH＝$\sqrt{3}$ CH＝$2\sqrt{3}$

よって△DCF＝$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm^2

(2)

△FDH で

三平方の定理より DF＝$\sqrt{(2+2)^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

四角形 AEDF はひし形だから

AF＝DF＝$2\sqrt{7}$ cm

(3)

A から BC の延長線に垂線 AK をひく。

△ACK は∠ACK＝60° の直角三角形だから

CK＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{1}{2}(4+2\sqrt{7})=2+\sqrt{7}$

AK＝$\sqrt{3}$ CK＝$\sqrt{3}(2+\sqrt{7})=2\sqrt{3}+\sqrt{21}$

よって△ADC＝$\frac{1}{2}\times 2\times(2\sqrt{3}+\sqrt{21})=2\sqrt{3}+\sqrt{21}$

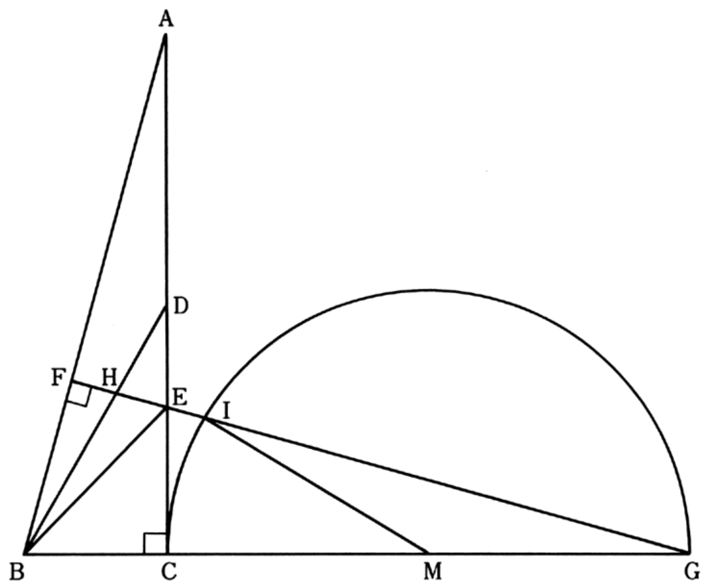
△AFD＝△ADC－△DCF＝$2\sqrt{3}+\sqrt{21}-2\sqrt{3}=\sqrt{21}$

したがってひし形 AEDF の面積は 2△AFD＝$2\sqrt{21}$ cm^2

【問 11】

図のように，∠ACB＝90° の直角三角形 ABC がある。ただし，AC＞BC とする。辺 AC 上に点 D を AD＝BD となるようにとる。また，線分 DC 上に 2 点 D，C と異なる点 E をとる。点 D と点 B，点 E と点 B をそれぞれ結ぶ。点 E を通り，辺 AB に垂直な直線をひき，辺 AB との交点を F，辺 BC を延長した直線との交点を G，線分 BD との交点を H とする。さらに，線分 CG を直径として，点 G と異なる点で線分 FG と交わるような半円をかき，その交点を I とする。線分 CG の中点を M とし，点 M と点 I を結ぶ。このとき，次の問1では指示に従って答え，問2では ［　］ に適当な数を書き入れなさい。

（岡山県　2008 年度）



問1．△DEH が二等辺三角形であることを証明しなさい。

問2．∠ABC＝75°，∠EBC＝45°，BC＝2 cm であるとき，BE＝ (ア) cm，

∠BDC＝ (イ) °，DE＝ (ウ) cm であり，△DEH の面積は (エ) cm^2 である。

また，線分 MG，線分 MI，$\overset{\frown}{GI}$ で囲まれたおうぎ形 MGI の面積は (オ) cm^2 である。

解答欄

<table>
<tr><td rowspan="1">問1</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td rowspan="5">問2</td><td>(ア)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(イ)</td><td>°</td></tr>
<tr><td>(ウ)</td><td>cm</td></tr>
<tr><td>(エ)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(オ)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

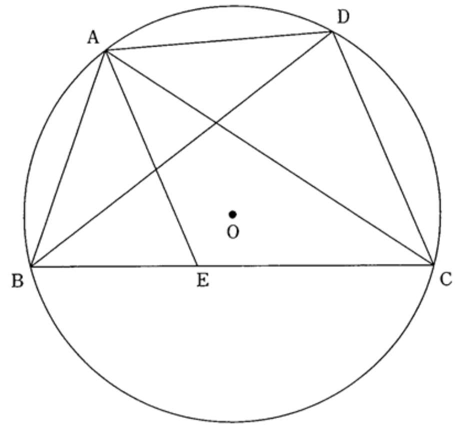
解答
問1
証明
$\triangle$AEFと$\triangle$BHFにおいて
$\triangle$DABは二等辺三角形だから
$\angle$EAF＝$\angle$HBF…(1)
また仮定から
$\angle$AFE＝$\angle$BFH＝90°…(2)
(1), (2)から
2組の角がそれぞれ等しいので
$\triangle$AEF∽$\triangle$BHF…(3)
(3)から
$\angle$AEF＝$\angle$BHF…(4)
また対頂角は等しいから
$\angle$BHF＝$\angle$DHE…(5)
(4), (5)から
$\angle$DHE＝$\angle$DEH…(6)
(6)から
$\triangle$DEHは2つの角が等しいので二等辺三角形である。
問2
(ア) $2\sqrt{2}$ cm
(イ) 30°
(ウ) $2\sqrt{3}-2$ cm
(エ) $4-2\sqrt{3}$ cm^2
(オ) $\dfrac{35+20\sqrt{3}}{12}\pi$ cm^2
解説
問2
(ア)
$\triangle$BCEで$\angle$EBC=45°，$\angle$BCE＝90°よりCE＝BC＝2, BE＝$\sqrt{2}$ BC＝$2\sqrt{2}$ cm
(イ)
$\angle$DEH＝$\angle$DHE＝$\angle$BHF＝$\angle$ABC＝75°　$\angle$BDC＝$\angle$HDE＝180°－75°×2＝30°
(ウ)
$\angle$DBA＝$\angle$DAB＝30°÷2＝15°　$\angle$DBC＝75°－15°＝60°
よって$\triangle$DBCで, DC＝$\sqrt{3}$ BC＝$2\sqrt{3}$，DE＝DC－CE＝$2\sqrt{3}-2$cm
EからDHに垂線EKをひく。
$\triangle$EDKで$\angle$EDK＝30°よりEK＝$\dfrac{1}{2}$DE＝$\sqrt{3}-1$　DH＝DE＝$2\sqrt{3}-2$
(エ)
$\triangle$DEH＝$\dfrac{1}{2}$×DH×EK＝$\dfrac{1}{2}(2\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)$＝3－$2\sqrt{3}$＋1＝4－$2\sqrt{3}$ cm^2
(オ)
AD＝DB＝2BC＝4　AC＝AD＋DC＝4＋$2\sqrt{3}$
$\triangle$ABCと$\triangle$GECにおいて
BC＝EC＝2, $\angle$ACB＝$\angle$GCE＝90°，$\angle$ABC＝$\angle$DEH＝$\angle$GECより
1辺とその両端がそれぞれ等しいので
$\triangle$ABC≡$\triangle$GEC
よって$\angle$EGC＝$\angle$BAC＝15°，GC＝AC＝4＋$2\sqrt{3}$
よっておうぎ形MGIは中心角は180°－15°×2＝150°，半径は$\dfrac{1}{2}(4+2\sqrt{3})$＝2＋$\sqrt{3}$だから
その面積は$\pi\times(2+\sqrt{3})^2\times\dfrac{150}{360}=(7+4\sqrt{3})\times\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{35+20\sqrt{3}}{12}\pi$ cm^2

【問 12】

図のように，円Oの円周上に4点A，B，C，Dがあり∠ABD＝∠ADBです。また，線分BC上に点Eがあり，AE∥DCです。

これについて，次の問1・問2に答えなさい。

（広島県 2008年度）



問1．△ECAは二等辺三角形であることを証明しなさい。

問2．AB＝5 cm，∠ADB＝30° のとき，$\overset{\frown}{AB}$の長さは何cmですか。

ただし，$\overset{\frown}{AB}$は小さい方の弧をさすものとし，円周率はπとします。

解答欄

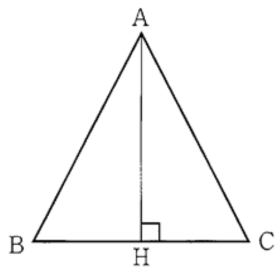
問1	〔仮定〕図において，4点A，B，C，Dは円Oの円周上の点，∠ABD＝∠ADB，AE∥DC 〔結論〕△ECAは二等辺三角形 〔証明〕
問2	cm

解答
問1
△ECA において
$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角であるから
∠ADB＝∠ACE…①
$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角であるから
∠ABD＝∠ACD…②
平行線の錯角であるから
∠ACD＝∠CAE…③
②，③より
∠ABD＝∠CAE…④
∠ABD＝∠ADB であることと①，④より
∠ACE＝∠CAE
2 つの角が等しいから
△ECA は二等辺三角形である。
問2　$\dfrac{5}{3}\pi$
解説
問2
O と A，O と B を結ぶ。
円周角の定理より∠AOB＝2∠ADB＝2×30°＝60°
また OA と OB は円 O の半径より OA＝OB
よって△OAB は正三角形となるので OA＝AB＝5
したがって，弧 AB の長さは $2\pi\times5\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{5}{3}\pi$ cm

【問 13】

図の△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形である。頂点 A から底辺 BC に垂線 AH をひくとき，BH＝CH となることを証明しなさい。

（鳥取県 2008 年度）



解答欄

証明

解答
証明
△ABH と△ACH で
仮定より AB＝AC…①
AH⊥BC より
∠AHB＝∠AHC＝90°…②
AH は共通な辺だから
AH＝AH…③
①②③から
直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので
△ABH≡△ACH
よって BH＝CH である。

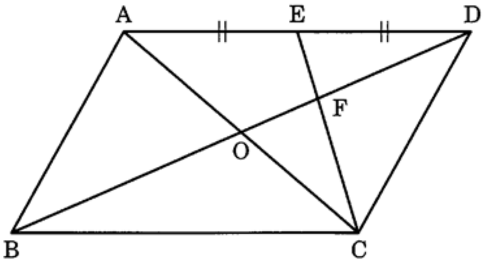
【問 14】

図 1 のように，平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O，辺 AD の中点 E と点 C を結び対角線 BD との交点を F とする。

次の問1～問3に答えなさい。

（徳島県 2008 年度）

図 1



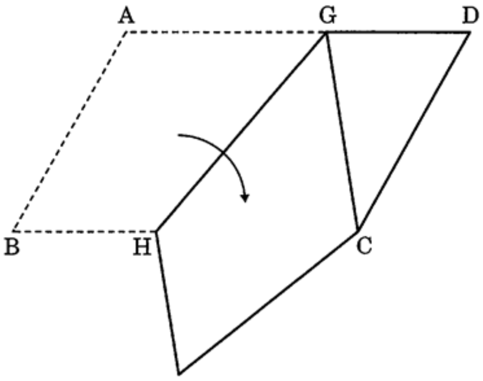
問1．△EFD と△OCF の面積が等しいことを証明しなさい。

問2．四角形 AOFE の面積は，平行四辺形 ABCD の面積の何倍か，求めなさい。

問3．図 1 の平行四辺形 ABCD が，AB＝12 cm，BC＝18 cm，∠ABC＝60° のとき，次の(1)･(2)に答えなさい。

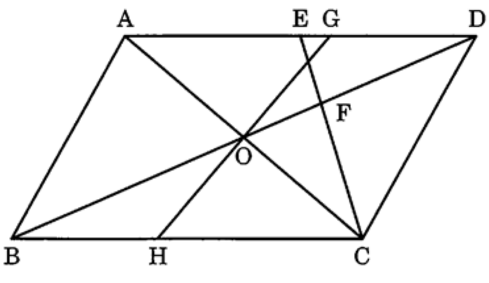
(1) 平行四辺形 ABCD の面積を求めなさい。

図 2



(2) 平行四辺形 ABCD を図 2 のように点 A が点 C に重なるように折り，その折り目を GH とする。次に，折った部分をもとにもどすと図 3 のようになる。このとき，線分 EG の長さを求めなさい。

図 3



解答欄

<table>
<tr><td rowspan="1">問1</td><td colspan="2">証明</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">倍</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1
証明
点 E は辺 AD の中点, 点 O は線分 AC の中点だから
2 点 E, O を結ぶと中点連結定理より
EO ∥DC…①
底辺 DC が共通で, 高さが等しいので
△ECD＝△OCD…②
また
△EFD＝△ECD－△FCD…③
△OCF＝△OCD－△FCD…④
②, ③, ④より
△EFD＝△OCF

問2 $\frac{1}{6}$倍

問3
(1) $108\sqrt{3}$ cm²
(2) $\frac{3}{2}$ cm

解説
問2
平行四辺形 ABCD の面積を S とすると
△ACD＝$\frac{1}{2}S$ △AOD＝$\frac{1}{2}$△ACD＝$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S=\frac{1}{4}S$
同様に△CED＝$\frac{1}{4}S$
AD ∥BC より
EF : CF＝ED : CB＝1 : 2
よって△DEF＝$\frac{1}{3}$△CED＝$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}S=\frac{1}{12}S$
したがって四角形 AOFE＝△AOD－△DEF＝$\frac{1}{4}S-\frac{1}{12}S=\frac{2}{12}S=\frac{1}{6}S$

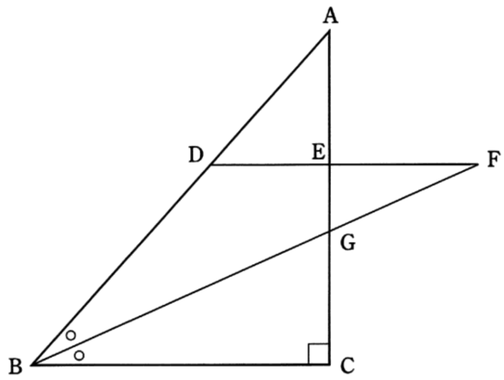
問3
(1)
A から BC に垂線 AK をひくと
△ABK は∠ABK＝60° の直角三角形だから
BK＝$\frac{1}{2}$AB＝$\frac{1}{2}\times12=6$ AK＝$\sqrt{3}$ BK＝$\sqrt{3}\times6=6\sqrt{3}$
よって求める面積は $18\times6\sqrt{3}=108\sqrt{3}$ cm²
(2)
折り返しているので
AH＝CH, AG＝CG, ∠HAC＝∠HCA, ∠GAC＝∠GCA
AD ∥BC より
錯角は等しいので
∠GAC＝∠HCA AC は共通だから
△HAC と△GAC は合同な三角形になる。
よって AH＝CH＝AG＝CG＝x cm とすると
HK＝$18-6-x=12-x$ cm と表せる。
△AHK において
三平方の定理より$(6\sqrt{3})^2+(12-x)^2=x^2$
これを解いて $x=\frac{21}{2}$
よって EG＝AG－AE＝$\frac{21}{2}-\frac{18}{2}=\frac{3}{2}$ cm

【問 15】

図のような，∠C＝90° の直角三角形 ABC がある。点 D，E は，それぞれ AB，AC 上の点であり，DE∥BC である。また，点 F は，∠ABC の二等分線と DE を延長した直線との交点であり，点 G は，BF と AC との交点である。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（佐賀県 2008 年度 後期）



問1．△DBF が二等辺三角形であることを証明しなさい。

問2．BC＝10 cm，DE＝4 cm，AB＝15 cm として，次の(1)～(4)の各問いに答えなさい。

(1) BD の長さを求めなさい。

(2) EG∶GC を最も簡単な整数の比で表しなさい。

(3) GF の長さを求めなさい。

(4) △DBG の面積を求めなさい。

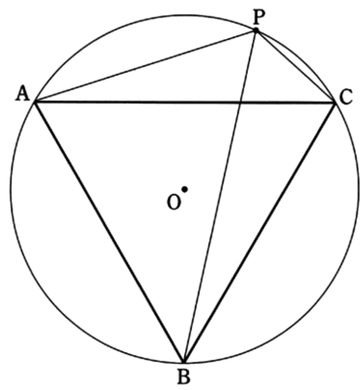
解答欄

問1	証明	
問2	(1)	cm
	(2)	EG:GC＝　　:
	(3)	cm
	(4)	cm^2

解答
問1
DE∥BCより
DFB＝∠FBC…①
BFは∠ABCの二等分線だから
∠DBF＝∠FBC…②
①, ②から
∠DFB＝∠DBF
よって2組の角が等しいので
△DBFは二等辺三角形である。
問2
(1) 9 cm
(2) EG:GC＝1:2
(3) $\sqrt{30}$ cm
(4) $9\sqrt{5}$ cm^2
解説
問2
(3)
△ABCで三平方の定理を利用して
AC＝$\sqrt{15^2-10^2}=5\sqrt{5}$
DE∥BCより
AE:EC＝AD:DB＝6:9＝2:3
よってEC＝$\frac{3}{5}$AC＝$\frac{3}{5}\times5\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
EG:GC＝1:2より
EG＝$\frac{1}{3}$EC＝$\frac{1}{3}\times3\sqrt{5}=\sqrt{5}$
△GEFで
三平方の定理を利用してGF＝$\sqrt{(\sqrt{5})^2+5^2}=\sqrt{30}$ cm
(4)
DF∥BCより
FG:GB＝EG:GC＝1:2
よって△DBG＝$\frac{2}{3}$△DBF＝$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times$DF$\times$EC＝$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times9\times3\sqrt{5}=9\sqrt{5}$ cm^2

【問 16】

図は，1 辺の長さが 6 cm の正三角形 ABC と 3 つの頂点 A，B，C を通る円 O において，$\overset{\frown}{AC}$上の点 P と点 A，B，C をそれぞれ結んだものである。点 P を，点 B を含まない$\overset{\frown}{AC}$上で，点 A，C を除くいろいろな位置に動かすとき，次の問1～問3に答えなさい。



（鹿児島県　2008 年度）

問1．∠APB の大きさは何度か。

問2．線分 BP が円の中心 O を通るとき，その長さは何 cm か。

問3．点 P を∠CBP＝15° となる位置に動かした。線分 BP 上に BQ＝CP となる点 Q をとり，点 Q と点 A を結ぶ。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(1) AQ＝AP であることを証明せよ。

(2) △ABQ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">度</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>(証明)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
</table>

解答
問1　60度
問2　$4\sqrt{3}$ cm
問3
(1)
証明
△ABQと△ACPにおいて
仮定より
BQ＝CP…①
△ABCは正三角形であるから
AB＝AC…②
同じ弧に対する円周角は等しいから
∠ABQ＝∠ACP…③
①，②，③より
2辺とその間の角がそれぞれ等しいから
△ABQ≡△ACP
したがって
AQ＝AP
(2)　$9-3\sqrt{3}$ cm²
解説
問2
BPが円の中心Oを通るとき
円周角の定理より∠BAP＝90°
∠APB＝60°だから
$BP:AB=2:\sqrt{3}$
AB＝6より
$BP:6=2:\sqrt{3}$
$\sqrt{3}\,BP=12$
$BP=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ cm
問3
(2)
AからBPに垂線AHをひく。
∠ABH＝60°－15°＝45°より
△ABHはHA＝HBの直角二等辺三角形である。
AB＝6より $HA=HB=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=3\sqrt{2}$
またAP＝AQ，∠APQ＝60°より
△APQは正三角形である。
よって $PH=QH=\frac{1}{\sqrt{3}}AQ=\frac{1}{\sqrt{3}}\times3\sqrt{2}=\sqrt{6}$
したがって $\triangle ABQ=\frac{1}{2}\times BQ\times AH=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times3\sqrt{2}=9-3\sqrt{3}$ cm²