

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2003 年度出題】

【問 1】

図 I のように、 $AB=AC=4\text{ cm}$ である直角二等辺三角形 ABC において、辺 AC の中点を M として、点 B と点 M を結びます。

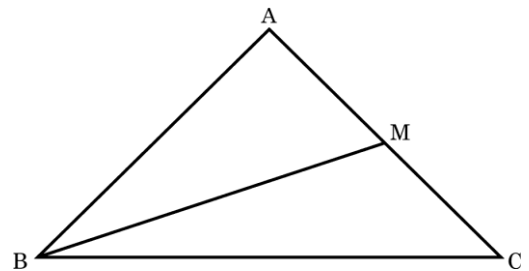
図 I

次の1～3の問いに答えなさい。

(宮城県 2003 年度)

1. $\angle ACB$ の大きさを求めなさい。

2. 線分 BM の長さを求めなさい。



3. 図 II のように、図 I の直角二等辺三角形 ABC の点 A を通り、線分 BM に垂直な直線をひきます。この直線と線分 BM との交点を D 、辺 BC との交点を E とします。また、この直線と、点 C を通り辺 AB に平行な直線との交点を F とします。

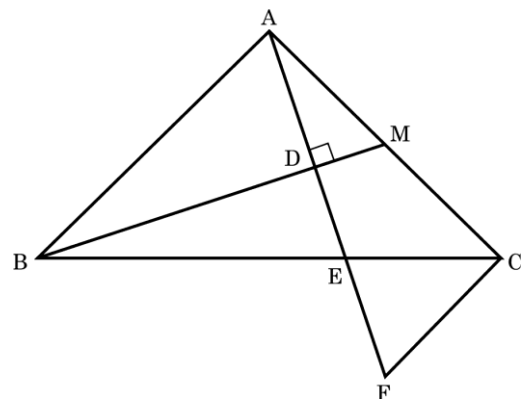
図 II

次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) $\triangle ABE \sim \triangle FCE$ を証明しなさい。

(2) 線分 AE の長さを求めなさい。

(3) $\triangle BED$ の面積を求めなさい。



解答欄

1	度	
2	cm	
3	(1)	証明
	(2)	cm
	(3)	cm ²

解答

1 45 度

2 $2\sqrt{5}$ cm

3

(1)

証明

$\triangle ABE$ と $\triangle FCE$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AEB = \angle FEC \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BAE = \angle CFE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \sim \triangle FCE$

$$(2) \frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ cm}$$

$$(3) \frac{32}{15} \text{ cm}^2$$

解説

1.

直角二等辺三角形の底角は 45° なので $\angle ACB = 45^\circ$

2.

$\triangle ABM$ は $\angle A = 90^\circ$ $AB = 4\text{cm}$ $AM = 2\text{cm}$ の直角三角形なので
三平方の定理を用いると $(BM)^2 = (AB)^2 + (AM)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

よって $BM = 2\sqrt{5} \text{ cm}$

3

(1)

$\triangle ABE$ と $\triangle FCE$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AEB = \angle FEC \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle BAE = \angle CFE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABE \sim \triangle FCE$

(2)

$\triangle ABM \equiv \triangle CAF$ であることがわかるので

$$AF = BM = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$AE : FE = AB : FC = 4 : 2 = 2 : 1$$

よって $AE : AF = AE : AE + EF = 2 : 3$

$$\text{以上から } AE = \frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ cm}$$

(3)

$\triangle ABD \sim \triangle MBA$ であることがわかるので

$$AB : BD : DA = MB : BA : AM = \sqrt{5} : 2 : 1$$

$$AB = 4 \text{ cm} \text{ なので } DB = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$AD = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } DE = AE - AD = \frac{8\sqrt{5}}{15} \text{ cm} \text{ 以上より}$$

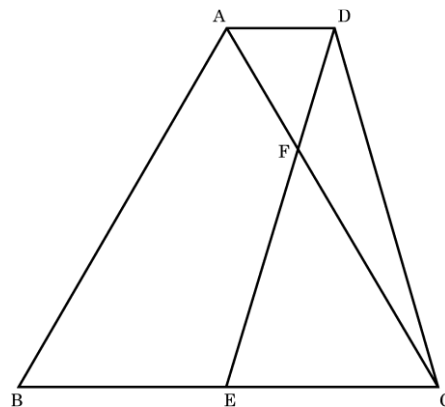
$$\triangle BED \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{15} = \frac{32}{15} \text{ cm}^2$$

【問 2】

図で、四角形 $ABCD$ は $AD \parallel BC$ の台形であり、 $\triangle ABC$ は正三角形である。点 E は線分 BC の中点であり、 $DE=DC$ である。線分 AC , DE の交点を F とする。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(秋田県 2003 年度)

(1) $\triangle ADF \cong \triangle CEF$ となることを証明しなさい。



(2) $AB=8 \text{ cm}$ のとき、 $\triangle CDF$ の面積を求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm^2

解答

(1)

証明

$\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ において

対頂角は等しいことから

$$\angle DFA = \angle EFC$$

平行線の錯角は等しいことから

$$\angle FAD = \angle FCE$$

したがって、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADF \sim \triangle CEF$$

$$(2) \quad \frac{8}{3} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

解説

(1)

$\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ において

対頂角は等しいことから

$$\angle DFA = \angle EFC$$

平行線の錯角は等しいことから

$$\angle FAD = \angle FCE$$

したがって

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ADF \sim \triangle CEF$$

(2)

$\triangle AEC$ における三平方の定理から

$$AE = 4\sqrt{3}$$

線分 EC の中点を G とすると、四角形 $AEGD$ は長方形なので

$$AD = EG = 2$$

また $\triangle ADF \sim \triangle CEF$ より

$$DF : FE = AD : CE = 2 : 4 = 1 : 2$$

以上から

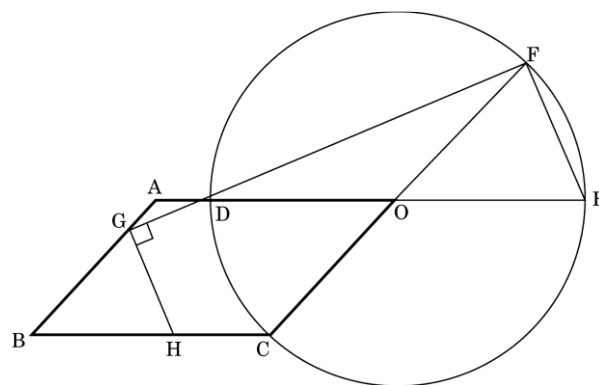
$$\triangle CDF = \frac{1}{3} \triangle DEC = \frac{1}{3} (4 \times 4\sqrt{3} \div 2) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

【問 3】

図のような、 $OA > OC$ である平行四辺形 $OABC$ がある。
 点 O を中心として点 C を通る円をかき、この円 O と辺 AO
 との交点を D 、辺 AO 、 CO の延長と円 O との交点をそれ
 ぞれ E 、 F とする。また、 FD の延長と辺 AB との交点を G
 とする。次に、辺 BC 上に $\angle FGH = 90^\circ$ となるように点 H
 をとる。

このとき、 $\triangle BGH \sim \triangle OFE$ となることを証明しなさい。

(福島県 2003 年度)



解答欄

証明

解答

証明

$\triangle BGH$ と $\triangle OFE$ において

平行四辺形の対角は等しいから

$$\angle GBH = \angle COD \cdots ①$$

対頂角は等しいから

$$\angle COD = \angle FOE \cdots ②$$

①, ②から

$$\angle GBH = \angle FOE \cdots ③$$

また, C と D を結ぶと

$\angle DFE$, $\angle FDC$ は中心角が 180° である弧に対する円周角であるから

$$\angle DFE = 90^\circ, \angle FDC = 90^\circ$$

したがって $FE \parallel DC$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle FEO = \angle ODC \cdots ④$$

$$AO \parallel BC \text{ から } \angle ODC = \angle DCH \cdots ⑤$$

$$DC \parallel GH \text{ から } \angle DCH = \angle GHB \cdots ⑥$$

$$④, ⑤, ⑥ \text{ から } \angle GHB = \angle FEO \cdots ⑦$$

③, ⑦から

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BGH \sim \triangle OFE$$

証明

$\triangle BGH$ と $\triangle OFE$ において

平行四辺形の対角は等しいから

$$\angle GBH = \angle COD \cdots ①$$

対頂角は等しいから

$$\angle COD = \angle FOE \cdots ②$$

①, ②から

$$\angle GBH = \angle FOE \cdots ③$$

$$\text{また } \angle DGH = 90^\circ$$

したがって

$$\angle BGH = 90^\circ - \angle AGD \cdots ④$$

$$\angle DFE \text{ は中心角が } 180^\circ \text{ である弧に対する円周角であるから } \angle DFE = 90^\circ$$

したがって

$$\angle OFE = 90^\circ - \angle OFD \cdots ⑤$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle AGD = \angle OFD \cdots ⑥$$

$$④, ⑤, ⑥ \text{ から } \angle BGH = \angle OFE \cdots ⑦$$

③, ⑦から

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BGH \sim \triangle OFE$$

解説

三角形の2角が等しいことを述べる。

$$\angle GBH = \angle FOE \text{ をいうために}$$

それぞれの角が $\angle COD$ に対して平行四辺形の対角, 対頂角になっていることを述べる。

また $\angle BGH = \angle OFE$ をいうために

$$\angle DGH = 90^\circ \text{ より } \angle BGH = 90^\circ - \angle AGD,$$

$$\angle DFE = 90^\circ$$

(円の直径に対する円周角)より

$$\angle OFE = 90^\circ - \angle OFD \text{ を示し}$$

同時に $\angle AGD$ と $\angle OFD$ が平行線の錯角で等しくなっていることを述べる。

【問 4】

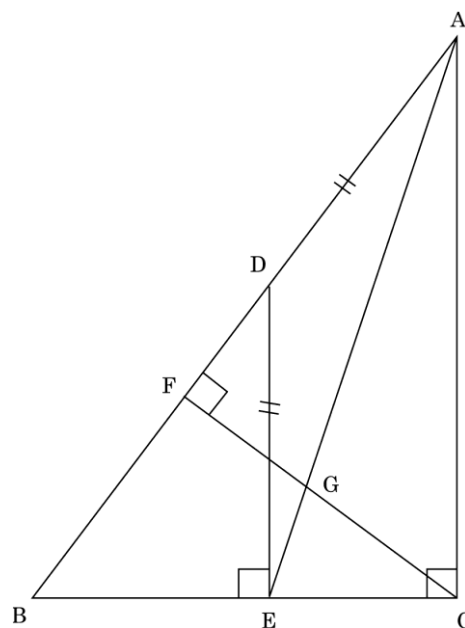
図のように、 $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。辺 AB 上に点 D 、辺 BC 上に点 E があって、 $AD=DE$ 、 $DE \perp BC$ である。また、点 C から辺 AB に垂線 CF を引き、線分 AE と CF の交点を G とする。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(千葉県 2003 年度)

(1) $\triangle AFG$ と $\triangle ACE$ が相似であることを証明しなさい。

(2) $AB=9\text{ cm}$ 、 $AD=4\text{ cm}$ のとき、 CG の長さを求めなさい。



解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle AFG$ と $\triangle ACE$ において

$$\angle AFG = \angle ACE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$AD = DE$ より二等辺三角形の底角は等しいから

$$\angle DAE = \angle DEA \cdots \textcircled{2}$$

$DE \parallel AC$ より, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle DEA = \angle CAE \cdots \textcircled{3}$$

したがって②, ③より

$$\angle FAG = \angle CAE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AFG \sim \triangle ACE$$

$$(2) \quad \frac{12}{5} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle AFG$ と $\triangle ACE$ において

$$\angle AFG = \angle ACE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$AD = DE$ より, 二等辺三角形の底角は等しいから

$$\angle DAE = \angle DEA \cdots \textcircled{2}$$

$DE \parallel AC$ より, 平行線の錯角は等しいから

$$\angle DEA = \angle CAE \cdots \textcircled{3}$$

したがって②, ③より

$$\angle FAG = \angle CAE \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AFG \sim \triangle ACE$$

(2)

$\triangle AFG \sim \triangle ACE$ より

$$\angle AGF = \angle AEC \cdots \textcircled{5}$$

対頂角だから

$$\angle AGF = \angle CGE \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥より

$$\angle CGE = \angle CEG$$

よって $CG = CE$

いま, $AB = 9$, $AD = DE = 4$ より, $DB = 5$

$\triangle DBE$ で三平方の定理を用いて

$$BE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$DE \parallel AC$ より,

$$BD : DA = BE : EC$$

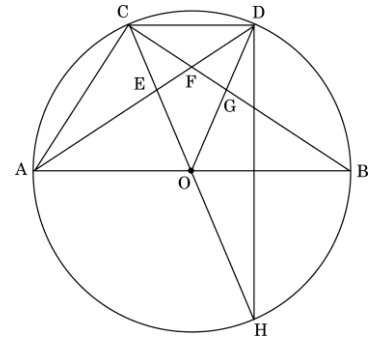
$$5 : 4 = 3 : EC$$

$$EC = \frac{12}{5}$$

$$\text{よって } CG = \frac{12}{5} \text{ cm}$$

【問 5】

図のように、線分 AB を直径とする円 O があり、円 O の周上に点 A とは異なる点 C を $AC < BC$ となるようにとる。また、点 A をふくまない弧 $\widehat{BC}$ 上に、点 D を $AB \parallel CD$ となるようにとり、線分 AD と線分 OC との交点を E、線分 AD と線分 BC との交点を F とする。さらに、線分 BC と線分 OD との交点を G とする。このとき、次の問いに答えなさい。



(神奈川県 2003 年度)

(ア) 三角形 OEA と三角形 FGD が相似であることを次のように証明した。空

欄にあてはまるものとして最も適するものを、(あ) ～ (う) には【A群】から、(a)、(b) には【B群】から、(c) には【C群】から、それぞれ1つずつ選び、その番号を書きなさい。

〔証明〕

$\triangle OEA$ と $\triangle FGD$ において、

まず、 $\triangle ODA$ は二等辺三角形だから、

(a)

よって、 $\angle OAE = \angle FDG$ …①

次に、弧 $\widehat{AC}$ に対する円周角と中心角の関係から、

$$\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

よって、 $\angle AOC = 2\angle ADC$ …②

また、(あ) から、

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \dots \textcircled{3}$$

さらに、(い) から、

$$\angle BAD = \angle ADC \quad \dots \textcircled{4}$$

③、④より、 $\angle BCD = \angle ADC$ …⑤

ここで、 $\triangle FDC$ の内角と外角の関係から、

$$\angle DFG = \angle FDC + \angle FCD$$

よって、 $\angle DFG = \angle ADC + \angle BCD$ …⑥

⑤、⑥より、 $\angle DFG = 2\angle ADC$ …⑦

②、⑦より、(b)

よって、 $\angle AOE = \angle DFG$ …⑧

①、⑧より、(う) から、

$\triangle OEA$ (c) $\triangle FGD$

【A群】

1. 平行線の同位角は等しい
2. 平行線の錯角は等しい
3. 弧 $\widehat{AC}$ に対する円周角は等しい
4. 弧 $\widehat{BD}$ に対する円周角は等しい
5. 3組の辺の比が等しい
6. 2組の辺の比が等しく、その間の角が等しい
7. 2組の角がそれぞれ等しい

【B群】

1. $\angle OAC = \angle OCA$
2. $\angle OAD = \angle ODA$
3. $\angle OBC = \angle OCB$
4. $\angle OEA = \angle CED$
5. $\angle AOC = \angle DFG$

【C群】

1. $\equiv$
2. $=$
3. ∞

(イ) $\angle ABC = 33^\circ$ のとき、線分 CO の延長と円 O との交点を H として、 $\angle CHD$ の大きさを求めなさい。

解答欄

(ア)	(a)	
	(あ)	
	(い)	
	(b)	
	(う)	
	(c)	
(イ)	$\angle CHD = \quad \quad \quad ^\circ$	

解答

(ア) (a) 2, (あ) 4, (い) 2, (b) 5, (う) 7, (c) 3

(イ) $\angle CHD = 24^\circ$

解説

(ア)

$\triangle OEA$ と $\triangle FGD$ において

まず $\triangle ODA$ は二等辺三角形だから $\angle OAD = \angle ODA$

よって $\angle OAE = \angle FDG \cdots ①$

次に $\widehat{AC}$ に対する円周角と中心角の関係から $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC$

よって $\angle AOC = 2\angle ADC \cdots ②$

また $\widehat{BD}$ に対する円周角は等しいから

$\angle BAD = \angle BCD \cdots ③$

さらに平行線の錯角は等しいから

$\angle BAD = \angle ADC \cdots ④$

③, ④より

$\angle BCD = \angle ADC \cdots ⑤$

ここで $\triangle FDC$ の内角と外角の関係から $\angle DFG = \angle FDC + \angle FCD$

よって $\angle DFG = \angle ADC + \angle BCD \cdots ⑥$

⑤, ⑥より $\angle DFG = 2\angle ADC \cdots ⑦$

②, ⑦より $\angle AOC = \angle DFG$

よって $\angle AOE = \angle DFG \cdots ⑧$

①, ⑧より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle OEA \sim \triangle FGD$

(イ)

平行線の錯角は等しいから $\angle BCD = \angle ABC = 33^\circ$

$\triangle OBC$ は二等辺三角形だから $\angle OCB = \angle OBC = 33^\circ$

直径に対する円周角は 90° だから $\angle CDH = 90^\circ$

よって $\triangle CDH$ の内角の和より

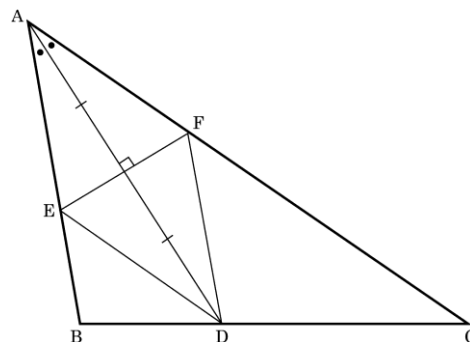
$\angle CHD = 180^\circ - \angle CDH - \angle HCD = 180^\circ - 90^\circ - (33^\circ + 33^\circ) = 24^\circ$

【問 6】

図の△ABC で、 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC との交点を D とし、線分 AD の垂直二等分線と辺 AB, AC との交点をそれぞれ E, F とする。E と D, F と D をそれぞれ結ぶ。

次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(岐阜県 2003 年度)



- (1) $\angle EAD$ と大きさが等しい角は $\angle FAD$ のほかに2つある。この2つの角を書きなさい。

- (2) $\triangle EBD \sim \triangle FDC$ であることを証明しなさい。

- (3) EB=2 cm, ED=4 cm のとき, FC の長さを求めなさい。

解答欄

(1)		
(2)	証明	
(3)	cm	

解答

(1) $\angle EDA, \angle FDA$

(2)

証明

$\triangle EBD$ と $\triangle FDC$ で

(1)から $\angle EAD = \angle FDA$

錯角が等しいから $AB \parallel FD$

平行線の同位角だから $\angle EBD = \angle FDC \cdots ①$

(1)から $\angle EDA = \angle FAD$

錯角が等しいから $ED \parallel AC$

平行線の同位角だから $\angle EDB = \angle FCD \cdots ②$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle EBD \sim \triangle FDC$

(3) 8cm

解説

(1)

ADとEFの交点をGとする。

$\triangle AEG$ と $\triangle DEG$ において

$\angle EGA = \angle EGD \cdots ①$

GはADの中点だから

$AG = DG \cdots ②$

共通の辺だから

$EG = EG \cdots ③$

①, ②, ③より

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AEG \cong \triangle DEG$

よって $\angle EAD = \angle EDA \cdots ④$

また同様にして, $\triangle AFG \cong \triangle DFG$ より

$\angle FAD = \angle FDA \cdots ⑤$

ADは $\angle BAC$ の二等分線だから

$\angle FAD = \angle EAD \cdots ⑥$

ゆえに④, ⑤, ⑥より

$\angle EAD$ と大きさが等しい角は $\angle FAD$ の他に

$\angle EDA$ と $\angle FDA$ がある。

(2)

$\triangle EBD$ と $\triangle FDC$ において

(1)から $\angle EAD = \angle FDA$ より錯角が等しいから $AB \parallel FD$

平行線の同位角だから $\angle EBD = \angle FDC \cdots ①$

(1)から $\angle EDA = \angle FAD$ 錯角が等しいから

$ED \parallel AC$

平行線の同位角だから

$\angle EDB = \angle FCD \cdots ②$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

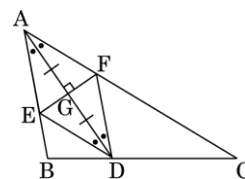
$\triangle EBD \sim \triangle FDC$

(3)

$FD = ED = 4$

(2)より $EB : ED = FD : FC \quad 2 : 4 = 4 : FC$

よって $FC = \frac{16}{2} = 8\text{cm}$



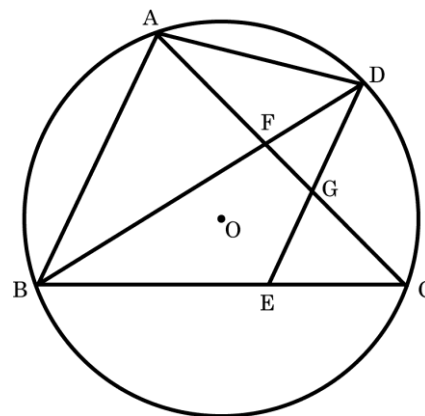
【問 7】

図において、3点 A, B, C は円 O の円周上の点である。 $\angle ABC$ の二等分線と円 O との交点を D とし、BC 上に $BE=DE$ となる点 E をとる。AC と DB, DE との交点をそれぞれ F, G とする。

このとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(静岡県 2003 年度)

(1) $\triangle ABF \sim \triangle GAD$ であることを証明しなさい。



(2) $AB=6\text{ cm}$, $BE=5\text{ cm}$, $EC=3\text{ cm}$ のとき、DG の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

$\triangle ABF$ と $\triangle GAD$ で

BD は $\angle ABC$ の二等分線だから

$$\angle ABF = \angle DBC \cdots \textcircled{1}$$

弧 DC の円周角だから

$$\angle DBC = \angle DAG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle ABF = \angle GAD \cdots \textcircled{3}$$

また $BE = DE$ より

$$\angle DBC = \angle EDB \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

$$\angle ABF = \angle EDB$$

よって, $AB \parallel DE$ より

$$\angle BAF = \angle AGD \cdots \textcircled{5}$$

ゆえに③, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABF \sim \triangle GAD$$

$$(2) \quad \frac{11}{4} \text{ cm}$$

解説

(2)

$AB \parallel DE$ より

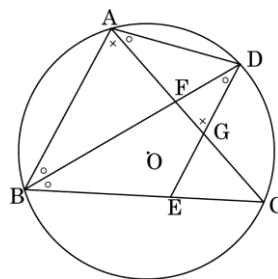
$$GE : AB = CE : CB \text{ だから}$$

$$GE : 6 = 3 : (5 + 3)$$

$$GE = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\text{また } DE = BE = 5$$

$$\text{ゆえに } DG = DE - GE = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \text{ cm}$$

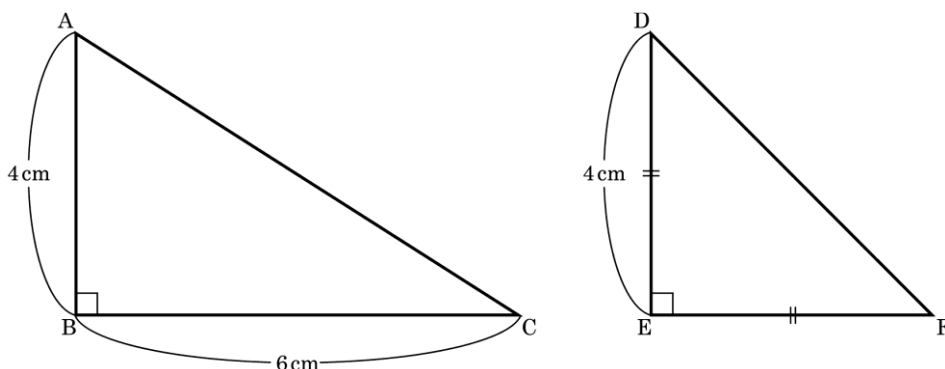


【問 8】

図のように、 $\angle ABC=90^\circ$ 、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$ の直角三角形 ABC と、 $\angle DEF=90^\circ$ 、 $DE=EF=4\text{ cm}$ の直角二等辺三角形 DEF がある。

このとき、次の各問いに答えなさい。

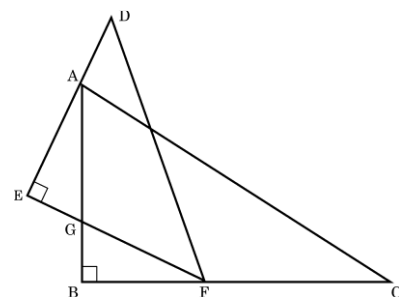
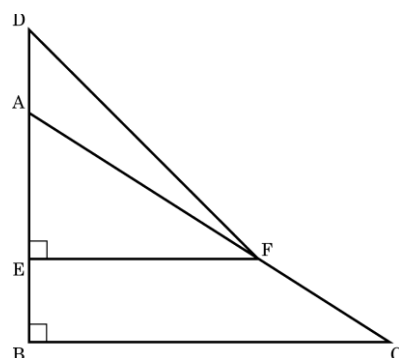
(三重県 2003 年度)



- (1) 上の図のように、辺 DE が辺 AB と重なり、頂点 F が辺 AC 上にあるように2つの直角三角形を置くと、線分 EB の長さを求めなさい。

- (2) 右下の図のように、辺 DE 上に頂点 A があり、頂点 F が辺 BC 上にくるように2つの直角三角形を置く。辺 AB と辺 EF の交点を G とするとき、 $\triangle AGF \sim \triangle BGE$ であることの証明を、次の (ア) と (イ) に適切なことがらを書き入れて完成しなさい。

ただし、(イ) には〈証明〉の中にある④を使って証明の続きを書きなさい。



〈証明〉

$\triangle ABF$ と $\triangle FEA$ において、条件より

$\angle ABF = \angle FEA = 90^\circ$ …①

$AB = FE$ …②

また、 $AF = FA$ (共通) …③

①、②、③から、

(ア)

が、それぞれ等しいから、

$\triangle ABF \equiv \triangle FEA$ …④

(イ)

よって、 $\triangle AGF \sim \triangle BGE$

解答欄

(1)	cm
(2)	

解答

(1) $\frac{4}{3}\text{cm}$

(2)

(ア)

直角三角形の斜辺と他の一辺

直角三角形の対応する2組の辺

(イ)

証明

④より $AE=FB\cdots\textcircled{5}$

また $\triangle AEG$ と $\angle FBG$ において

$\angle AGE=\angle FGB$ だから $\angle GAE=\angle GFB$

①, ⑤とあわせて

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AEG\equiv\triangle FBG\cdots\textcircled{7}$

よって $AG=FG$, $GE=GB\cdots\textcircled{6}$

⑥より $\triangle AGF$, $\triangle EGB$ はともに二等辺三角形である。 $\cdots\textcircled{8}$

また $\angle AGF=\angle EGB$ (対頂角)

よって $\triangle AGF$ と $\triangle BGE$ は、頂角が等しい二等辺三角形

解説

(1)

$EF\parallel BC$ より

$AE:AB=EF:BC$

$AE:4=4:6$

$AE=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

よって $EB=AB-AE=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\text{cm}$

(2)

(ア)

$\triangle ABF$ と $\triangle FEA$ は

①で直角三角形であること

③で斜辺が等しいこと

②で他の1辺が等しいことが示せたから

直角三角形の合同条件の「直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。」を満たしている。

(イ)

例1

④より $AE=FB\cdots\textcircled{5}$

また $\triangle AEG$ と $\triangle FBG$ において $\angle AGE=\angle FGB$ だから $\angle GAE=\angle GFB\cdots\textcircled{6}$

①, ⑤, ⑥より

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle AEG\equiv\triangle FBG$

よって $AG=FG$, $GE=GB\cdots\textcircled{7}$

⑦より $\triangle AGF$, $\triangle EGB$ はともに二等辺三角形である。

また $\angle AGF=\angle EGB$ (対頂角)より $\triangle AGF$ と $\triangle BGE$ は頂角が等しい二等辺三角形である。

例2.

④より $AE=FB\cdots\textcircled{5}$, $AB=FE\cdots\textcircled{6}$ $\angle AFE=\angle FAB\cdots\textcircled{7}$

また $\triangle AEB$ と $\triangle FBE$ において $EB=BE$ (共通) $\cdots\textcircled{8}$

⑤, ⑥, ⑧より

3辺の長さが等しいから

$\triangle AEB\equiv\triangle FBE$

よって $\angle AEB=\angle FBE$ だから①より $\angle GEB=\angle GBE$

よって $\triangle GEB$ は二等辺三角形である。また, ⑦より $\triangle GAF$ は二等辺三角形である。

また $\angle AGF=\angle EGB$ (対頂角)

ゆえに $\triangle AGF$ と $\triangle BGE$ は頂角が等しい二等辺三角形である。

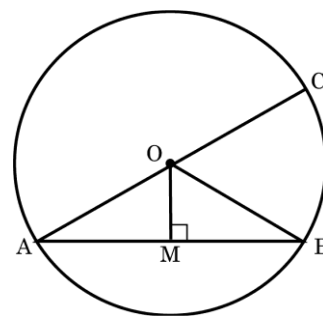
【問 9】

図Ⅰ～図Ⅲにおいて、円 O の半径は 6 cm である。 A, B, C は円 O の周上の点であり、 AC は円 O の直径である。 A と B, O と B とをそれぞれ結ぶ。 $\triangle OAB$ の内角 $\angle AOB$ の大きさは 120° である。 M は O から弦 AB にひいた垂線と弦 AB との交点である。

円周率を π として、次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になるときは、根号の中の数をしてできるだけ小さい自然数で表すこと。

(大阪府 2003 年度 前期)

図Ⅰ



(1) 図Ⅰにおいて、

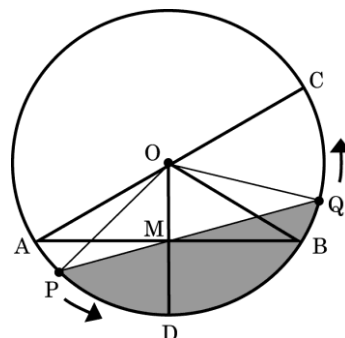
① 半周より短い弧 $\widehat{AB}$ の長さを求めなさい。

② 線分 AM の長さを求めなさい。

③ B と C とを結んで $\triangle ABC$ をつくる。 $\triangle ABC \sim \triangle BMO$ であることを証明しなさい。

(2) 図Ⅱにおいて、 D は直線 OM と半周より短い弧 $\widehat{AB}$ との交点である。 P は A を出発し、半周より短い弧 $\widehat{AD}$ 上を D まで動く点である。 Q は点 P が動き始めるのと同時に B を出発し、 $\angle POQ = 120^\circ$ を保ちながら半周より短い弧 $\widehat{BC}$ 上を C まで動く点である。

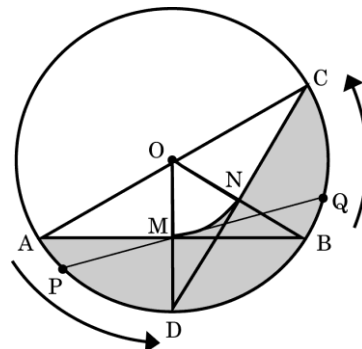
図Ⅱ



図Ⅱ中の $\bullet$ で示したところは、弦 PQ と半周より短い弧 $\widehat{PQ}$ とで囲まれた図形である。この図形を F とする。

図Ⅲにおいて、 N は線分 OB と弦 CD との交点である。図Ⅲ中の $\bullet$ で示したところは、点 P が A から D まで動いていくときに図形 F が通る部分であり、図形 OMN は OM, ON を半径とするおうぎ形である。図Ⅲ中の $\bullet$ で示した部分の面積を求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

図Ⅲ



解答欄

(1)	①	cm
	②	cm
	③	証明
(2)	(求め方)	
	cm ²	

解答

(1)

① 4π

② $3\sqrt{3}$

③

証明

$\triangle ABC$ と $\triangle BMO$ において

AC は円 O の直径だから

$$\angle ABC = 90^\circ \cdots \textcircled{ア}$$

$$AB \perp OM \text{ だから } \angle BMO = 90^\circ \cdots \textcircled{イ}$$

$$\textcircled{ア}, \textcircled{イ} \text{ より } \angle ABC = \angle BMO \cdots \textcircled{ウ}$$

OA, OB は円 O の半径だから $OA = OB$

したがって $\triangle OAB$ は二等辺三角形となり

二等辺三角形の二つの底角は等しいから

$$\angle BAC = \angle MBO \cdots \textcircled{エ}$$

$$\textcircled{ウ}, \textcircled{エ} \text{ より}$$

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle BMO$$

(2)

求め方

$$\angle AOM = \angle MON = \angle NOC = 60^\circ$$

$$OM = ON = 3\text{cm}, OA = OB = 6\text{cm}$$

$$AM = CN = 3\sqrt{3}\text{cm} \text{ だから}$$

$$\text{おうぎ形 } OAD - \triangle OAM = \text{おうぎ形 } OBC - \triangle ONC$$

$$= \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = 6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{おうぎ形 } ODB - \text{おうぎ形 } OMN$$

$$= \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} - \pi \times 3^2 \times \frac{60}{360}$$

$$= \frac{9}{2}\pi\text{cm}^2$$

したがって求める面積は

$$(6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}) \times 2 + \frac{9}{2}\pi$$

$$= \frac{33}{2}\pi - 9\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{答 } \frac{33}{2}\pi - 9\sqrt{3}\text{cm}^2$$

解説

(1)

①

$$2 \times \pi \times 6 \times \frac{120}{360} = 4\pi \text{ cm}$$

②

$$\angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

したがって△OAMは3辺の長さの比が1:2:√3の直角三角形である。

$$AM:OA = \sqrt{3}:2$$

$$AM:6 = \sqrt{3}:2$$

$$AM \times 2 = 6 \times \sqrt{3}$$

$$AM = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

③

△ABCと△BMOにおいて

ACは円Oの直径だから

$$\angle ABC = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{ア}$$

AB⊥OMだから

$$\angle BMO = 90^\circ \quad \cdots \textcircled{イ}$$

⑦, ④より

$$\angle ABC = \angle BMO \quad \cdots \textcircled{ウ}$$

OA, OBは円Oの半径だからOA=OB

したがって△OABは二等辺三角形となり二等辺三角形の2つの底角は等しいから

$$\angle BAC = \angle MBO \quad \cdots \textcircled{エ}$$

⑦, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle BMO$$

(2)

$$\angle AOM = \angle MON = \angle NOC = 60^\circ$$

$$OM = ON = 3 \text{ cm}$$

$$OA = OB = 6 \text{ cm}$$

$$AM = CN = 3\sqrt{3} \text{ cm} \text{ だから}$$

$$\text{おうぎ形OAD} - \triangle OAM = \text{おうぎ形OBC} - \triangle ONC$$

$$= \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3$$

$$= 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{おうぎ形ODB} - \text{おうぎ形OMN}$$

$$= \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} - \pi \times 3^2 \times \frac{60}{360}$$

$$= \frac{9}{2} \pi \text{ cm}^2$$

したがって求める面積は

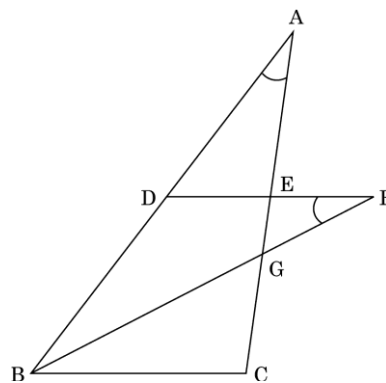
$$(6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}) \times 2 + \frac{9}{2} \pi$$

$$= \frac{33}{2} \pi - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

【問 10】

図のように、 $AC=10\text{ cm}$ 、 $BC=6\text{ cm}$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 、 AC の中点をそれぞれ D 、 E とし、 DE の延長線上に $\angle BFD = \angle BAC$ となるような点 F をとると、 $BF=11\text{ cm}$ となった。 BF と AC の交点を G とするとき、次の問いに答えなさい。

(兵庫県 2003 年度)



(1) DE の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ADE$ と $\triangle BGC$ が相似であることを次のように証明した。次の 1 ～ 6 にあてはまるものを、下の語群のア～ソから選び、記号で答えなさい。

(証明)

$\triangle ABC$ において、点 D 、 E はそれぞれ辺 AB 、 AC の中点だから、 BC 1 DE

$\triangle ADE$ と $\triangle BGC$ において、

仮定から、 $\angle DAE = \angle BFD$ …①

平行線の 2 は等しいから、 $\angle BFD = \angle$ 3 …②

①、②より、 $\angle DAE = \angle$ 3 …③

また、平行線の 4 は等しいから、 $\angle AED = \angle$ 5 …④

③、④より、2組の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ADE$ 6 $\triangle BGC$

語群

ア 対頂角	イ 鋭角	ウ 鈍角	エ 錯角	オ 同位角
カ $\equiv$	キ $=$	ク ∞	ケ $\parallel$	コ $\perp$
サ $\triangle ABF$	シ $\triangle BCG$	ス $\triangle ADE$	セ $\triangle BGC$	ソ $\triangle BGC$

(3) AB の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm					
(2)	1	2	3	4	5	6
(3)	cm					

解答

(1) 3cm

(2) 1 ケ, 2 エ, 3 セ, 4 オ, 5 シ, 6 ク

(3) $\frac{66}{5}$ cm

解説

(1)

中点連結定理により $DE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{cm}$

(3)

$\triangle ADE \sim \triangle BGC$ より

$AE:BC = DE:GC$

$5:6 = 3:GC$

よって $GC = \frac{6 \times 3}{5} = \frac{18}{5}$

ここで2組の角がそれぞれ等しいことから

$\triangle BGC \sim \triangle FGE$ がいえ

相似比は

$CG:EG = \frac{18}{5} : (5 - \frac{18}{5})$

$= \frac{18}{5} : \frac{7}{5} = 18:7$

よって $FG = 11 \times \frac{7}{18+7} = \frac{77}{25}$

さらに $\triangle ADE \sim \triangle FGE$ より

$AD:FG = DE:GE$

$AD : \frac{77}{25} = 3 : \frac{7}{5}$

よって $AD = \frac{77}{25} \times 3 \div \frac{7}{5} = \frac{33}{5}$

したがって $AB = 2AD = 2 \times \frac{33}{5} = \frac{66}{5} \text{ cm}$

【問 11】

数学の授業で、長さが $\sqrt{a}$ cm の線分をつくる方法について、先生から、次のような説明があり、課題が示された。各問いに答えよ。

(奈良県 2003 年度)

図1で、2点A, Bは直線 ℓ 上の点で、 $AB=1$ cmであり、半直線BCは直線 ℓ と垂直です。まず、直線 ℓ 上に点Pを、点Bに関して点Aと反対側にとります。次に、図2のように、線分APを直径とする円Oをかき、半直線BCとの交点をQとします。このとき、 $BP=2$ cmであれば $BQ=\sqrt{2}$ cm, $BP=3$ cmであれば $BQ=\sqrt{3}$ cmとなります。 $BP=a$ cmとすると $BQ=\sqrt{a}$ cmになりますが、なぜそうなるのか、その理由を考えてみましょう。

図1

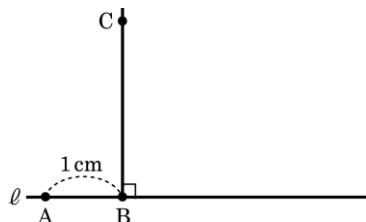
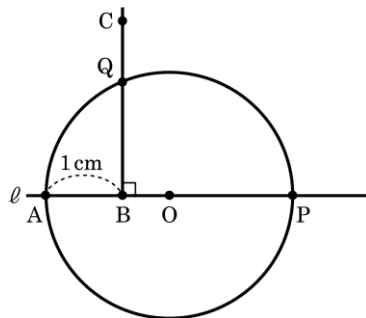


図2

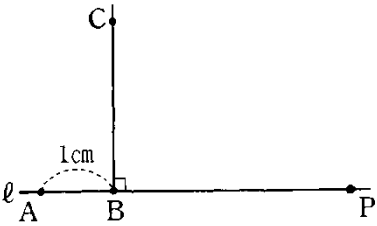


(1) 点 P が解答欄の図に示した位置にあるとき、上の文中の下線部に従って、点 Q を定規とコンパスを使って解答欄の枠内に作図せよ。なお、作図に使った線は消さずに残しておくこと。

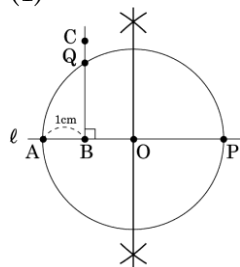
(2) $BP=a$ cm のとき、 $BQ=\sqrt{a}$ cm となることを、次のア、イの順序で証明せよ。

ア $\triangle ABQ \sim \triangle QBP$ であることを証明する。

イ $\triangle ABQ \sim \triangle QBP$ であることを用いて、 $BQ=\sqrt{a}$ cm となることを証明する。

(1)	作図 
(2)	ア [$\triangle ABQ \sim \triangle QBP$ の証明]
(2)	イ [$BQ = \sqrt{a}$ cm の証明]

(1)



ア

 $\triangle ABQ$ と $\triangle QBP$ において

三角形の内角の和は 180° だから

また $\angle AOP = 180^\circ$ で1つの弧に対する円周角はその弧に対する中心角の半分だから $\angle AQP = 90^\circ$

②, ③より $\angle \text{BAQ} = \angle \text{BQP} \cdots \textcircled{4}$

$$\triangle ABQ \simeq \triangle QBP$$

イ

 $\triangle ABQ \sim \triangle QBP$ だから

BQ = x cm とすると

ゆえに $x^2 = a$

x は a の平方根のうち正の方だから $x = \sqrt{a}$

したがって $BQ = \sqrt{a}$ cm

解説

(1)

線分 AP の垂直二等分線を作図し、中心 O を求める。

次に点 O を中心として半径が OA の円をかく。

円 O と半直線 BC との交点を点 Q とすればよい。

(2)

ア

 $\triangle ABQ$ と $\triangle QBP$ において

BQ ⊥ APだから∠ABQ = ∠QBP…①

三角形の内角の和は 180° だから $\angle AQB + \angle BAQ = 180^\circ - \angle ABQ = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$

また $\angle AOP = 180^\circ$ で1つの弧に対する円周角はその弧に対する中心角の半分だから $\angle AQP = 90^\circ$

よって $\angle AQB + \angle BQP = 90^\circ \dots \textcircled{3}$

②, ③より $\angle \text{BAQ} = \angle \text{BQP} \cdots \text{④}$

①, ④より2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABQ \sim \triangle QBP$

1

$$\triangle ABQ \sim \triangle QBP \text{ だから } AB:QB = BQ:BP$$

BQ = x cm とすると AB = 1 cm, BP = a cm だから $1 : x = x : a$

ゆえに $x^2 = a^2$

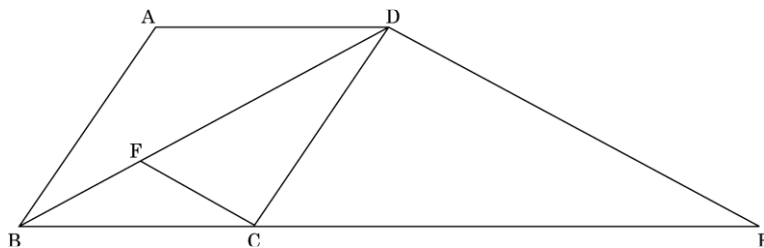
x は a の平方根のうち正の方だから $x = \sqrt{a}$

したがって $BQ = \sqrt{a}$ cm

【問 12】

図のように、ひし形 $ABCD$ と、 $DB=DE$ である二等辺三角形 DBE があります。辺 BE 上に点 C があり、対角線 BD 上に $CF \parallel ED$ となるように点 F をとります。

これについて、次の(1)・(2)に答えなさい。



(広島県 2003 年度)

(1) $\triangle CDF \sim \triangle DEC$ であることを証明しなさい。

(2) ひし形 $ABCD$ の面積が 36 cm^2 , $BD=12 \text{ cm}$ のとき、辺 AD の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	〔仮定〕図において、四角形$ABCD$ はひし形, $DB=DE$, $CF \parallel ED$ 〔結論〕$\triangle CDF \sim \triangle DEC$ 〔証明〕
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle CDF$ と $\triangle DEC$ において

平行線の錯角は等しいから

$$\angle DCF = \angle EDC \cdots \textcircled{1}$$

$CD = CB$ であるから

$$\angle CDF = \angle CBD \cdots \textcircled{2}$$

また $DB = DE$ であるから

$$\angle CBD = \angle DEC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle CDF = \angle DEC \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle CDF \sim \triangle DEC$$

$$(2) \quad 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle CDF$ と $\triangle DEC$ において

平行線の錯角は等しいから

$$\angle DCF = \angle EDC \cdots \textcircled{1}$$

$CD = CB$ であるから

$$\angle CDF = \angle CBD \cdots \textcircled{2}$$

また $DB = DE$ であるから

$$\angle CBD = \angle DEC \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$\angle CDF = \angle DEC \cdots \textcircled{4}$$

①, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle CDF \sim \triangle DEC$$

(2)

ひし形の面積は $\frac{1}{2} \times \text{対角線} \times \text{対角線}$ で求まるから

$$\text{ひし形} ABCD = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$\text{よって} \frac{1}{2} \times AC \times 12 = 36 \text{より, } AC = 6$$

$$AC \text{と} BD \text{の交点を} O \text{とすると} AO = \frac{1}{2} AC = 3, \quad OD = \frac{1}{2} BD = 6$$

またひし形の対角線は垂直に交わるから $\angle AOD = 90^\circ$

$\triangle AOD$ に三平方の定理を用いて

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$

【問 13】

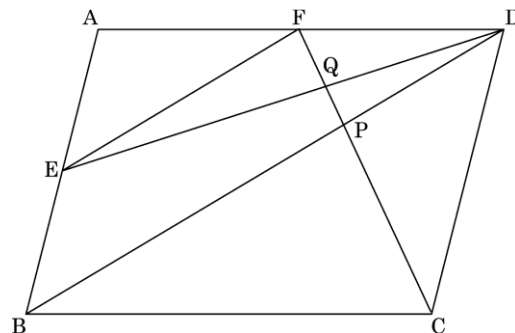
図のように、平行四辺形 $ABCD$ の辺 AB , AD の中点をそれぞれ E , F とし、対角線 BD と線分 CF の交点を P , 線分 CF と線分 DE の交点を Q とする。

次の(1), (2)に答えなさい。

(山口県 2003 年度)

(1) $\triangle EFQ \sim \triangle DPQ$ であることを証明しなさい。

(2) $FP = 3 \text{ cm}$ のとき、線分 PQ の長さを求めなさい。



解答欄

(1)	証明
(2)	cm

解答

(1)

証明

$\triangle EFQ$ と $\triangle DPQ$ で

対頂角は等しいから

$$\angle EQF = \angle DQP \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABD$ において

点E, F は辺AB, AD の中点だから中点連結定理により

$EF \parallel BD$

錯角が等しいので

$$\angle FEQ = \angle PDQ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle EFQ \sim \triangle DPQ$

$$(2) \quad \frac{6}{5} \text{ cm}$$

解説

(1)

$\triangle EFQ$ と $\triangle DPQ$ において

対頂角は等しいから

$$\angle EQF = \angle DPQ \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABD$ において点E, F は辺AB, AD の中点だから

中点連結定理により $EF \parallel BD$

錯角が等しいので

$$\angle FEQ = \angle PDQ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle EFQ \sim \triangle DPQ$

(2)

$\triangle BCP$ と $\triangle DFP$ において

四角形ABCDは平行四辺形だから, 錯角が等しいので

$$\angle BCP = \angle DFP, \angle CBP = \angle FDP$$

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BCP \sim \triangle DFP$

点Fは辺ADの中点で $AD = BC$ だから

$$DP : BP = DF : BC = 1 : 2$$

また中点連結定理により

$$EF = \frac{1}{2} BC = \frac{3}{2} DP$$

よって $PQ = x$ cm とすると

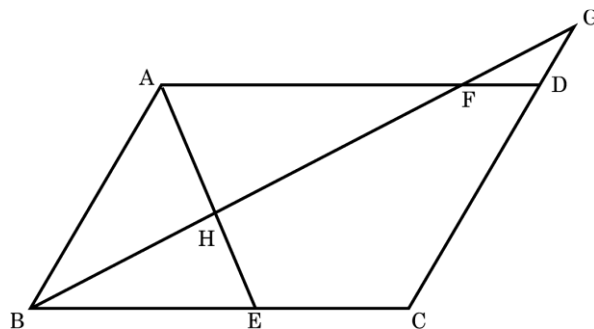
$$PQ : QF = x : (3 - x) = DP : EF = 1 : \frac{3}{2}$$

$$3 - x = \frac{3}{2} x$$

$$\text{これから } x = \frac{6}{5} \text{ cm}$$

【問 14】

$AB=7\text{ cm}$, $BC=10\text{ cm}$, $\angle ABC=60^\circ$ の平行四辺形 $ABCD$ がある。図のように、辺 BC 上に $BE=6\text{ cm}$ となる点 E , 辺 AD 上に $AF=8\text{ cm}$ となる点 F をとり、点 B と点 F を通る直線と辺 CD を延長した直線との交点を G とする。また、点 A と点 E を結び、線分 AE と線分 BF との交点を H とする。



次の(1)は指示にしたがって答え、(2), (3)は の中
にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2003 年度)

- (1) 上の図において相似な三角形を1組選び、その2つの三角形が相似であることを右の の中に証明せよ。

証明

- (2) 平行四辺形 $ABCD$ の面積は cm^2 である。

- (3) $HF:FG = \text{} : \text{}$ である。

解答欄

問題中の解答欄に記載しなさい。

解答

(1)

証明

$\triangle AHF$ と $\triangle EHB$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AHF = \angle EHB \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle FAH = \angle BEH \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AHF \sim \triangle EHB$$

$$(2) \ 35\sqrt{3}$$

$$(3) \ 16, 7$$

解説

(1)

三角形の相似の条件は

① 2組の角がそれぞれ等しい

② 3組の辺の比が等しい

③ 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

である。

これらの条件のどれかがあてはまる2つの三角形を考える。

次はその1つの例である。

($\triangle AHF$ と $\triangle EHB$ においての例)

$\triangle AHF$ と $\triangle EHB$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AHF = \angle EHB \cdots \textcircled{1}$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle FAH = \angle BEH \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AHF \sim \triangle EHB$$

(2)

$$\text{平行四辺形 } ABCD \text{ の高さは } 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{面積} = \text{底辺} \times \text{高さ} = 10 \times \frac{7\sqrt{3}}{2} = 35\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(3)

$$\triangle DFG \sim \triangle AFB$$

(頂角が等しいので $\angle DFG = \angle AFB$)

平行線の錯角が等しいので $\angle FGD = \angle FBA$ より) なので

$$DF:AF = FG:FB = 2:8 = 1:4 \cdots \textcircled{1}$$

また $\triangle AHF \sim \triangle EHB$ ((1)より) なので

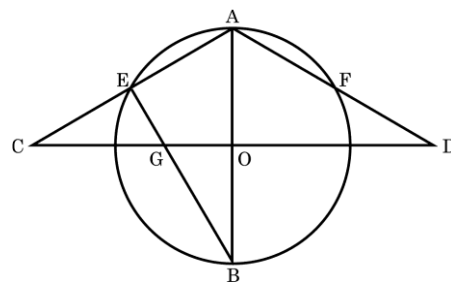
$$AF:EB = HF:HB = 8:6 = 4:3$$

$$HF:FB = 4:7 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ から } HF:FG = 4:\frac{7}{4} = 16:7$$

【問 15】

図のように、 AB を直径とする円 O がある。また、辺 CD の中点が中心 O と重なり、 $\angle CAD$ が鈍角である二等辺三角形 ACD がある。辺 AC 、 AD と円 O との交点をそれぞれ E 、 F とし、 BE と CD との交点を G とする。



このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(佐賀県 2003 年度)

(1) $\triangle ACO \sim \triangle GCE$ であることを証明しなさい。

(2) $AB = 6 \text{ cm}$ 、 $\angle CAD = 120^\circ$ のとき、次の(ア)～(ウ)の各問いに答えなさい。

(ア) EG の長さを求めなさい。

(イ) 点 A をふくむ $\widehat{EF}$ の長さを求めなさい。

(ウ) $\triangle ACD$ と円 O の重なった部分の面積を求めなさい。

解答欄

(1)			
(2)	(ア)	cm	
	(イ)	cm	
	(ウ)	cm ²	

解答

(1)

証明

$\triangle ACO$ と $\triangle GCE$ において

$\angle ACO = \angle GCE$ (共通) …①

点Oは二等辺三角形の底辺の midpoint でABは円Oの直径だから

$\angle AOC = \angle GEC = 90^\circ$ …②

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACO \sim \triangle GCE$

(2)

(ア) $\sqrt{3}$ cm

(イ) 2π m

(ウ) $\frac{3}{2}\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm²

解説

(1)

$\triangle ACO$ と $\triangle GCE$ において

$\angle ACO = \angle GCE$ (共通) …①

点Oは二等辺三角形の底辺の midpoint でABは円Oの直径だから

$\angle AOC = \angle GEC = 90^\circ$ …②

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ACO \sim \triangle GCE$

(2)

(ア)

$\angle CAO = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$

OA=OEより $\triangle OAE$ は正三角形でAE=OA=3

また $\triangle ACO$ は内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形だから

CA=2OA=6

よってCE=CA-AE=3

$\triangle GCE$ も内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形だから

$EG = \frac{1}{\sqrt{3}} CE = \sqrt{3}$ cm

(イ)

$\triangle OAE$ は正三角形だから $\angle EOA = 60^\circ$

よって $\widehat{EF} = 2\widehat{EA} = 2 \times 2\pi \times 3 \times \frac{60}{360} = 2\pi$ cm

(ウ)

CGと円Oとの交点をHとすると $\angle EOH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

求める部分の面積はおうぎ形OEHと $\triangle OAE$ の和の2倍の面積に等しい。

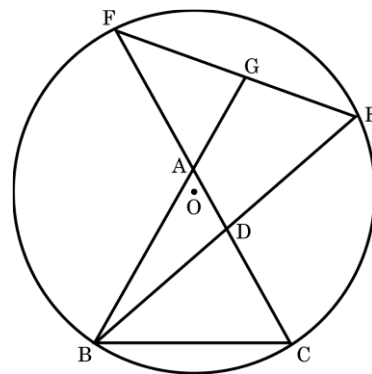
1辺がaの正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ で表せるから

$(\pi \times 3^2 \times \frac{60}{360} + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3) \times 2 = \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm²

【問 16】

図のように、正三角形 ABC の頂点 B, C を通る円 O がある。辺 AC 上に2点 A, C とは異なる点 D をとり、 BD の延長と円 O との交点を E とする。また、 CA の延長と円 O との交点を F 、 BA の延長と線分 EF との交点を G とする。このとき、次の各問いに答えなさい。

(熊本県 2003 年度)



(1) $\triangle BCD \sim \triangle FAG$ であることを証明しなさい。

(2) $AB=6$ cm, $CD=4$ cm, $AF=5$ cm のとき、線分 EG の長さを求めなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

解答欄

(1)	証明
(2)	cm

証明

 $\triangle BCD$ と $\triangle FAG$ において

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$$\angle BCD = \angle CAB \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle \text{CAB} = \angle \text{FAG} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle BCD = \angle FAG \cdots \textcircled{3}$$

また $\angle DBC$ と $\angle GFA$ は $\widehat{CE}$ に対する円周角だから

$$\angle \text{DBC} = \angle \text{GFA} \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BCD \sim \triangle FAG$$

(2) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ cm

解説

(1)

証明

 $\triangle BCD$ と $\triangle FAG$ において

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$$\angle BCD = \angle CAB \cdots \textcircled{1}$$

対頂角は等しいから

$$\angle CAB = \angle FAG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle BCD = \angle FAG \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\angle DBC$ と $\angle GFA$ は弧 CE に対する円周角だから

$$\angle \text{DBC} = \angle \text{GFA} \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BCD \sim \triangle FAG$$

(2)

右の図のように $BH \perp AC$ とする。

$$\triangle ABC \text{は正三角形より } BH = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{HD} = \text{CD} - \text{CH} = 4 - 3 = 1$$

三平方の定理により

$$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7}$$

 $\triangle BCD \sim \triangle FAG$ より

$$BD:BC=FG:FA$$

$$2\sqrt{7}:6=\text{FG}:5$$

$$\text{FG} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

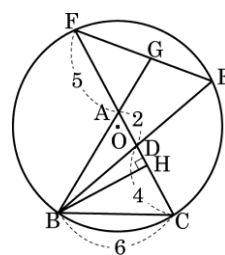
 $\triangle BCD \sim \triangle FED$ より

$$BD:BC=FD:FE$$

$$2\sqrt{7}:6=(5+2):\text{FE}$$

$$FE=3\sqrt{7}$$

$$\text{よって EG} = \text{FE} - \text{FG} = 3\sqrt{7} - \frac{5\sqrt{7}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3} \text{ cm}$$

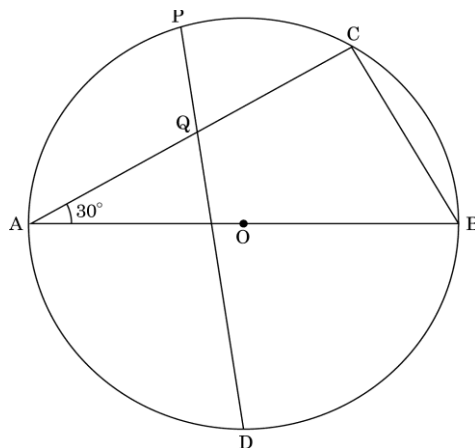


【問 17】

図 I のように、 $\triangle ABC$ の各頂点および点 D は、辺 AB を直径とする円 O の円周上にあり、 $\angle CAB = 30^\circ$ 、 $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ である。また、図のように点 P を $\widehat{AC}$ 上にとり、弦 AC と弦 PD との交点を Q とする。 $AB = 12 \text{ cm}$ として、次の(1)～(4)の問いに答えなさい。

(宮崎県 2003 年度)

図 I



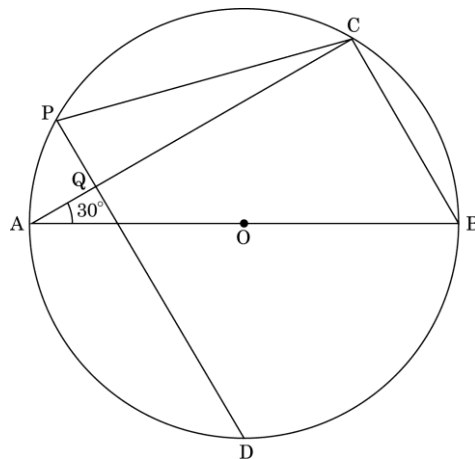
(1) $\angle ACB$ の大きさを求めなさい。

(2) 点 B を含む $\widehat{CD}$ の長さを求めなさい。ただし、円周率は π とする。

(3) $\triangle PQA \sim \triangle CQD$ であることを証明しなさい。

(4) 図 II は、図 I において、点 P が $\widehat{AC}$ 上を動いて $PD \parallel CB$ となったものである。このとき、 $\triangle PQC$ の周の長さを求めなさい。

図 II



解答欄

(1)	$\angle ACB =$ 度
(2)	$\widehat{CD} =$ cm
(3)	証明
(4)	cm

解答

(1) $\angle ACB = 90^\circ$ 度

(2) $\widehat{CD} = 5\pi$ cm

(3)

証明

$\triangle PQA$ と $\triangle CQD$ で

対頂角は等しいから

$\angle PQA = \angle CQD \cdots \textcircled{1}$

$\angle APQ$ と $\angle DCQ$ は $\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$\angle APQ = \angle DCQ \cdots \textcircled{2}$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle PQA \sim \triangle CQD$

(4) $6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ cm

解説

(1)

ABは直径より半円の弧に対する円周角は 90° だから $\angle ACB = 90^\circ$

(2)

OとDを結ぶ。

$\widehat{AD} = \widehat{BD}$ より $\angle BOD = 90^\circ$

また中心角と円周角の関係より $\angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ$

よって $\angle COD = \angle BOC + \angle BOD = 150^\circ$

だから $\widehat{CD} = \pi \times 12 \times \frac{150}{360} = 5\pi$ cm

(3)

$\triangle PAQ$ と $\triangle CQD$ において

対頂角は等しいから

$\angle PQA = \angle CQD \cdots \textcircled{1}$

$\widehat{AD}$ に対する円周角だから

$\angle APQ = \angle DCQ \cdots \textcircled{2}$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle PQA \sim \triangle CQD$

(4)

PD // CBのとき、平行線の錯角は等しいから

$\angle PQC = \angle ACB = 90^\circ$

また $\widehat{AD}$ の円周角だから $\angle ACD = 45^\circ$

よって $\triangle CQD$ は直角二等辺三角形となり

$\triangle PQA \sim \triangle CQD$ より $\triangle PAQ$ も直角二等辺三角形である。

したがって $PQ = AQ$

$\triangle ABC$ は内角が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角形だから

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 6\sqrt{3}$$

一方 $\angle CDP = 45^\circ$ より $\angle COP = 2\angle CDP = 90^\circ$

$\triangle COP$ は直角二等辺三角形だから

$$CP = \sqrt{2}OC = 6\sqrt{2}$$

したがって $\triangle PQC$ の周の長さは

$$CP + PQ + QC$$

$$= CP + AQ + QC$$

$$= CP + AC$$

$$= 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

