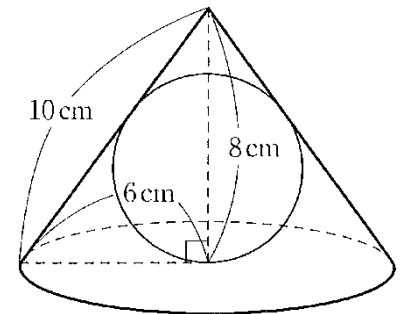


5.空間図形の複合問題（長さ・面積・体積・角度ほか）【2011 年度出題】

【問 1】

図のように、底面の半径が 6 cm、高さが 8 cm、母線が 10 cm の円すいがあり、円すいの底面と母線に接した球がある。次の(1)、(2)に答えなさい。

（青森県 2011 年度 後期）



(1) この円すいの体積を求めなさい。

(2) この球の半径を求めなさい。

解答欄

(1)	cm ³
(2)	cm

解答

(1) 96π cm³

(2) 3 cm

解説

(2)

球の半径を r cm とする。

相似の関係を利用して

$$r:6=(8-r):10$$

$$10r=6(8-r)$$

$$10r=48-6r$$

$$16r=48$$

$$r=3 \text{ cm}$$

【問 2】

図1は、 $OA=OB=OC=OD=\sqrt{10}$ cm、 $AB=BC=CD=DA=2$ cm の正四角錐 $OABCD$ です。点 H は、正方形 $ABCD$ の対角線の交点です。また、図2は、 $\triangle OBC$ が下になるように、正四角錐 $OABCD$ を平面 P 上に置いたようすを表しています。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(岩手県 2011 年度)

図1

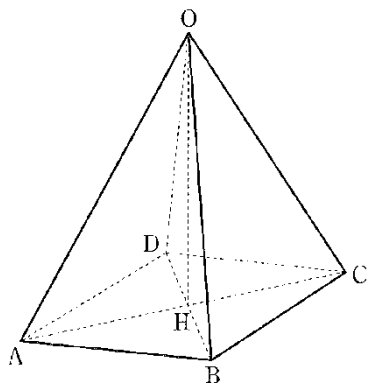
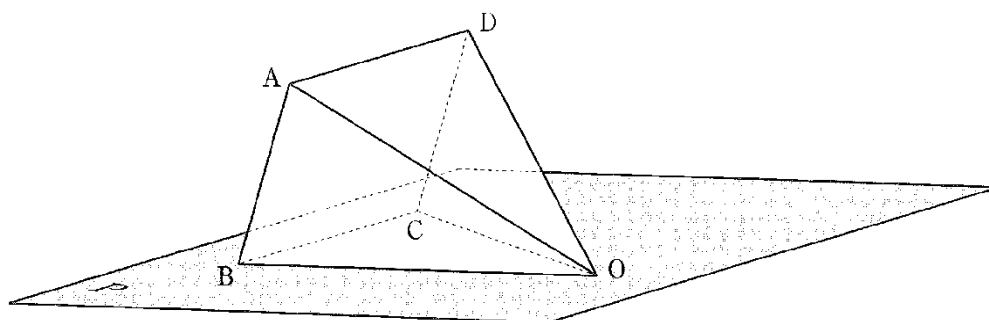


図2



問1 線分 AH の長さを求めなさい。

問2 $\triangle OBC$ の面積を求めなさい。

問3 図2において、点 A と平面 P との距離を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm ²
問3	cm

解答

問1 $\sqrt{2}$ cm

問2 3 cm^2

問3 $\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$

解説

問3

A から平面 P に垂線をひき交点を K とする。

三角錐 OABC の体積の関係より

$$\frac{1}{3} \times \triangle OBC \times AK = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH$$

$$OH = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

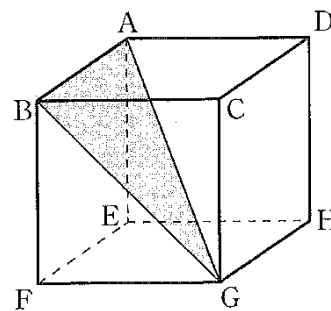
$$\frac{1}{3} \times 3 \times AK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2\sqrt{2}$$

$$AK = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

【問 3】

図のように、1 辺が 6 cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。この立方体の 3 つの頂点 A, B, G を結んでできる $\triangle ABG$ について、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(秋田県 2011 年度)



(1) 辺 AG を底辺としたときの高さを求めなさい。

(2) 辺 AG を軸として 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率を π とする。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) $2\sqrt{6}$ cm

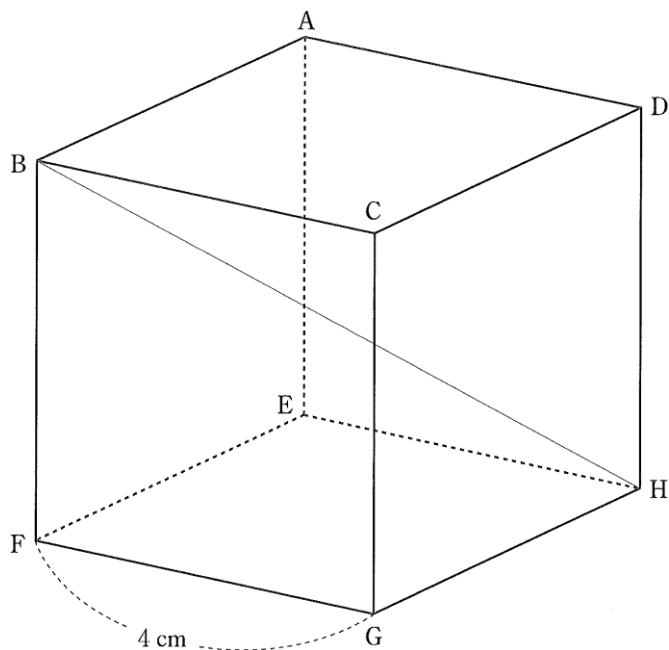
(2) $48\sqrt{3} \pi$ cm³

【問 4】

図のような、1 辺の長さが 4 cm の立方体がある。
このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(福島県 2011 年度)

問1 この立方体の対角線 BH の長さを求めなさい。



問2 この立方体の対角線 BH 上に点 P をとり、P を頂点とし四角形 EFGH を底面とする四角すいの体積がこの立方体の体積の $\frac{1}{8}$ となるようにする。また、直線 GP と面 AEHD との交点を Q とする。

(1) 線分 BP と線分 PH の長さの比を求めなさい。

(2) 線分 PQ の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	(1)	BP:PH= :
	(2)	cm

解答

問1 $4\sqrt{3}$ cm

問2

(1) $BP:PH=5:3$

(2) $\frac{3\sqrt{43}}{10}$ cm

解説

問2

(2)

$QH \parallel BG$ より

$QP:PG=HP:PB=3:5$

$QH:AH=QH:BG=3:5$

$$QH = \frac{3}{5} AH = \frac{3}{5} \times 4\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{5} \text{ cm}$$

$\triangle QGH$ で

$$\text{三平方の定理より } QG = \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{43}}{5} \text{ cm}$$

$QP:PG=HP:PB=3:5$ より

$$PQ = \frac{3}{8} QG = \frac{3}{8} \times \frac{4\sqrt{43}}{5} = \frac{3\sqrt{43}}{10} \text{ cm}$$

【問 5】

図1のように、 $AB=AC=6\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ の二等辺三角形 ABC が平面 $\mathbf{P}$ 上に垂直に立っている。この $\triangle ABC$ において、辺 AB 、 BC 、 CA の中点をそれぞれ L 、 M 、 N とする。次に、図2のように、 $\triangle ABC$ を、 $AM \perp \mathbf{P}$ を保った状態で、線分 AM を折り目として折り曲げる。折り曲げた状態で 2 点 L 、 N を線分で結び、その中点を K とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2011 年度)

図1

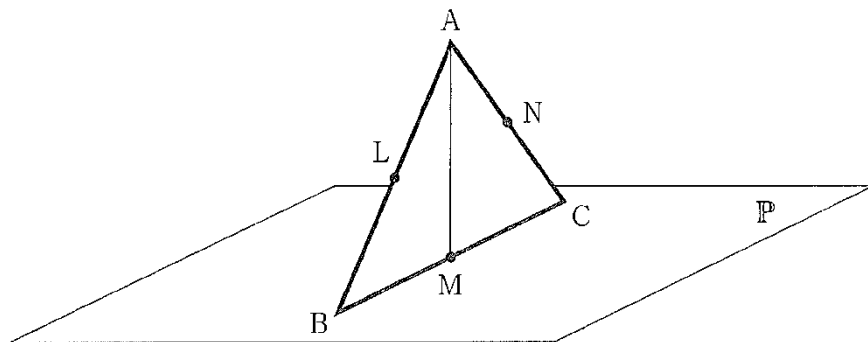
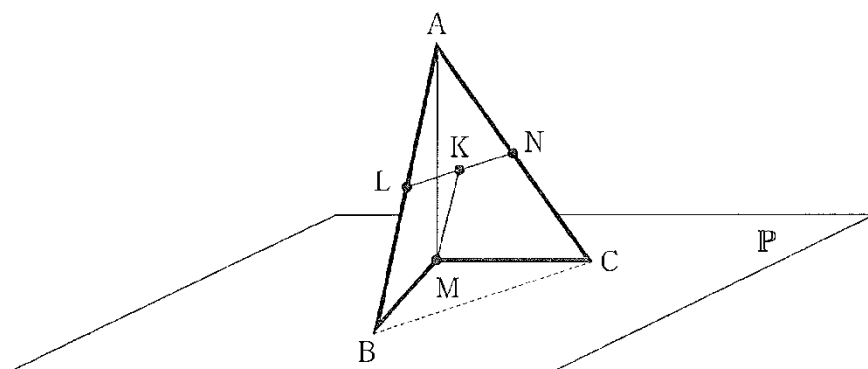


図2



問1 $\angle BMC=60^\circ$ となるように折り曲げたとき、線分 LN の長さを求めなさい。

問2 $\triangle BMC$ の面積が最も大きくなるように折り曲げたとき、線分 KM の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm

解答

問1 2 cm

問2 $\sqrt{7}$ cm

解説

問2

△BMC の底辺を CM とすると

高さは M を中心とする半径 CM=4 cm の半円の周上にある点 B から CM におろした垂線の長さになる。

面積が最も大きくなるのはこの垂線の長さが最も長くなるときなので

∠BMC=90° で BM=4 cm が高さになるときである。

このとき AK と BC の交点を H とする。

三平方の定理より

$$BC = \sqrt{2} \text{ BM} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AL:LB=AN:NC=1:1 \text{ より}$$

中点連結定理から

$$LN \parallel BC$$

$$LN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$KN = \frac{1}{2} LN = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{また } AK:KH=AN:NC=1:1 \text{ より}$$

$$HC=2KN=2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{三平方の定理より } AH = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

K から MH に垂線 KT をひくと KT ∥ AM より

$$HT:TM=HK:KH=1:1$$

△KHT と △KMT で

KT は共通で ∠KTH = ∠KTM = 90° , TH = TM より

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle KHT \cong \triangle KMT$$

$$\text{よって } KM=KH = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} = \sqrt{7} \text{ cm}$$

【問 6】

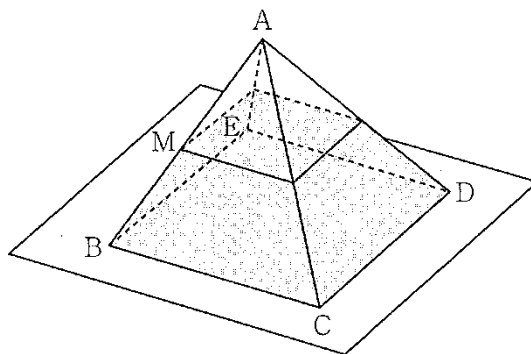
図1の立体 $ABCDE$ は, 正四角すいの形をした容器で, 各辺の長さはすべて 8 cm である。図1のように, この容器に水を入れて密閉し, 底面 $BCDE$ を下にして水平な台の上に置いたところ, 水面が辺 AB の中点 M と重なった。

このとき, 次の問1～問3に答えなさい。ただし, 容器の厚さは考えないものとする。

(群馬県 2011 年度)

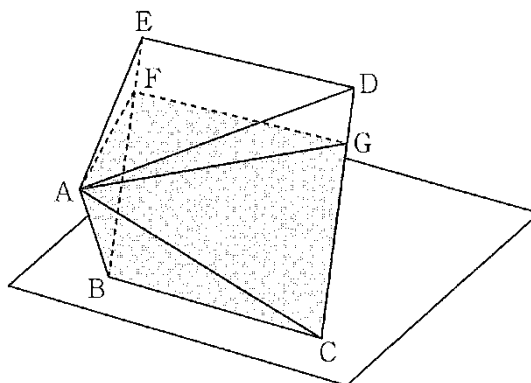
問1 この容器の高さを求めなさい。

図1



問2 この容器の体積と, 容器に入っている水の体積の比を求めなさい。

図2



問3 この容器を, 辺 BC を水平な台から離れないようにしたまま, 辺 BC を軸として, 水面が頂点 A と重なるまで回転させた。このとき, 図2のように水面は三角形となり, これを三角形 AFG とおく。ただし, F, G は, それぞれ辺 BE, CD 上の点である。次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 CG の長さを求めなさい。

(2) 水面となる三角形 AFG の面積を求めなさい。

解答欄

問1	cm	
問2	:	
問3	(1)	cm
	(2)	cm^2

解答

問1 $4\sqrt{2}$ cm

問2 8:7

問3

(1) 7 cm

(2) $4\sqrt{41}$ cm²

解説

問1

底面の正方形の対角線の交点を H とする。

$$BD = \sqrt{2} \ BC = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BH = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

△ABH において

$$\text{三平方の定理より } AH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

問2

空洞な部分の四角すいの体積: 正四角すい A-BCDE = AM³:AB³ = 1³:2³ = 1:8

よってこの容器の体積と容器に入っている水の体積の比は

$$8:(8-1)=8:7$$

問3

(1)

CG = x cm とする。

水の体積の関係より

$$\frac{1}{3} \times 8^2 \times 4\sqrt{2} \times \frac{7}{8} = \frac{1}{3} \times 8 \times x \times 4\sqrt{2}$$

これを解いて $x = 7$ cm

(2)

CD の中点を K とおくと△ACD は正三角形より

$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$GK = \frac{8}{2} - 1 = 3 \text{ cm}$$

$$\triangle AKG \text{ において } \angle AKG = 90^\circ, AG = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{57} \text{ cm}$$

$$FG \text{ の中点を } T \text{ とすると } GT = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

△AGT において $\angle ATG = 90^\circ$ より

$$AT = \sqrt{(\sqrt{57})^2 - 4^2} = \sqrt{41} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle AFG = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{41} = 4\sqrt{41} \text{ cm}^2$$

【問 7】

ひろみさんのクラスでは、次の手順でいろいろな円すいをつくり、わかったことを班ごとにまとめることになった。

手順1 半径 10 cm の円形の紙を用意し、図1のように、円周上の点 A から中心 O まで直線の切り込みを入れる。

手順2 図1の紙を、紙の一部が内側にかくれるように切り込み部分をずらして、図2のように、点 O を頂点とする円すいの側面をつくる。なお、側面の外側にずれる切り込み部分を OA、側面の内側にずれる切り込み部分を OA' とする。

手順3 図3のように、円すいの側面に合う底面の紙を用意し、円すいをつくる。

図1

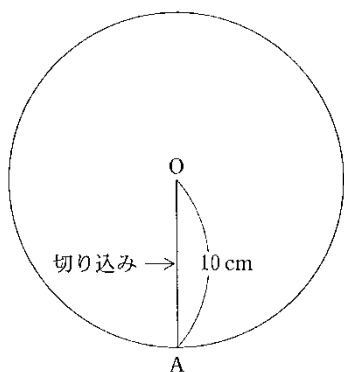


図2

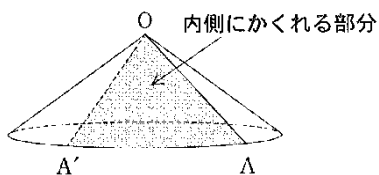
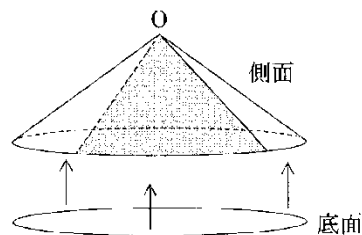


図3



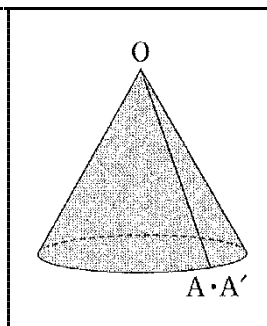
ひろみさんの班は、図2の内側にかくれる部分の面積に着目し、わかったことをまとめた。

下の のひろみさんの班がまとめたことについて、次の問1、問2に答えなさい。ただし、円周率は π とし、紙の厚さは考えないものとする。

(千葉県 2011 年度 後期)

ひろみさんの班がまとめたこと

- ◎ 内側にかくれる部分の面積を変えても、円すいの ① は変わらない。
- ◎ 内側にかくれる部分の面積を x 、円すいの側面積を y として、 y を x の式で表すと、② の式になる。
- ◎ 右の図のように、OA と OA' が重なるまでずらして、側面の紙全体を二重にすると、円すいの底面積は ③ cm^2 になる。
- ◎ 内側にかくれる部分の面積が ④ cm^2 のとき、円すいの高さは 8 cm になる。



問1 ① , ② の中に入る最も適当なものを、下のア～カのうちからそれぞれ一つずつ選び、符号で答えなさい。

- ア 体積
- イ 表面積
- ウ 母線の長さ
- エ 比例
- オ 反比例
- カ 一次関数

問2 ③ , ④ の中に入る数をそれぞれ求めなさい。

解答欄

問1	①	
	②	
問2	③	
	④	

解答

問1

① ウ

② カ

問2

③ 25π

④ 40π

解説

問2

③

側面の紙が2重になっているとき底面の半径を r cm とする。
底面の円周は半径 10 cm の半円の弧の長さと等しくなるので

$$2\pi r = 2\pi \times 10 \times \frac{1}{2}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$\text{よって底面積は } \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

問2

④

円すいの高さが 8 cm のとき底面の半径を x cm とすると

$$\text{三平方の定理より } x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm}$$

円すいの側面で内側に隠れていない部分のおうぎ形の中心角を y° とすると
そのおうぎ形の弧の長さは底面の円周の長さに等しいので

$$2\pi \times 10 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 6$$

$$x = 216^\circ$$

$$\text{よって隠れている部分のおうぎ形の中心角は } 360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$$

$$\text{したがって求める面積は } \pi \times 10^2 \times \frac{144}{360} = 40\pi \text{ cm}^2$$

【問 8】

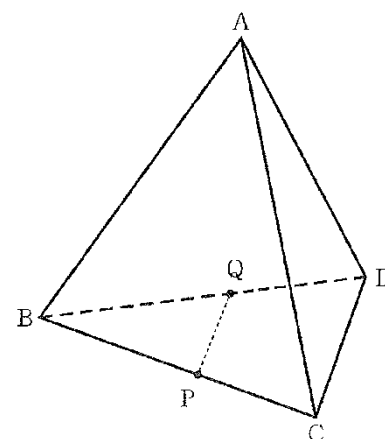
図1に示した立体 $A-BCD$ は、1 辺の長さが 6 cm の正四面体である。点 P は、頂点 C を出発し、辺 CB 、辺 BA 上を毎秒 1 cm の速さで動き、12 秒後に頂点 A に到着する。点 Q は、点 P が頂点 C を出発するのと同時に頂点 B を出発し、辺 BD 、辺 DC 上を、点 P と同じ速さで動き、12 秒後に頂点 C に到着する。点 P と点 Q を結ぶ。

次の各問に答えよ。

(東京都 2011 年度)

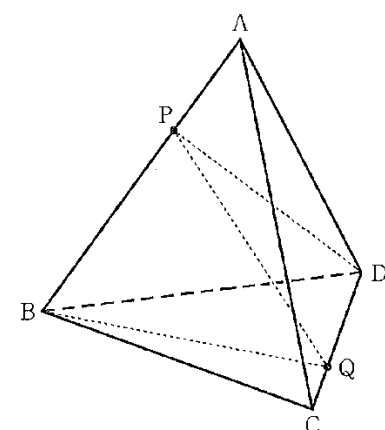
問1 図1において、点 P が辺 CB 上にあるとき、辺 CB と線分 PQ が垂直になるのは、点 P が頂点 C を出発してから何秒後か。

図1



問2 図2は、図1において、点 P が頂点 C を出発してから 10 秒後のとき、頂点 B と点 Q 、頂点 D と点 P をそれぞれ結んだ場合を表している。立体 $P-BQD$ の体積は、立体 $A-BCD$ の体積の何分のいくつか。

図2



解答欄

問1	秒後
問2	

解答

問1 4 秒後

問2 $\frac{4}{9}$

解説

問1

2 点 P, Q が出発してからの時間を x 秒とする。

点 P が CB 上にあり $CB \perp PQ$ となるときの

$\triangle QBP$ は, $\angle QBP = 60^\circ$, $\angle QPB = 90^\circ$ の直角三角形だから

$$BP:QB=1:2$$

$$BP=6-x \text{ cm}$$

$QB=x \text{ cm}$ と表せるので

$$(6-x):x=1:2$$

$$2(6-x)=x$$

$$12-2x=x$$

$$3x=12$$

$$x=4 \text{ 秒後}$$

問2

$QD=4 \text{ cm}$, $CD=6 \text{ cm}$ より

$$\triangle BQD = \frac{4}{6} \triangle BCD = \frac{2}{3} \triangle BCD$$

また A から底面 BCD に垂線 AH をひき P から底面 BCD に垂線 PK をひくと

$$BP=4 \text{ cm}, BA=6 \text{ cm}$$

$PK \parallel AH$ より

$$PK = \frac{4}{6} AH = \frac{2}{3} AH$$

角錐の体積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$ だから

$$\text{立体 P-BQD の体積} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \triangle BCD \times \frac{2}{3} AH = \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times AH \right) = \frac{4}{9} \times \text{立体 A-BCD の体積}$$

よって $\frac{4}{9}$ 倍

【問 9】

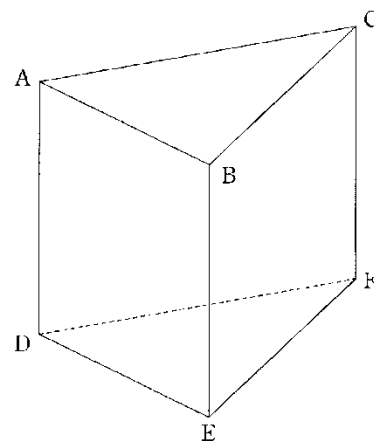
図1～図3は、いずれも $AC=4\text{ cm}$, $AD=3\text{ cm}$, 底面 DEF の面積が 9 cm^2 の三角柱である。ただし、底面 DEF の内角はすべて鋭角とする。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(石川県 2011 年度)

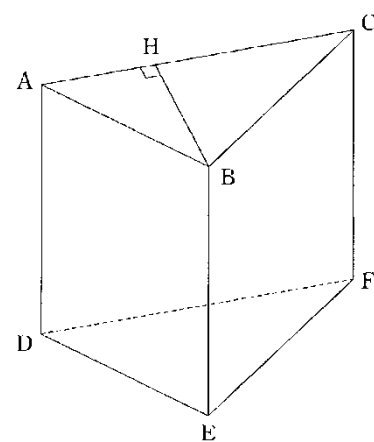
問1 図1において、辺 AC とねじれの位置にある辺をすべて書きなさい。

図1



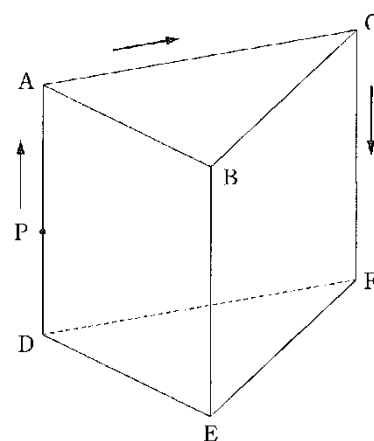
問2 図2のように、点 B から辺 AC に垂線を引き、辺 AC との交点を H とする。このとき、線分 EH の長さを求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

図2



問3 図3のように、点 P が毎秒 1 cm の速さで、 D から F まで $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$ の順に、辺 DA , AC , CF 上を動く。点 P が D を動きはじめてから x 秒後の三角錐 $PDEF$ の体積を $y\text{ cm}^3$ として、 P が D から F まで動いたときの x と y の関係をグラフに表しなさい。

図3



問1	
問2	〔計算〕 答 cm
問3	(cm³) y 10 5 0 0 5 10 x (秒)

解答

問1 辺 BE, 辺 DE, 辺 EF

問2

〔計算〕

$\triangle ABC$ の面積が 9 cm^2 より

$$\frac{1}{2} \times 4 \times BH = 9$$

$$\text{よって } BH = \frac{9}{2}$$

$\triangle BHE$ は直角三角形であるから

$$EH^2 = BH^2 + BE^2$$

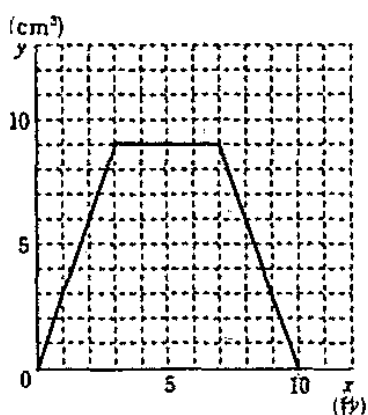
$$= \frac{81}{4} + 9 = \frac{117}{4}$$

$EH > 0$ より

$$EH = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{答 } \frac{3\sqrt{13}}{2} \text{ cm}$$

問3



解説

問2

$$\triangle DEF = \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BH \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times BH = 9$$

$$BH = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

$\triangle EBH$ において

$$\angle EBH = 90^\circ \text{ より } EH = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2} \text{ cm}$$

問3

$0 \leq x \leq 3$ のとき P は DA 上にある。

$$\text{このとき } y = \frac{1}{3} \times \triangle DEF \times PD = \frac{1}{3} \times 9 \times x = 3x$$

$3 \leq x \leq 7$ のとき P は AC 上にある。

$$\text{このとき } y = \frac{1}{3} \times \triangle DEF \times AD = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 9$$

$7 \leq x \leq 10$ のとき P は CF 上にある。

$$\text{このとき } y = \frac{1}{3} \times \triangle DEF \times PF = \frac{1}{3} \times 9 \times (10 - x) = -3x + 30$$

【問 10】

$AB=6$ cm, $AD=2$ cm, $AE=3$ cm である直方体 $ABCD-EFGH$ がある。

このとき, 次の問1, 問2に答えなさい。

(山梨県 2011 年度)

問1 長方形 $AEGC$ の対角線 AG の長さを求めなさい。

問2 面 DEB と対角線 AG の交点を P とする。

このとき, 次の(1)～(3)に答えなさい。

(1) 直線 EP と面 $ABCD$ の交点を Q とする。この点 Q は面 $ABCD$ 上のどこにあるか簡潔に書きなさい。ただし, 点 Q の位置が 1 点に決まるように書くこと。

(2) $AP:PG$ を, 最も簡単な整数の比で求めなさい。また, その比が求められた理由を, 「相似」という言葉を使って簡潔に説明しなさい。

(3) 四面体 $PDHC$ の体積を求めなさい。

図1

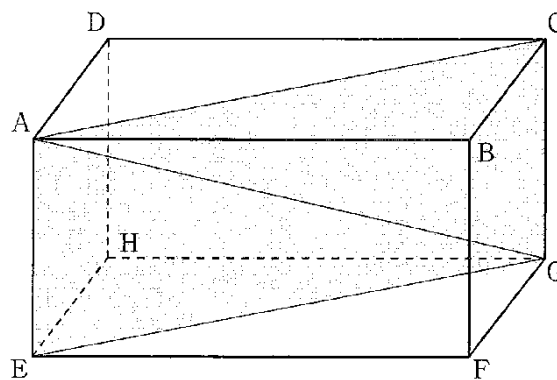
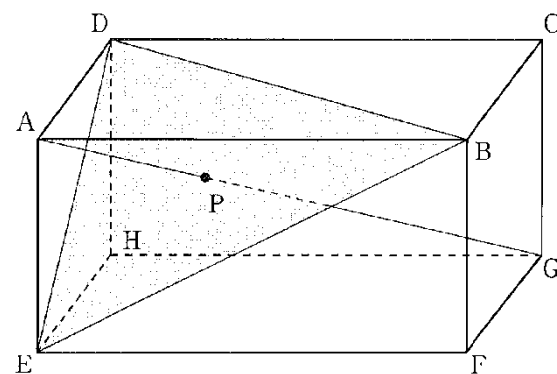


図2



解答欄

問1	cm		
問2	(1)		
	(2)	比	:
		理由	
	(3)	cm ³	

解答

問1 7 cm

問2

(1)

長方形 ABCD の対角線 AC と BD の交点

(2)

比 1:2

理由 $\triangle PQA$ と $\triangle PEG$ が相似で $AQ:GE=1:2$ だから。

(3) 4 cm^3

解説

問2

(3)

P を通り AE に平行な直線が AC と交わる点を J, J を通り DA に平行な直線が CD と交わる点を K とする。

$JK \parallel AD$, $PJ \parallel GC$ より

$JK:AD=CJ:CA=GP:GA=2:3$

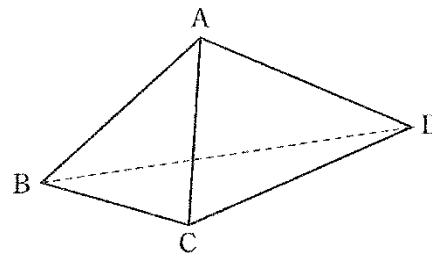
よって $JK=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}\text{ cm}$

したがって四面体 PDHC の体積は $\frac{1}{3}\times \triangle DHC\times JK=\frac{1}{3}\times \frac{1}{2}\times 3\times 6\times \frac{4}{3}=4\text{ cm}^2$

【問 11】

図の三角錐で、 $AB=AD=4\text{ cm}$ 、 $AC=3\text{ cm}$ 、 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=90^\circ$ である。

(長野県 2011 年度)



(1) 三角錐の体積を求めなさい。

(2) $\triangle BCD$ を底面としたときの三角錐の高さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) 8 cm^3

(2) $\frac{6\sqrt{34}}{17}\text{ cm}$

解説

(1)

三角錐の体積は $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 4 = 8\text{ cm}^3$

(2)

三平方の定理より $BC=CD=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\text{ cm}$

$\triangle ABD$ は $AB=AD$ の直角二等辺三角形だから

$BD=\sqrt{2} AD=4\sqrt{2}\text{ cm}$

C から BD に垂線 CH をひくと

$BH=DH=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\text{ cm}$

$CH=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}\text{ cm}$

$\triangle BCD$ を底面としたときの高さを $h\text{ cm}$ とすると

体積は $\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{17} \times h = \frac{2\sqrt{34}}{3} h\text{ cm}^3$

(1)より $\frac{2\sqrt{34}}{3} h = 8$ $h = \frac{6\sqrt{34}}{17}\text{ cm}$

【問 12】

図1の立体は、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $AD=AE=3\text{ cm}$ の直方体である。
このとき、次の問1～問3に答えなさい。

(静岡県 2011 年度)

問1 この直方体の表面積を求めなさい。

問2 $\triangle AEG$ を辺 AE を軸として1回転させてできる立体から、 $\triangle AEF$ を辺 AE を軸として1回転させてできる立体を取り除いた、残りの部分の立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

問3 この直方体において、図2のように、点 E を出発し、2辺 EF 、 FG 上を点 F を通過して点 G まで、毎秒 1 cm の速さで移動する点を P とする。直方体の辺のうち、点 P が点 E を出発してから x 秒後の、直線 AP とねじれの位置にある辺の数を y とする。このとき、 x と y の関係を表すグラフを、図3にかきなさい。ただし、 x の変域を $0 < x < 7$ とする。

図1

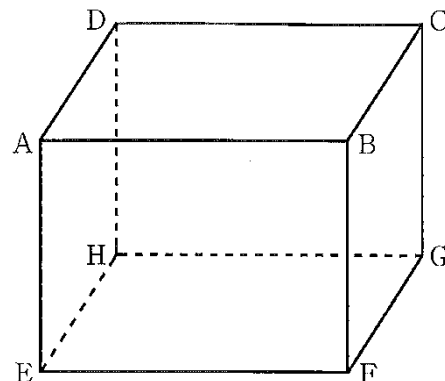


図2

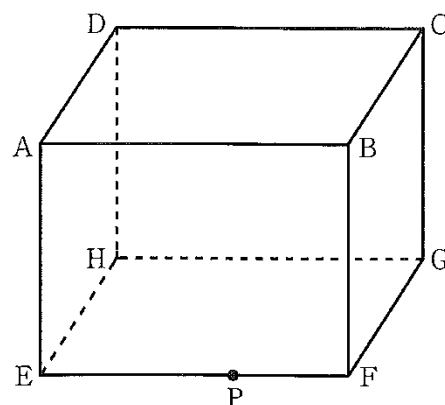
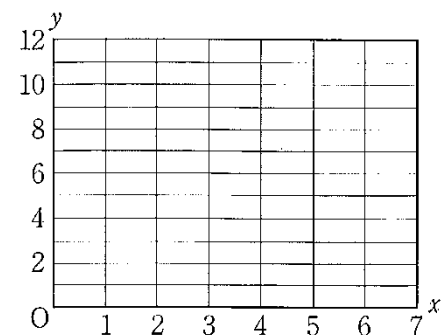
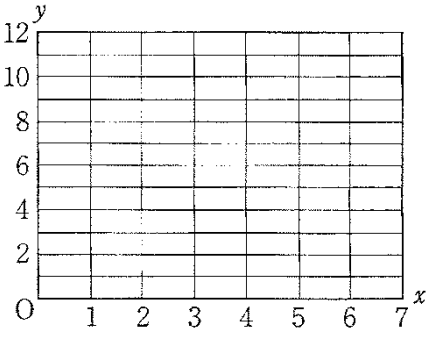


図3



解答欄

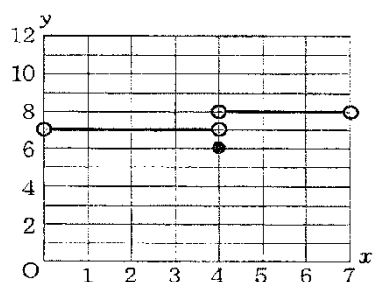
問1	cm^2
問2	cm^3
問3	

解答

問1 66cm^2

問2 $9\pi \text{ cm}^3$

問3



解説

問2

$\triangle EFG$ において三平方の定理より $EG = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$

$\triangle AEG$ を AE を軸として 1 回転させてできる円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times EG^2 \times AE = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 3 = 25\pi \text{ cm}^3$$

$\triangle AEF$ を AE を軸として 1 回転させてできる円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times EF^2 \times AE = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi \text{ cm}^3$$

よって求める体積は $25\pi - 16\pi = 9\pi \text{ cm}^3$

問3

点 P が辺 EF 上の点 E, F をふくまない辺上にあるとき $0 < x < 4$

このとき AP とねじれの位置にある辺は

辺 $EF, DH, HG, GF, CG, BC, DC$ の 7 つより $y=7$

点 P が点 F と一致するとき $x=4$

このとき AP とねじれの位置にある辺は

辺 EF, DH, HG, CG, BC, DC の 6 つより $y=6$

点 P が辺 FG 上の点 F, G をふくまない辺上にあるとき $4 < x < 7$

このとき AP とねじれの位置にある辺は

辺 $EH, EF, HG, BC, BF, CG, CD, DH$ の 8 つより $y=8$

【問 13】

図1で、立体 $ABCDE$ は、底面 $BCDE$ を下にして水平な床に置いてある正四角すいの密閉した容器であり、この容器の高さの半分まで水が入っている。この容器を、図2のように傾けたところ、水面が辺 AC を1辺とし、辺 DE 上の点 F を頂点とする三角形になった。

図1の水面の面積が 12 cm^2 、頂点 A から底面 $BCDE$ までの高さが 8 cm のとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、容器の厚さは考えないものとする。答えは根号をつけたままでよい。

(愛知県 A 2011 年度)

(1) 正四角すい $ABCDE$ の体積は何 cm^3 か、求めなさい。

(2) 図2の FE の長さは何 cm か、求めなさい。

図1

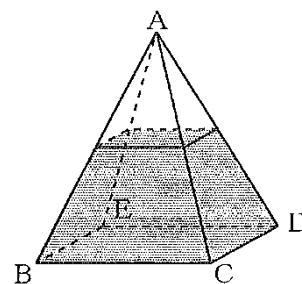
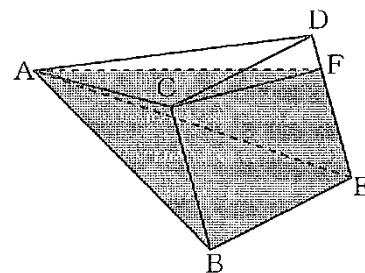


図2



解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) 128 cm^3

(2) $3\sqrt{3} \text{ cm}$

解説

(1)

容器の空洞部分と正四角すい ABCD は相似でありその相似比は高さの比と一致するので 1:2

よって水面の正方形の面積:正方形 BCDE = $1^2:2^2$

12:正方形 BCDE = 1:4

正方形 BCDE = $4 \times 12 = 48 \text{ cm}^2$

よって求める体積は $\frac{1}{3} \times 48 \times 8 = 128 \text{ cm}^3$

(2)

$BC^2 = 48$ より $BC = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

DF = $x \text{ cm}$ とすると

図1の空洞部分の正四角すいの体積 = 図2の空洞部分の三角錐の体積 より

$$\frac{1}{3} \times 12 \times \frac{8}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times x \times 4\sqrt{3} \times 8 \quad x = \sqrt{3} \text{ cm}$$

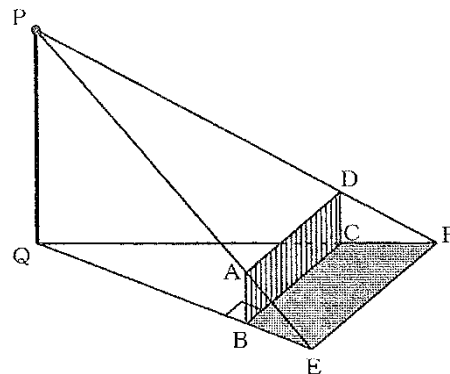
よって $FE = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

【問 14】

図のように、街灯 PQ と長方形の壁 $ABCD$ がともに水平な地面に垂直に立っている。街灯の先端 P の位置に電灯がついており、電灯の光によって地面に壁の影 $BEFC$ ができた。

$AB=1$ m, $AD=3$ m, $QC=6$ m, $CF=2$ m, $\angle QBC=90^\circ$ のとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。ただし、電灯の大きさ、壁の厚さは考えないものとする。答えは根号をつけたままでよい。

(愛知県 B 2011 年度)



(1) 街灯 PQ の高さは何 m か、求めなさい。

(2) 影 $BEFC$ の面積は何 m^2 か、求めなさい。

解答欄

(1)	m
(2)	m^2

解答

(1) 4 m

(2) $\frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$

解説

(1)

$\triangle PQF$ において $DC \parallel PQ$ より

$$DC:PQ=FC:FQ$$

$$1:PQ=2:8$$

$$2PQ=8$$

$$PQ=4 \text{ m}$$

(2)

$\triangle QBC$ において

$$\angle QBC=90^\circ \text{ より } QB=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\triangle QBC=\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3=\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$$

$\triangle QBC \sim \triangle QEF$ だから

$$QC:QF=6:8=3:4 \text{ より}$$

$$\triangle QBC:\triangle QEF=3^2:4^2$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2}:\triangle QEF=9:16$$

$$9\triangle QEF=\frac{9\sqrt{3}}{2} \times 16$$

$$\triangle QEF=8\sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$\text{よって四角形 BEFC の面積は } 8\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$$

【問 15】

図のように、底面の 1 辺の長さが 4 cm、高さが 6 cm の正四角すい OABCD の辺 OA, OB, OC, OD の中点をそれぞれ E, F, G, H とし、正四角すい OABCD から正四角すい OEF GH を切り取ってできた立体 K がある。

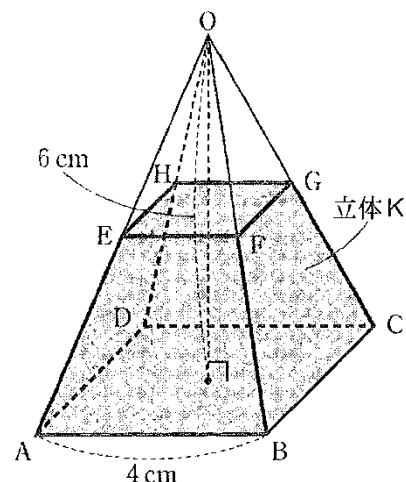
このとき、次の各問いに答えなさい。

(三重県 2011 年度)

(1) 辺 EF の長さを求めなさい。

(2) 立体 K の体積を求めなさい。

(3) 線分 EC の長さを求めなさい。なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数に
しなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³
(3)	cm

解答

(1) 2 cm

(2) 28 cm^3

(3) $3\sqrt{3} \text{ cm}$

解説

(2)

立体 O-ABCD と立体 O-EFGH は相似で

相似比は $OE:OA=1:2$ より

体積比は $1^3:2^3=1:8$

したがって立体 K の体積は立体 O-ABCD の体積の $\frac{7}{8}$ 倍だから

$$\frac{7}{8} \times \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6 = 28 \text{ cm}^3$$

(3)

正方形の対角線より $AC = \sqrt{2} AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

O, E から AC に垂線をひき交点をそれぞれ H, K とする。

H は正方形の対角線の交点と一致するので

$$AH = CH = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

EK // OH だから

$$EK:OH = AE:AO$$

$$EK:6 = 1:2$$

$$EK = 3 \text{ cm}$$

$$AK:AH = AE:AO = 1:1$$

$$KH = \frac{1}{2} AH = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{よって } KC = KH + CH = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

△EKC で

$$\text{三平方の定理より } EC = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

【問 16】

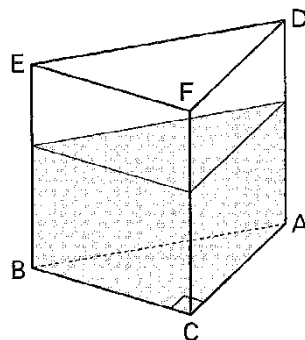
図1のように、 $AB=12\text{ cm}$ 、 $AC=8\text{ cm}$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ 、 $AD=BE=CF=10\text{ cm}$ で、側面がすべて長方形である三角柱の形をした透明な容器があり、容器の底から高さ 6 cm のところまで水が入っている。

このとき、次の問1・問2に答えよ。ただし、容器は水平な台の上に置いてあるものとし、容器の厚さは考えないものとする。

(京都府 2011 年度)

問1 図1の容器に入っている水の体積を求めよ。

図1



問2 図2のように、点Pが頂点で、 $\triangle QRS$ が底面である三

図2

角錐の形をしたおもりがあり、底面の面積は $8\sqrt{5}\text{ cm}^2$ である。このおもりを右の図3のように、図1の状態の容器の中に、おもりの底面が容器の底にぴったり着くように入れたところ、容器の底から水面までの高さがおもりの高さと同じになった。このとき、容器の底から水面までの高さを求めよ。ただし、おもりの中に水は入らないものとする。

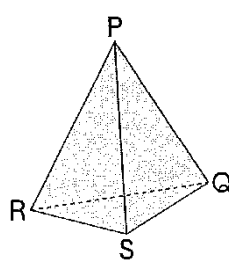
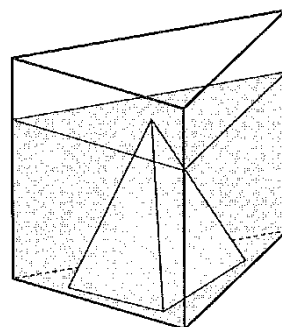


図3



解答欄

問1	cm^3
問2	cm

解答

問1 $96\sqrt{5} \text{ cm}^3$

問2 $\frac{36}{5} \text{ cm}$

解説

問1

△ABC において

三平方の定理より $BC = \sqrt{12^2 - 8^2} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$

水の体積は $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 8 \times 6 = 96\sqrt{5} \text{ cm}^3$

問2

容器の底から水面までの高さを $h \text{ cm}$ とおく。

水とおもりの体積の和の関係より

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 8 \times h = 96\sqrt{5} + \frac{1}{3} \times 8\sqrt{5} \times h$$

$$16\sqrt{5} h = 96\sqrt{5} + \frac{8\sqrt{5}}{3} h$$

$$\frac{40\sqrt{5}}{3} h = 96\sqrt{5}$$

$$h = \frac{36}{5} \text{ cm}$$

【問 17】

図1, 図2において, 立体 $ABCD-EFGH$ は, 直方体である。底面 $EFGH$ は, 1 辺の長さが a cm の正方形であり, $AE=5$ cm である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

(大阪府 2011 年度 前期)

問1 次の文中の に入れるのに適しているものを下のア～エから一つ選び, 記号を書きなさい。

図1において, 直方体 $ABCD-EFGH$ の は a の一次式で表される。

ア 底面積
イ 表面積
ウ 側面積
エ 体積

図1

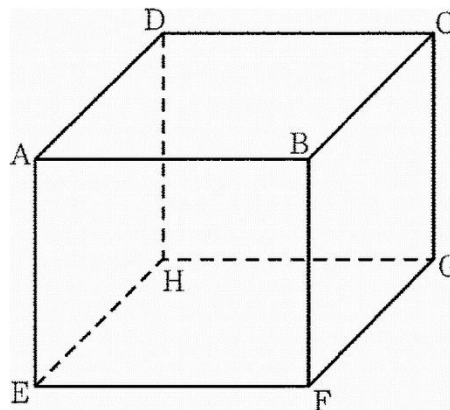
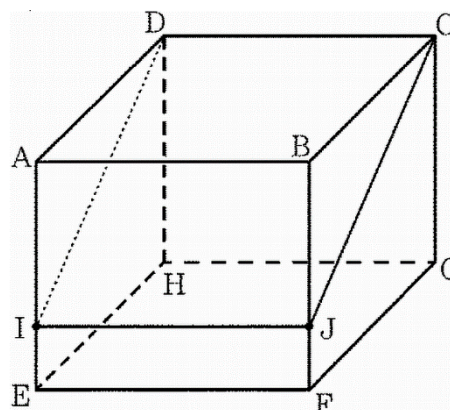


図2



問2 図2は, $a=6$ であるときの状態を示している。図2において, I は辺 AE 上にあつて, A, E と異なる点である。

J は辺 BF 上にあつて, $BJ=AI$ となる点である。このとき, 4 点 I, J, C, D は同じ平面上にあり, 4 点 I, J, C, D を結んでできる四角形 IJCD は長方形である。直方体 $ABCD-EFGH$ は, 平面 IJCD によって三角柱と四角柱とに分けられる。 $AI=x$ cm とし, $0 < x < 5$ とする。

(1) 三角柱 $AID-BJC$ の体積を x を用いて表しなさい。

(2) 長方形 IJCD の面積が 42 cm^2 であるときの四角柱 $IEHD-JFGC$ の体積を求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

問1		
問2	(1)	cm ³
	(2)	〔求め方〕 </

解答

問1 ウ

問2

(1) $18x\text{cm}^3$

(2)

[求め方]

長方形 IJCD の面積が 42 cm^2 だから

$$ID=7\text{ cm}$$

$\angle DAI=90^\circ$ だから

$$AI^2=ID^2-AD^2$$

$$\text{よって } x^2=7^2-6^2=13$$

これを解くと $x>0$ より

$$x=\sqrt{13}$$

したがって三角柱 AID-BJC の体積が $18\sqrt{13}\text{ cm}^3$ だから

四角柱 IEHD-JFGC の体積は

$$6\times 6\times 5-18\sqrt{13}=180-18\sqrt{13}\text{ cm}^3$$

$$\text{答え } 180-18\sqrt{13}\text{ cm}^3$$

解説

問1

ア 底面積は $a\times a=a^2$

イ 表面積は $a^2\times 2+4a\times 5=2a^2+20a$

ウ $4a\times 5=20a$

エ $a^2\times 5=5a^2$

よって a の一次式で表されるのはウ

問2

(1)

$$\text{三角柱 AID-BJC の体積は } \triangle AID\times AB=\frac{1}{2}\times x\times 6\times 6=18x\text{ cm}^3$$

(2)

長方形 IJCD の面積が 42 cm^2 より

$$DI\times 6=42\quad DI=7\text{ cm}$$

$\triangle AID$ で三平方の定理より

$$x^2+6^2=7^2$$

$$x^2+36=49$$

$$x^2=13$$

$x>0$ より

$$x=\sqrt{13}\text{ cm}$$

三角柱 AID-BJC の体積は

$$18x=18\times \sqrt{13}=18\sqrt{13}\text{ cm}^3$$

四角柱 IEHD-JFGC の体積

$$=(\text{直方体 ABCD-EFGH の体積})-(\text{三角柱 AID-BJC の体積})$$

$$=6\times 6\times 5-18\sqrt{13}$$

$$=180-18\sqrt{13}\text{ cm}^3$$

【問 18】

図1, 図2において, 立体 $A-BCD$ は, 三角すいである。 $\triangle BCD$ は, $BC=BD=5$ cm, $\angle CBD=90^\circ$ の直角二等辺三角形である。 $AB=10$ cm であり, 直線 AB は平面 BCD と垂直である。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は, その形のままでよい。

(大阪府 2011 年度 後期)

問1 図1において, E は, 辺 CD の中点である。 E と A とを結ぶ。

- (1) 次のア～オのうち, 辺 BD とねじれの位置にある辺はどれですか。一つ選び, 記号を書きなさい。

- | |
|----------|
| ア 辺 AB |
| イ 辺 AC |
| ウ 辺 AD |
| エ 辺 BC |
| オ 辺 CD |

- (2) 三角すい $A-BCD$ の体積を求めなさい。

- (3) 線分 AE の長さを求めなさい。

図1

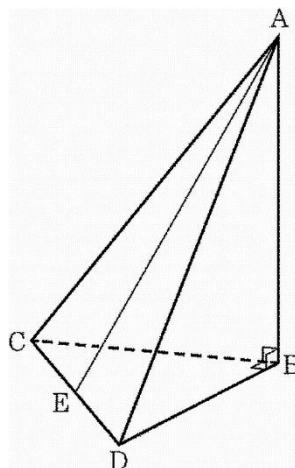
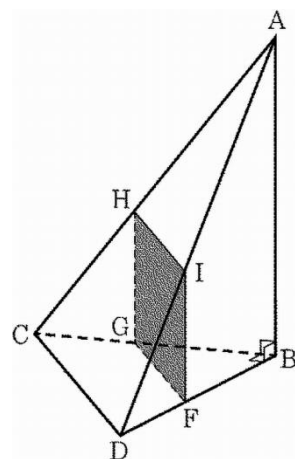


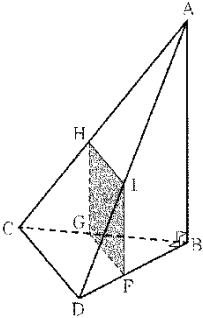
図2



問2 図2において, F は辺 BD 上にあって, B, D と異なる点であり, G は F を通り辺 CD に平行な直線と辺 BC との交点である。 H は G を通り辺 AB に平行な直線と辺 AC との交点であり, I は F を通り辺 AD に平行な直線と辺 AD との交点である。 H と I とを結ぶ。このとき, 4 点 F, G, H, I は同じ平面上にあり, 四角形 $FGHI$ は長方形である。 $BF=x$ cm とし, $0 < x < 5$ とするとき, 長方形 $FGHI$ の面積を x を用いて表しなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	cm ³
	(3)	cm

問2	[求め方]  cm²
----	--

解答

問1

(1) イ

(2) $\frac{125}{3} \text{ cm}^3$

(3) $\frac{15}{2} \sqrt{2} \text{ cm}$

問2

〔求め方〕

GF // CD だから

BF:BD=BG:BC…㊦

BD=BC だから

㊦より BF=BG

また $\angle \text{FBG} = 90^\circ$ だから

GF:BF = $\sqrt{2}$: 1

よって GF = $\sqrt{2} x \text{ cm}$

IF // AB だから

IF:AB=DF:DB

よって IF=2DF=2(5-x) cm

したがって長方形 FGHI の面積は

$\text{GF} \times \text{IF} = -2\sqrt{2} x^2 + 10\sqrt{2} x \text{ cm}^2$

$-2\sqrt{2} x^2 + 10\sqrt{2} x \text{ cm}^2$

解説

問1

(3)

△BCD は直角二等辺三角形なので $\text{CD} = \sqrt{2} \text{ BC} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$

$\text{CE} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

△ACD は AC=AD の二等辺三角形なので $\text{AE} \perp \text{CD}$

△ABC で

三平方の定理より $\text{AC}^2 = 10^2 + 5^2 = 125$

△ACE において

三平方の定理より $\text{AE} = \sqrt{125 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$

【問 19】

図1～図3の立体は、点 P を中心とする半径 3 cm の円 P と点 Q を中心とする半径 3 cm の円 Q を底面とし、高さが 9 cm の円柱である。直線 PQ は底面に垂直である。

円周率を π として、次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は、その形のままでよい。

(大阪府 2011 年度 後期)

問1 図1, 図2において、 R は線分 PQ 上にあって、 P, Q と異なる点である。点 R を中心とする円 R は半径が 3 cm であり、円 R をふくむ平面は円柱の底面と平行である。四角形 $ABCD$ は、 $AB=DC=8\text{ cm}$, $BC=AD=4\text{ cm}$ の長方形である。 B, C は、円 P の周上にあって、 A, D は円 R の周上にある。 S は、長方形 $ABCD$ の対称の中心であり、線分 PQ 上にある。 E は、 D を通り直線 PQ に平行な直線と円 P との交点である。 B と E とを結ぶ。このとき、直線 DE は円 P をふくむ平面と垂直であり、線分 BE は円 P の直径である。

(1) 図1において、

① 円 P と円 Q を底面とする円柱の表面積を求めなさい。

② 線分 DE の長さを求めなさい。求め方も書くこと。必要に応じて解答欄の図を用いてもよい。

(2) 図2において、 F は、辺 BC の中点である。 S と F とを結ぶ。 G は、 P から線分 SF にひいた垂線と線分 SF との交点である。線分 PG の長さを求めなさい。

図1

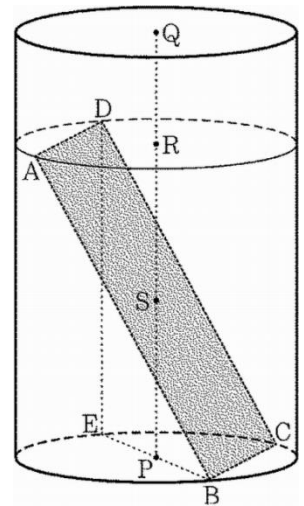


図2

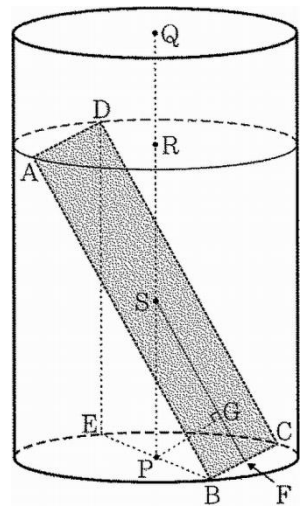
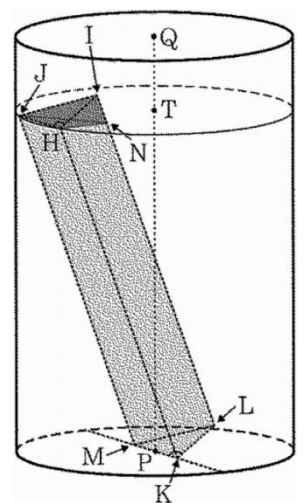


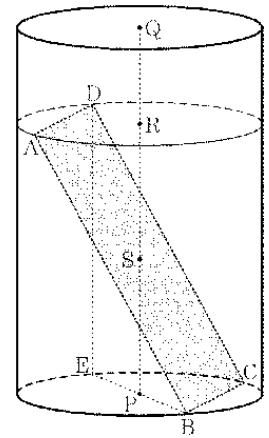
図3



問2 図3において、 T は線分 PQ 上にあって、 P, Q と異なる点である。点 T を中心とする円 T は半径が 3 cm であり、円 T をふくむ平面は円柱の底面と平行である。立体 $HIJ-KLM$ は三角柱である。 $\triangle HIJ$ は、 $\angle JHI=90^\circ$, $HJ=HI=2\text{ cm}$ の直角二等辺三角形である。 $\triangle HIJ \equiv \triangle KLM$ である。四角形 $HKLI$, $JMLI$, $JMKH$ はすべて長方形であって、長方形 $HKLI \equiv$ 長方形 $JMKH$ である。 $HK=8\text{ cm}$ である。 K, M は円 P の直径上にあって、 $KP=MP$ である。 H, J は、円 T の周上にある。このとき、平面 $HKLI$ は円柱の底面に垂直である。 N は、円 T をふくむ平面と辺 IL との交点である。 N と H , N と J とをそれぞれ結ぶ。このとき、 $\triangle JHN$ は、 $\angle JHN=90^\circ$ の直角三角形である。三角すい $I-JHN$ の体積を求めなさい。

解答欄

問1		①	cm^2	
	(1)	②	[求め方] 答え cm	
	(2)		cm	
問2	cm^3			



【問 20】

図1のように、点 P を頂点とし、点 O を底面の中心とする円錐がある。底面の周上に点 A があり、 $PA=6\text{ cm}$ 、 $OA=1\text{ cm}$ である。また、図2はこの円錐の展開図であり、点 A' は組み立てたときに点 A と重なる点である。

次の問1～問3に答えなさい。

(島根県 2011 年度)

問1 図2のおうぎ形の中心角の大きさを求めなさい。

図1

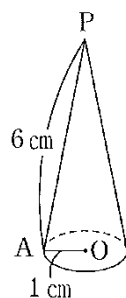
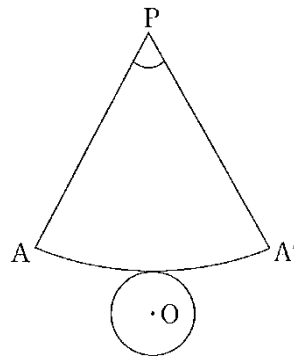


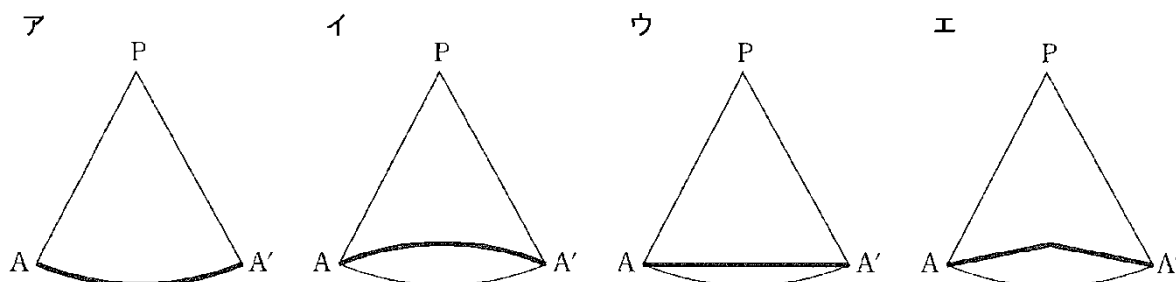
図2



問2 図3のように、点 A から円錐の側面にそって、糸を1周巻きつけて点 A に戻す。 図3

糸の長さが最も短くなるとき、次の(1)、(2)に答えなさい。

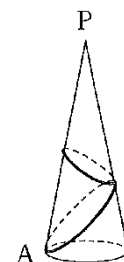
- (1) 糸のようすを側面の展開図に太線で表すとどのようなになるか、次のア～エから1つ選び、記号で答えなさい。



- (2) 糸の長さは何 cm になるか、求めなさい。

問3 図4のように、点 A から円錐の側面にそって、糸を2周巻きつけて点 A に戻す。糸の長さが 図4

最も短くなるとき、その長さは何 cm になるか、求めなさい。



解答欄

問1	°	
問2	(1)	
	(2)	cm
問3	cm	

解答

問1 60°

問2

(1) ウ

(2) 6 cm

問3 $6\sqrt{3}$ cm

解説

問2

(2)

∠AP A′ = 60° より△PAA′ は正三角形だから AA′ = PA = 6 cm

問3

糸を 2 周巻きつけるとき最短となる糸の長さは

おうぎ形 PAA′ を 2 つ組み合わせた中心角 120° , 半径 6 cm のおうぎ形の弧の両端を結んだ弦の長さになる。

この長さは 1:2: $\sqrt{3}$ の直角三角形の $\sqrt{3}$ の比にあたる部分の 2 倍になるから

求める長さは $6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 6\sqrt{3}$ cm

【問 21】

図1のような、直方体の形をした空の容器があり、 $AE=8\text{ cm}$ 、 $EF=6\text{ cm}$ 、 $FG=8\text{ cm}$ である。また、下の図2のような、三角柱の形をした鉄のおもりがあり、 $IJ=8\text{ cm}$ 、 $JK=6\text{ cm}$ 、 $IK=10\text{ cm}$ 、 $KN=8\text{ cm}$ である。

図1

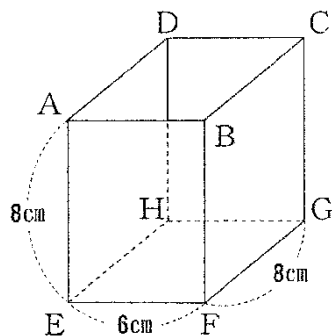
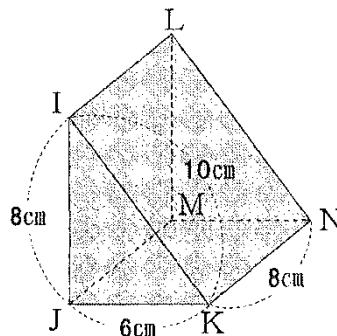
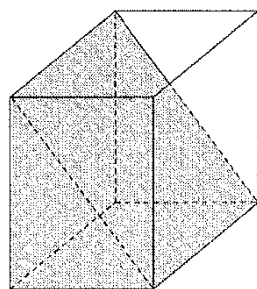


図2



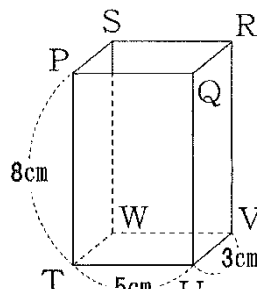
下の図3のように、図1の空の容器の中に図2の鉄のおもりを置き、できた容器を容器①とする。また、下の図4のような、直方体の形をした空の容器があり、 $PT=8\text{ cm}$ 、 $TU=5\text{ cm}$ 、 $UV=3\text{ cm}$ である。これを容器②とする。容器はすべて水平に置き、容器の厚さは考えないものとする。

図3



容器①

図4



容器②

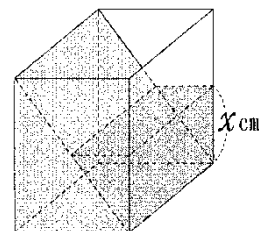
これについて、次の(1)～(3)の問いに答えよ。

(香川県 2011 年度)

(1) 図2の三角柱の形をした鉄のおもりの表面積は何 cm^2 か。

(2) 右の図5のように、容器①に水を入れた。容器の底面から水面までの高さが $x\text{ cm}$ であるとき、入れた水の体積は何 cm^3 か。 x を使った式で表せ。

図5



(3) 容器①の水をいったん捨てる。次に、容器①の底面から水面までの高さ、容器②の底面から水面までの高さが同じになるように、両方の容器に水を入れる。容器①に入れた水の体積が、容器②に入れた水の体積より 18 cm^3 だけ大きくなるのは、容器の底面から水面までの高さが何 cm のときか。容器の底面から水面までの高さを $x\text{ cm}$ として、 x の値を求めよ。 x の値を求める過程も、式と計算を含めて書け。

解答欄

(1)	cm^2
(2)	cm^3
(3)	[x の値を求める過程] 答 x の値

解答

(1) 240 cm^2

(2) $3x^2 \text{ cm}^3$

(3)

[x の値を求める過程]

容器②に水面までの高さが $x \text{ cm}$ になるまで入れた水の体積は $3 \times 5 \times x = 15x \text{ cm}^3$ である。

容器①に入れた水の体積が容器②に入れた水の体積より 18 cm^3 だけ大きいので

(2)の結果を用いると

$$3x^2 = 15x + 18$$

整理すると

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x-6)(x+1) = 0$$

よって $x=6$ または $x=-1$

$0 \leq x \leq 8$ だから

$x=6$ は問題にあうが

$x=-1$ は問題にあわない。

答 x の値 6

解説

(1)

水の入っている部分の三角柱の底面の三角形において

直角をはさむ $x \text{ cm}$ ともう 1 つの辺を $y \text{ cm}$ とおくと平行線と線分の比の定理より

$$y:6 = x:8$$

$$8y = 6x$$

$$y = \frac{3x}{4} \text{ cm}$$

$$\text{よってその体積は } \frac{1}{2} \times x \times \frac{3x}{4} \times 8 = 3x^2 \text{ cm}^3$$

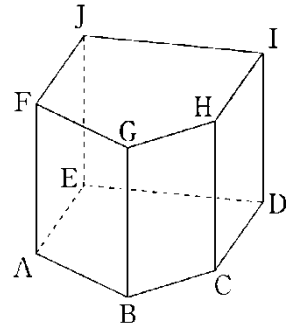
【問 22】

図は、底面 $ABCDE$ が $AB=4\text{ cm}$, $BC=3\text{ cm}$, $CD=DE=EA=5\text{ cm}$, $\angle BCD$ が鈍角, $\angle CDE = \angle DEA = 90^\circ$ の五角形で、側面がすべて長方形の五角柱 $ABCDEFGHIJ$ を表しており、 $AF=5\text{ cm}$ である。

次の問1～問3の の中にあてはまる最も簡単な数を記入せよ。

(福岡県 2011 年度)

問1 図に示す立体において、辺 AF とねじれの位置にある辺は全部で 本
ある。



問2 図に示す立体において、辺 BG 上に点 P , 辺 CH 上に点 Q を, $AP+PQ+QI$ の長さが最も短くなるようにとる。このとき、線分 PQ の長さは cm である。

問3 図に示す立体において、長方形 $ABGF$ を底面とし、点 D を頂点とする四角すい $DABGF$ の体積は, cm^3 である。

解答欄

問1	本
問2	cm
問3	cm^3

解答

問1 6本

問2 $\frac{13}{4}$ cm

問3 $\frac{140}{3}$ cm³

解説

問3

Dから直線ABに垂線をひき交点をHとする。

また直線ABと直線CDの交点をPとする。

△ABCにおいて

AB=4 cm, BC=3 cm, AC=ED=5 cm より

$3^2+4^2=5^2$ だから

$\angle ABC=90^\circ$

△ABC∽△CBP となるので

AB:BC=BC:BP

4:3=3:BP

$BP=\frac{9}{4}$ cm

同様に AC:CP=AB:CB

5:CP=4:3

$CP=\frac{15}{4}$ cm

$\triangle ADP=\frac{1}{2} \times AP \times DK=\frac{1}{2} \times \left(4+\frac{9}{4}\right) \times DK=\frac{25}{8} DK$

$\triangle ADP=\frac{1}{2} \times DP \times AC=\frac{1}{2} \times \left(5+\frac{15}{4}\right) \times 5=\frac{175}{8}$

よって $\frac{25}{8} DK=\frac{175}{8}$

DK=7 cm

したがって四角すい DAGBF の体積は $\frac{1}{3} \times \text{四角形 FAGB} \times DK=\frac{1}{3} \times 4 \times 5 \times 7=\frac{140}{3}$ cm³

【問 23】

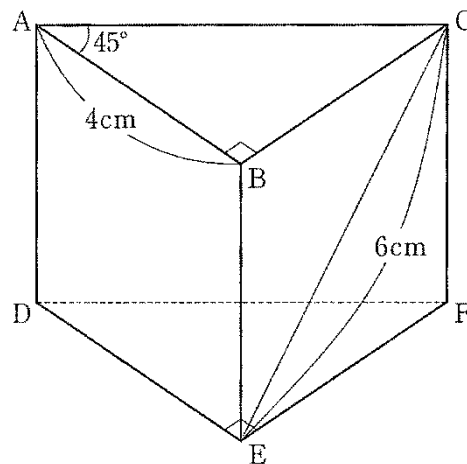
図のように、底面が直角三角形で、側面がすべて長方形の三角柱があり、 $\angle ABC=90^\circ$ ， $\angle CAB=45^\circ$ ， $AB=4\text{ cm}$ ， $CE=6\text{ cm}$ である。

このとき、次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(佐賀県 2011 年度 後期)

(1) BC の長さを求めなさい。

(2) 三角柱の体積を求めなさい。



解答欄

(1)	cm
(2)	cm ³

解答

(1) 4 cm

(2) $16\sqrt{5}\text{ cm}^3$

解説

(2)

$\triangle BCE$ において $\angle EBC=90^\circ$ ， $BC=4\text{ cm}$ ， $CE=6\text{ cm}$ より

$$BE=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}\text{ cm}$$

よって三角柱の体積は $\triangle ABC \times BE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{5} = 16\sqrt{5}\text{ cm}^3$

【問 24】

図1のように、底面が1辺4 cm の正方形で、他の辺の長さがすべて $2\sqrt{5}$ cm の正四角すい OABCD がある。また、辺 AB の中点を L、辺 CD の中点を M とし、点 O から線分 LM にひいた垂線と線分 LM との交点を H とする。

このとき、次の問1～問4に答えなさい。

(佐賀県 2011 年度 後期)

問1 OL の長さを求めなさい。

問2 OH の長さを求めなさい。

問3 $\triangle OLM$ を、直線 OH を軸として1回転させてできる立体の体積を V_1 、正四角すい OABCD の体積を V_2 とするとき、 V_1 と V_2 の比を求めなさい。

問4 図1の正四角すい OABCD について、辺 OC の中点を N、辺 OD の中点を P とし、線分 NP と線分 OM の交点を Q とすると、図2のようになる。

このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

(1) PN および OQ の長さを求めなさい。

(2) 四角すい OABNP の体積を求めなさい。

図1

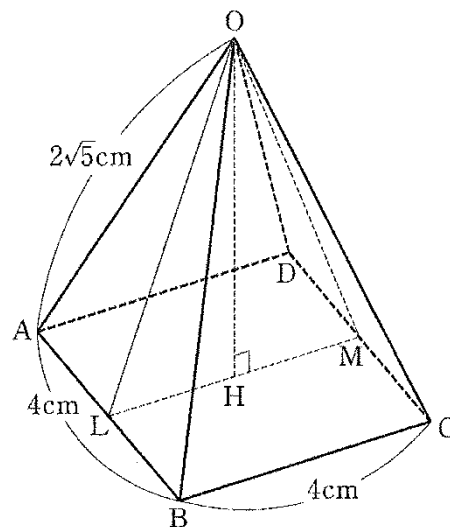
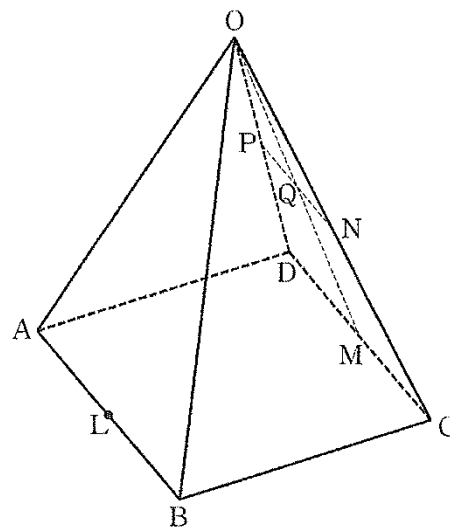


図2



解答欄

問1	cm		
問2	cm		
問3	$V_1:V_2=$:		
問4	(1)	PN	cm
		OQ	cm
	(2)	cm^3	

解答

問1 4 cm

問2 $2\sqrt{3}$ cm

問3 $V_1:V_2=\pi:4$

問4

(1)

PN 2 cm

OQ 2 cm

(2) $4\sqrt{3}$ cm^3

解説

問4

(2)

P, N から CD に垂線をひき交点をそれぞれ R, S とする。

また R を通る AD に平行な線をひき AB との交点を X とし

S を通る CB に平行な線をひき AB との交点を Y とする。

P から面 ABCD に垂線をひき交点を K とすると

PK // OH より

PK:OH=PD:OD

PK: $2\sqrt{3}=1:2$

PK= $\sqrt{3}$ cm

また DR=(4-2)÷2=1 cm

三角すい P-AXRD と N-YBCS の体積は等しく

$$\frac{1}{3} \times 4 \times 1 \times \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

三角柱 PXR-NYS の体積は

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

したがって四角すい OABNP の体積は $\frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{3} - 2 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

【問 25】

図1～図3のように、 $AB=5\text{ cm}$ 、 $AD=3\text{ cm}$ 、 $AE=4\text{ cm}$ の直方体 $ABCDEFGH$ がある。このとき、次の問いに答えなさい。

(長崎県 2011 年度)

問1 図1において、辺 AD とねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

問2 直方体 $ABCDEFGH$ の表面積は何 cm^2 か。

問3 図2において、三角柱 $AEDBFC$ の体積は何 cm^3 か。

問4 図2において、四角形 $CDEF$ の面積は何 cm^2 か。

問5 図3のように、 $AP=1\text{ cm}$ となる点 P が辺 AD 上にあるとき、四角形 $CDEF$ を底面とし、点 P を頂点とする四角すい $PCDEF$ の体積は何 cm^3 か。

図1

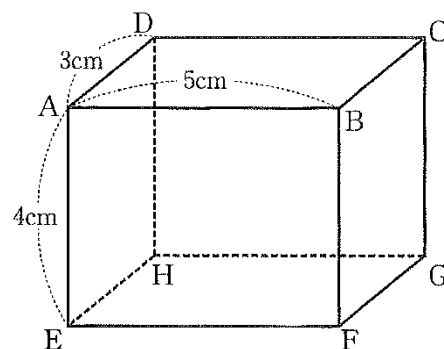


図2

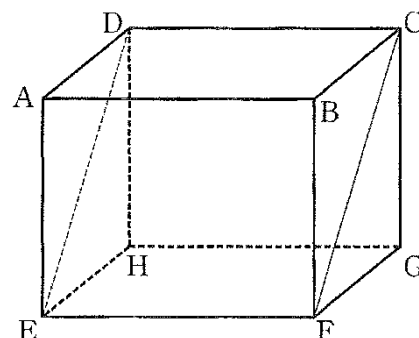
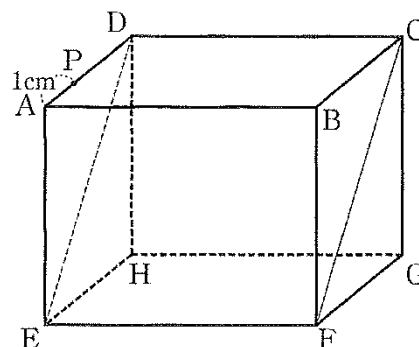


図3



解答欄

問1	本
問2	cm^2
問3	cm^3
問4	cm^2
問5	cm^3

解答

問1 4 本

問2 94 cm^2

問3 30 cm^3

問4 25 cm^2

問5 $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

解説

問5

P から DE に垂線をひき交点を K とする。

△PED の面積の関係より

$$\frac{1}{2} \times PD \times AE = \frac{1}{2} \times DE \times PK \quad \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times PK$$

$$PK = \frac{8}{5} \text{ cm}$$

$$\text{四角すい PCDEF の体積は } \frac{1}{3} \times \text{四角形 CDEF} \times PK = \frac{1}{3} \times 25 \times \frac{8}{5} = \frac{40}{3} \text{ cm}^3$$

【問 26】

図1～図3のように, $AB=5\text{ cm}$, $AD=3\text{ cm}$, $AE=4\text{ cm}$ の直方体 $ABCDEFGH$ がある。

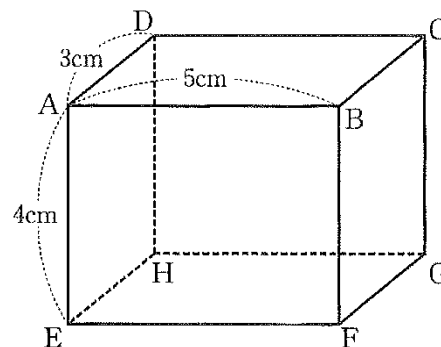
このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2011 年度)

問1 図1において, 辺 AD とねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

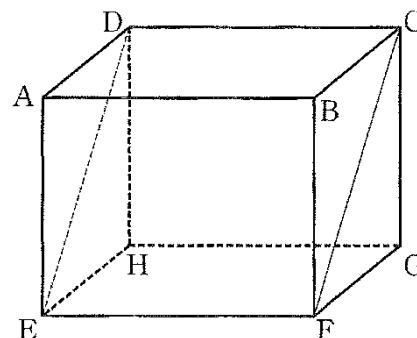
問2 直方体 $ABCDEFGH$ の表面積は何 cm^2 か。

図1



問3 図2において, 三角柱 $AEDBFC$ の体積は何 cm^3 か。

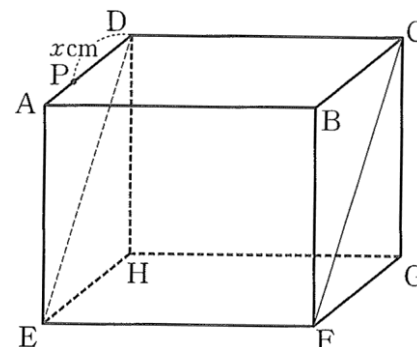
図2



問4 図3のように, 点 P が辺 AD 上にあり, $DP=x\text{ cm}$ とする。このとき, 次の(1), (2)に答えよ。

- (1) 三角形 AEB を底面とし, 点 P を頂点とする三角すい $PAEB$ の体積を $V\text{ cm}^3$ とするとき, V を x の式で表せ。

図3



- (2) 四角形 $CDEF$ を底面とし, 点 P を頂点とする四角すい $PCDEF$ の体積が, 三角すい $PAEB$ の体積の3倍になるとき, x の値を求めよ。

解答欄

問1	本	
問2	cm^2	
問3	cm^3	
問4	(1)	$V=$
	(2)	$x=$

解答

問1 4 本

問2 94 cm^2

問3 30 cm^3

問4

$$(1) V = \frac{10}{3} (3 - x)$$

$$(2) x = \frac{9}{5}$$

解説

問4

(2)

P から DE に垂線をひき交点を K とする。

三平方の定理より $DE = 5 \text{ cm}$

$\triangle PED$ の面積の関係より

$$\frac{1}{2} \times PD \times AE = \frac{1}{2} \times DE \times PK$$

$$\frac{1}{2} \times x \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times PK$$

$$PK = \frac{4}{5} x \text{ cm}$$

四角すい PCDEF の体積は

$$\frac{1}{3} \times \text{四角形 CDEF} \times PK = \frac{1}{3} \times 25 \times \frac{4}{5} x = \frac{20}{3} x \text{ cm}^3$$

四角すい PCDEF の体積 $= 3 \times$ 三角すい PAEB より

$$\frac{20}{3} x = 3 \times \frac{10}{3} (3 - x)$$

これを解いて

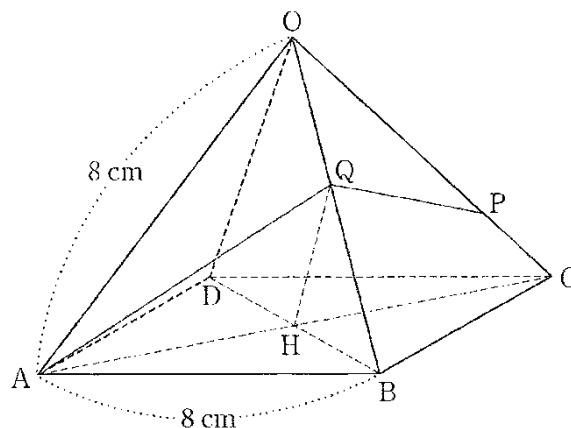
$$x = \frac{9}{5}$$

【問 27】

図は、すべての辺の長さが 8 cm の正四角すい $OABCD$ であり、点 H は底面 $ABCD$ の 2 つの対角線 AC , BD の交点である。点 P は辺 OC 上にあって、 $OP=6\text{ cm}$ である。また、辺 OB 上に点 Q を、 2 つの線分 AQ , QP の長さの和が最小となるようにとる。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2011 年度)



問1 対角線 BD の長さを求めなさい。

問2 線分 OQ と線分 QB の長さの比 $OQ:QB$ を求めなさい。答えは最も簡単な整数比で表すこと。

問3 線分 QH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	$OQ:QB=$:
問3	cm

解答

問1 $8\sqrt{2}$ cm

問2 $OQ:QB=3:4$

問3 $\frac{20\sqrt{2}}{7}$ cm

解説

問3

OとHを結びQからBDに垂線をひき交点をKとする。

$$OH = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$QK \parallel OH$ だから

$$QK:OH = QB:OB = 4:7$$

$$QK = \frac{4}{7} OH = \frac{4}{7} \times 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{7} \text{ cm}$$

$$HK:HB = OQ:QB = 3:7$$

$$HK = \frac{3}{7} HB = \frac{3}{7} \times 4\sqrt{2} = \frac{12\sqrt{2}}{7} \text{ cm}$$

$\triangle QHK$ において

$$\text{三平方の定理より } QH = \sqrt{\left(\frac{16\sqrt{2}}{7}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{7}\right)^2} = \frac{20\sqrt{2}}{7} \text{ cm}$$

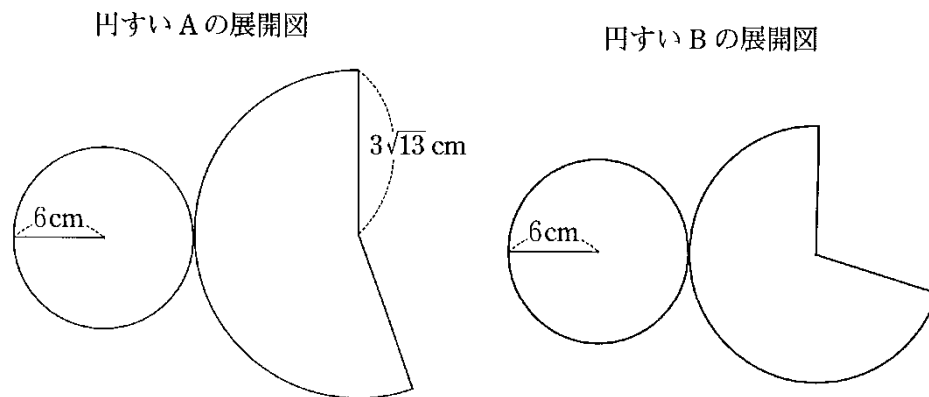
【問 28】

展開図が下の図1で表される 2 つの円すい A, B がある。円すい A は底面の半径が 6 cm で、側面になるおうぎ形の半径が $3\sqrt{13}$ cm である。円すい B は底面の半径が 6 cm で、高さが円すい A の高さの $\frac{2}{3}$ 倍である。

次の問1, 問2に答えなさい。

(大分県 2011 年度)

図1



問1 円すい A の高さを求めなさい。

問2 図2のように、円すい A, B それぞれの上部を、切り口が底面と平行となるように切り取る。このとき、それぞれの切り口が同じ半径の円となるようにする。次に、図3のように 2 つの立体を切り口で接着させると、高さ 10 cm の立体ができた。

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

図2

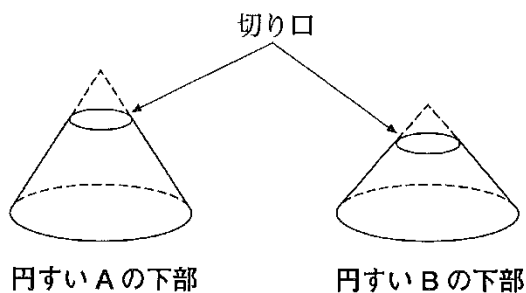
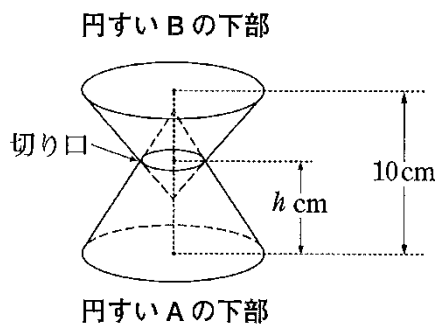


図3



(1) 図3において、円すいAの下部の底面から切り口までの高さを h cm として、 h の値を求めなさい。

(2) 図3の立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

解答欄

問1	cm	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ³

解答

問1 9 cm

問2

(1) 6 cm

(2) $\frac{520}{3} \pi \text{ cm}^3$

解説

問2

(1)

円すい B の高さは円すい A の高さの $\frac{2}{3}$ より $9 \times \frac{2}{3} = 6 \text{ cm}$

切り口の半径を $r \text{ cm}$ とする。

円すい A の切り取った部分の円すいの高さは $9 - h \text{ cm}$ と表せるので

平行線と線分の比の関係から

$(9 - h) : 9 = r : 6 \cdots \textcircled{1}$

円すい B の切り取った部分の円すいの高さは $6 - (10 - h) = h - 4 \text{ cm}$

よって $(h - 4) : 6 = r : 6 \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

$(9 - h) : 9 = (h - 4) : 6$

$9(h - 4) = 6(9 - h)$

$9h - 36 = 54 - 6h$

$9h + 6h = 54 + 36$

$15h = 90$

$h = 6$

(2)

$r : 6 = (9 - 6) : 9 = 3 : 9 = 1 : 3$

$3r = 6$

$r = 2$

よって求める体積は $\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 9 - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times (9 - 6) + \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6 - \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times (6 - 4)$

$= 108\pi - 4\pi + 72\pi - \frac{8}{3}\pi$

$= \frac{520}{3} \pi \text{ cm}^3$

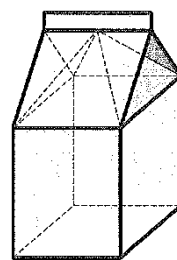
【問 29】

次のような紙パックがある。図1は、この紙パックを参考に、正四角錐と直方体をあわせてつくった立体の紙の容器である。正四角錐の高さは 3 cm 、直方体の底面 $EFGH$ は1辺が 6 cm の正方形で、その高さを 8 cm とするとき、下の問1～問4に答えなさい。ただし、紙の厚さや容器の変形は考えないものとする。

(宮崎県 2011 年度)

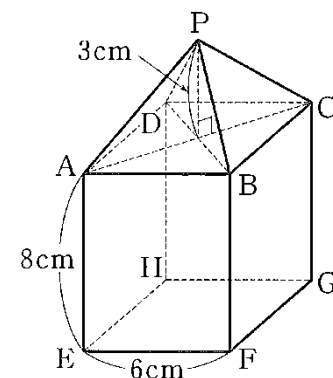
問1 図1において、底面 $EFGH$ の対角線 EG の長さを求めなさい。

図1



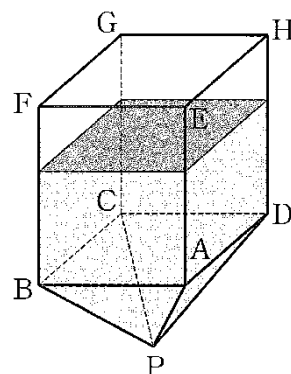
問2 図2は、水平に置いた図1の容器に、底面 $EFGH$ から 5.5 cm の高さまで水を入れたものを、水が漏れないように上下を反対にし、底面 $EFGH$ が水平になるようにしたものである。このとき、水面から底面 $EFGH$ までの高さを求めなさい。

図2



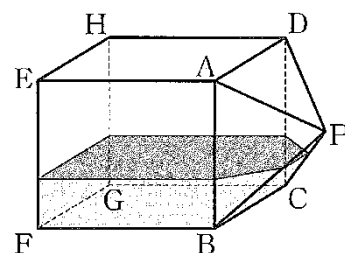
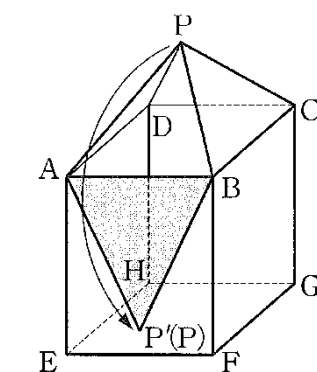
問3 図3は、図1の容器の辺 PA 、 PB を切り離し、 $\triangle PAB$ の面を、辺 AB を軸として、外側に回転させ、 $\triangle P'AB$ の面を直方体の面 $AEFB$ にぴったりくっつけたものである。点 P が点 P' まで動いたとき、点 P が動いてできる線の長さを求めなさい。ただし、円周率は π とする。

図3



問4 図4は、図1の容器の面 $BCGF$ を下にして水平に置き、この面から 2 cm の高さまで水を入れたものである。このとき、はいつている水の体積を求めなさい。

図4



解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	cm
問4	cm ³

解答

問1 $6\sqrt{2}$ cm

問2 3.5 cm

問3 $\frac{15\sqrt{2}}{4} \pi$ cm

問4 $\frac{316}{3} \text{cm}^3$

解説

問3

ACとBDの交点をK, ABの中点をMとおくと

△PMKにおいて∠PKM=90°, PK=MK=3 cm だから

三平方の定理より, PM= $\sqrt{2}$ PK= $3\sqrt{2}$ cm

また△PMKは直角二等辺三角形だから∠PMK=45°

これよりPがMを中心として回転する角度は $360^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 225^\circ$

よってPの動いた距離は $2\pi \times 3\sqrt{2} \times \frac{225}{360} = \frac{15\sqrt{2}}{4} \pi$ cm

問4

PB, PCと水面との交点をそれぞれQ, Rとすると

QR:BC=PQ:PB=(3-2):3=1:3

$QR = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm

P, Qからと面ABCDに垂線ひき交点をそれぞれX, Yとすると

QX // PKより

QX:PK=BQ:BP=2:3

$QX = \frac{2}{3} PK = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ cm

QX=RY=2 cm

求める体積は縦がFG=6 cm 横がFB=8 cm, 高さが水面の高さの2 cmの直方体…①と

底面積が $2 \times \{(6-2) \div 2\} = 4 \text{cm}^2$ 高さが QX=2 cmの四角錐…②と

底面積が $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \text{cm}^2$ 高さが QR=2 cmの三角柱…③と

RYを高さとする②と合同な四角錐…④の和となる。

①の体積は $6 \times 8 \times 2 = 96 \text{cm}^3$

②, ④の体積は $\frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3} \text{cm}^3$

③の体積は $2 \times 2 = 4 \text{cm}^3$

求める体積は $96 + \frac{8}{3} \times 2 + 4 = \frac{316}{3} \text{cm}^3$

【問 30】

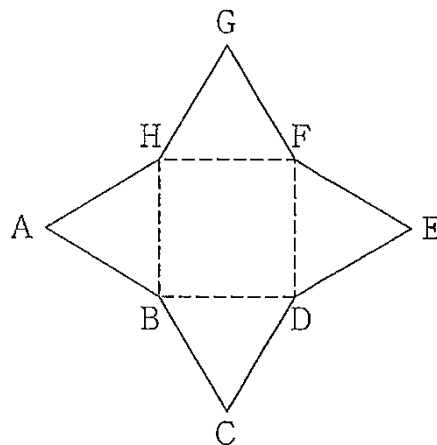
図1は、すべての辺の長さが 6 cm の正四角すいの展開図である。
このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2011 年度)

問1 図1の展開図を組み立て、正四角すいを作る。

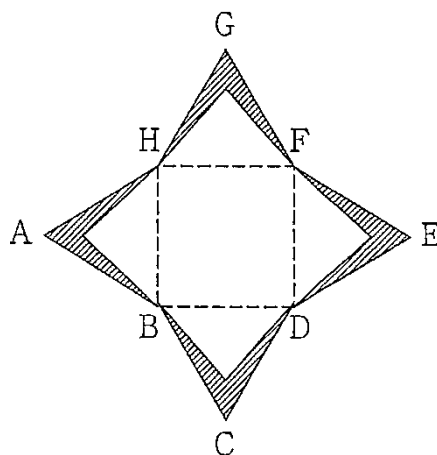
- (1) この正四角すいの辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて求めなさい。

図1



- (2) この正四角すいの高さを求めなさい。

図2



問2 図1から図2の斜線部分を切り取り、別の正四角すいの展開図を作った。この展開図を組み立て体積を調べると元の正四角すいの体積の $\frac{1}{3}$ であった。このとき、切り取った斜線部分全体の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	
	(2)	cm
問2	cm ²	

解答

問1

(1) 辺 DF, 辺 FH

(2) $3\sqrt{2}$ cm

問2 $12(3\sqrt{3} - \sqrt{11}) \text{ cm}^2$

解説

問1

(2)

HF の中点を M とする。

$$HM = FM = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

三平方の定理より $GM = \sqrt{3}$ $HM = 3\sqrt{3}$ cm

正方形 HBDF の対角線の交点を K とすると $MK = \frac{6}{2} = 3$ cm

組み立てた正四角すいにおいて $\triangle GMK$ で三平方の定理より $GK = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$ cm

問2

組み立ててできた正四角すいの体積はもとの四角すいの体積の $\frac{1}{3}$ で底面積は等しいので

組み立ててできた正四角すいの高さは元の正四角すいの高さの $\frac{1}{3}$ なので $\frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$ cm

$\triangle GHF$ において斜線部分を切り取った三角形を NHF とすると $NM = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$ cm

よって斜線部分の面積は $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times (3\sqrt{3} - \sqrt{11}) = 12(3\sqrt{3} - \sqrt{11}) \text{ cm}^2$