9. 式の証明の問題（2018 年度出題）

【問 1】

幸太さんは，連続する 3 つの偶数の和がどのような数になるか，次のように調べて予想した。幸太さんの［予想］がいつでも成り立つことの［説明］が正しくなるように，ア，イには式を，ウには説明の続きを書き，完成させなさい。

（秋田県　2018 年度）

［調べたこと］ 2＋4＋6＝12，4＋6＋8＝18，6＋8＋10＝24
［予想］ 連続する 3 つの偶数の和は，6 の倍数になる。

［説明］

n を整数とすると，連続する 3 つの偶数は小さいものから順に，$2n$，［ア］，［イ］と表すことができる。このとき，連続する 3 つの偶数の和は，

［ウ］

したがって，連続する 3 つの偶数の和は，6 の倍数になる。

解答欄

ア	
イ	
ウ	

解答
ア　$2n+2$
イ　$2n+4$
ウ
$2n+(2n+2)+(2n+4)$
$=6n+6$
$=6(n+1)$
$n+1$ は整数なので $6(n+1)$ は 6 の倍数となる。
解説
n を整数とすると偶数は $2n$ と表される。
また連続する偶数は 2 ずつ大きくなるから
ア　$2n+2$
イ　$(2n+2)+2=2n+4$
またウは連続する 3 つの偶数の和が 6×(整数)の形で表されることを導く。

【問 2】

あるクラスで募金を行ったところ，募金箱の中には，5 円硬貨と 1 円硬貨は合わせて 36 枚入っていた。募金箱の中に入っていた 5 円硬貨と 1 円硬貨の合計金額を a 円とするとき，a は 4 の倍数になることを，5 円硬貨の枚数を b 枚として証明しなさい。

（栃木県　2018 年度）

解答欄

〔証明〕

解答
〔証明〕
5 円硬貨の枚数が b 枚なので 1 円硬貨の枚数は
$(36-b)$ 枚と表される。
よって $a=5b+(36-b)$
$=4b+36$
$=4(b+9)$
b は整数だから $b+9$ も整数である。
したがって a は 4 の倍数である。
解説
5 円硬貨の枚数が b 枚なので
1 円硬貨の枚数は$(36-b)$枚と表される。
よって合計金額は
$a=5\times b+1\times(36-b)$
$=5b+(36-b)$
$=5b+36-b$
$=4b+36$
$=4(b+9)$
b は整数だから$(b+9)$も整数である。
したがって a は 4×(整数)の形で表されるから 4 の倍数である。

【問 3】

十の位の数と一の位の数の和が 10 である 2 けたの自然数がある。この自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた自然数は，もとの自然数より 36 大きくなる。もとの自然数を求めなさい。

（群馬県 2018 年度 後期）

解答欄

解答
もとの自然数の十の位の数を x，一の位の数を y とすると

$$\begin{cases} x+y=10 \cdots ① \\ 10y+x=10x+y+36 \cdots ② \end{cases}$$

②より
$-9x+9y=36$
$-x+y=4 \cdots ③$
①＋③より
$2y=14$
$y=7$
$y=7$ を①に代入して
$x=3$
$x=3$，$y=7$ は問題に適している。
したがってもとの自然数は 37
解説
十の位の数が x，一の位の数が y の 2 けたの自然数は $10x+y$ と表されるから
この自然数の十の位の数と一の位の数を入れかえた自然数は $10y+x$ と表される。

【問 4】

「整数 a, b で, a も b も偶数ならば, $a+b$ は偶数である。」ということがらは正しい。
しかし, このことがらの逆「整数 a, b で, $a+b$ が偶数ならば, a も b も偶数である。」は正しくない。これは, 次のように説明できる。

> 整数 a, b が, 例えば, $a=$ $\boxed{\text{あ}}$, $b=$ $\boxed{\text{い}}$ のとき, $\boxed{\text{あ}}$ ＋ $\boxed{\text{い}}$ を計算すると, 和は $\boxed{\text{う}}$ となり, 偶数である。しかし, $\boxed{\text{あ}}$ と $\boxed{\text{い}}$ は偶数ではない。
> よって, 「整数 a, b で, $a+b$ が偶数ならば, a も b も偶数である。」は正しくない。

上の説明の $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{う}}$ に当てはまる整数の例を 1 つずつ書きなさい。

（長野県 2018 年度）

解答欄

あ	い	う

解答
あ　1
い　3
う　4
解説
「○○ならば, △△である。」ということがらが正しくないことを説明するには
そのことがらが成り立たない例を 1 つあげれば十分である。
よって本問の場合は $a+b$ が偶数であるにもかかわらず
a, b の少なくとも一方が奇数である例をあげればよく
たとえば $a+b=4$ のとき $a=1$, $b=3$ である場合が考えられる。

【問 5】

次の文章は，連続する 5 つの自然数について述べたものである。文章中の $\boxed{\text{A}}$ にあてはまる最も適当な式を書きなさい。また，$\boxed{\text{a}}$ ，$\boxed{\text{b}}$ ，$\boxed{\text{c}}$ ，$\boxed{\text{d}}$ にあてはまる自然数をそれぞれ書きなさい。

（愛知県 2018 年度 A）

連続する 5 つの自然数のうち，最も小さい数を n とすると，最も大きい数は $\boxed{\text{A}}$ と表される。
このとき，連続する 5 つの自然数の和は $\boxed{\text{a}}$ $(n+$ $\boxed{\text{b}}$ $)$ と表される。
このことから，連続する 5 つの自然数の和は，小さい方から $\boxed{\text{c}}$ 番目の数の $\boxed{\text{d}}$ 倍となっていることがわかる。

解答欄

A	
a	
b	
c	
d	

解答
A　$n+4$
a　5
b　2
c　3
d　5
解説
連続する 5 つの自然数で
最小の数を n とすると
残りの 4 つは小さい順に $n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$ と表される。
よって 5 つの自然数の和は
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$
これは小さい方から 3 番目の数の 5 倍になっている。

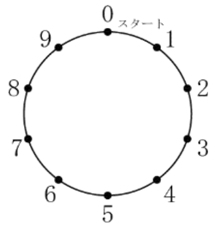
【問 6】

太一さんは，小学生の弟が勉強机の上においていた，九九の表と九九の学習プリントを見て，九九に興味をもち，調べてみることにしました。次の問1から問4に答えなさい。

（滋賀県　2018 年度）

九九の学習プリント

九九のひみつ



○ 右の円には，0 から 9 までの数字がかかれた，10 この点があります。

○ 10 この点は，どれも同じかんかくです。

○ 九九の答えをもとに，下のきまりで点と点を直線でむすぶと，いろいろな形ができます。

★きまり★
・0の点をスタートとして，九九の答えの一の位の数字がかかれた点を，じゅんに直線でむすびます。
・さいごは，0の点へ直線をひいておわります。

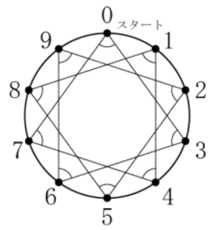
★れい★
・3のだんの答えの一の位の数字を○でかこむと

③，⑥，⑨　1②，1⑤，1⑧，2①，2④，2⑦

と，なります。

0 → 3 → 6 → 9 → 2 → 5 → 8 → 1 → 4 → 7 → 0
（スタート）（おわり）

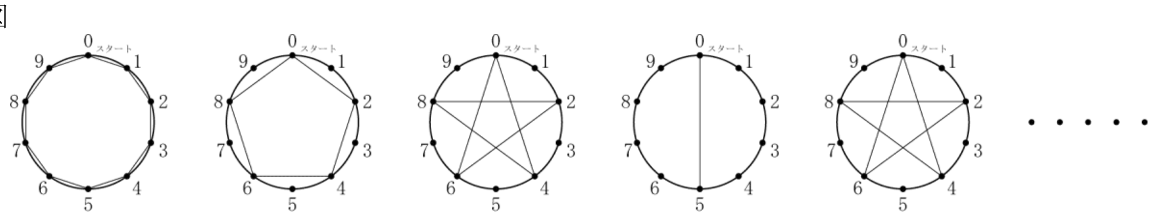
と直線でむすぶと，右のような形ができます。



3のだん

○ 下の図にも同じように，答えの一の位の数字がかかれた点を直線でむすんでみましょう。

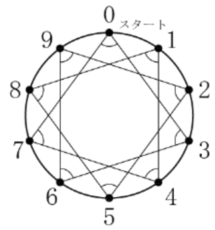
図


1のだん　2のだん　4のだん　5のだん　6のだん　・・・・・

点を直線で結んでできる形は，九九の段によって異なり，いくつかの種類に分類できることがわかりました。例えば，4の段と6の段は同じ形になりました。

問1　九九の学習プリントの中にある図において，段の数を m としたとき，m の段と同じ形になる段の数を m を使った式で表しなさい。

問2　九九の学習プリントの，3のだんに示された形で，印のついた先端部分にできる角の和を求めなさい。ただし，0 から 9 までの各点は，円周を 10 等分した点とします。



3のだん

太一さんが調べたこと1

○　九九の表の数を，例のように，四角形の左上の位置にある数が 1 で，縦と横がそれぞれ n マスの四角形となるようにかこみ，その四すみの数の和を調べました。

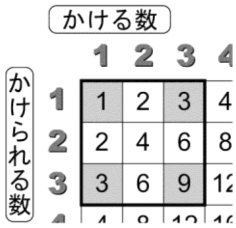
○　n の値と四すみの数の和には，下の表のような関係があることがわかりました。

表

n の値	…	3	4	…
四すみの数の和	…	16	25	…

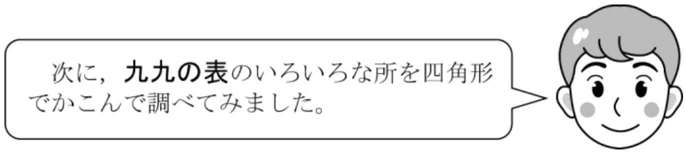
例　九九の表の一部

n=3のとき



n=4のとき

問3　太一さんが調べたこと1から，四すみの数の和を四角形の縦と横のマスの数 n を使った式で表しなさい。



太一さんが調べたこと2

○　九九の表の数を，例のように，縦と横がそれぞれ 2 マスの四角形でかこみ，その 4 つの数の和について調べました。

○　例のように四角形で 4 つの数をかこむと，その 4 つの数の和は，必ず奇数になるのではないかと予想しました。

6＋9＋12＋8＝35

10＋12＋18＋15＝55

例　九九の表の一部

問4　太一さんが調べたこと2で，縦と横がそれぞれ 2 マスの四角形で数をかこんだとき，四角形の左上の位置にある数を九九の表の左から x 番目，上から y 番目として，4 つの数の和が奇数となることを x，y を用いた式で説明しなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	
問4	

解答
問1　$10-m$
問2　720°
問3　$(n+1)^2$
問4
縦と横をそれぞれ2マスの四角形で数をかこみ
四角形の左上の位置にある数を
九九の表の左から x 番目
上から y 番目とすると
$xy+(x+1)y+(x+1)(y+1)+x(y+1)$
$=xy+xy+y+xy+x+y+1+xy+x$
$=2(2xy+x+y)+1$
x, y は1から9までの自然数だから$(2xy+x+y)$も自然数である。
自然数を2倍した $2(2xy+x+y)$ は偶数なので
$2(2xy+x+y)+1$ は奇数である。
したがって九九の表で縦と横をそれぞれ2マスの四角形でかこんだ数の和は奇数である。
解説
問1
同じ形になるのは
1の段と9の段
2の段と8の段
3の段と7の段
4の段と6の段
だから m の段と同じ形になる段の数は $10-m$ である。
問2
円周角の定理より円周を10等分したうちの1つの弧がなす円周角は $360^\circ\div10\div2=18^\circ$
印のついた1つの角の大きさは $18^\circ\times4=72^\circ$
印のついた角は10個あるから
求める角の和は $72^\circ\times10=720^\circ$
問3
四すみの数の和は $1\times1+n\times1+1\times n+n\times n=n^2+2n+1=(n+1)$
問4
4つの数はそれぞれ xy, $(x+1)y$, $x(y+1)$, $(x+1)(y+1)$だから
それらの和は
$xy+(x+1)y+x(y+1)+(x+1)(y+1)$
$=xy+xy+y+xy+x+xy+x+y+1$
$=4xy+2x+2y+1$
$=2(2xy+x+y)+1$
$2xy+x+y$ は自然数だから
$2(2xy+x+y)$は偶数であり $2(2xy+x+y)+1$ は奇数である。

【問 7】

n を整数とするとき，次のア～エの式のうち，その値がつねに奇数になるものはどれですか。一つ選び，記号を○で囲みなさい。

（大阪府 2018 年度 B）

ア $n+1$　　イ $2n$　　ウ $2n+1$　　エ n^2

解答欄

ア　　イ　　ウ　　エ

解答
ウ
解説
$2n$ は偶数でそれに 1 を加えた $2n+1$ はつねに奇数になる。

【問 8】

a を 2 けたの奇数とし，b を a の十の位の数と一の位の数とを入れかえてできる自然数とするとき，$\dfrac{a+b}{8}$ の値が 20 以上であって 21 以下である a の値をすべて求めなさい。

（大阪府　2018 年度　C）

解答欄

解答
69，87
解説
a は 2 けたの奇数だから
$a=10x+y$(x は 1 以上 9 以下の自然数
$y=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$)とおくと
$b=10y+x$ とかける。
$\dfrac{a+b}{8}$ は 20 以上 21 以下だから
$a+b$ は 160 以上 168 以下である。
よって $a+b=11(x+y)$ より $x+y$ は 14.5…以上 15.2…以下だから
$x+y=15$…①
$y=1,\ 3,\ 5$ のとき
x が 1 以上 9 以下であることを満たさないから不適。
$y=7$ のとき $x=8$ で $y=9$ のとき $x=6$ である。
したがって求める a の値は 69，87

【問 9】

健太さんと拓也さんが，教室で話をしています。

健太さん「数を使った面白いゲームを考えたんだ。好きな自然数を 1 つ思い浮かべてみて。」
拓也さん「分かった，思い浮かべたよ。」
健太さん「ある手順にしたがって計算すると，必ず思い浮かべた自然数になるんだ。」
拓也さん「へえ，どんな手順なの？」

健太さんは，考えた手順をあとのように説明しました。

【考えた手順】

〔1〕好きな自然数を 1 つ思い浮かべる。
〔2〕〔1〕の自然数とは別に，十の位の数が 2 である 2 桁の自然数を 1 つ選ぶ。
〔3〕〔2〕で選んだ 2 桁の自然数の十の位の数と一の位の数を足す。
〔4〕〔3〕で求めた数に，〔1〕の自然数を足す。
〔5〕〔4〕で求めた数から，〔2〕で選んだ 2 桁の自然数を引く。
〔6〕〔5〕で求めた数に，18 を足す。

拓也さん「本当だ！　手順にしたがって計算すると，僕が思い浮かべた自然数と同じ数になった。どうしてこんなことが起きるの？」
健太さん「それじゃあ，理由を説明してあげるね。」

健太さんは，【考えた手順】にしたがって計算した結果が，〔1〕で思い浮かべた自然数と同じ数になる理由を，下のように説明しました。

【健太さんの説明】

〔1〕で思い浮かべる自然数を a とする。また，〔2〕で選ぶ 2 桁の自然数の一の位の数を b とすると，〔2〕で選ぶ 2 桁の自然数は $20+b$ と表すことができる。

$\boxed{}$

よって，【考えた手順】にしたがって計算した結果は，〔1〕で思い浮かべた自然数と同じ数になる。

【健太さんの説明】の $\boxed{}$ に説明の続きを書き，説明を完成させなさい。

（広島県　2018 年度）

解答欄

解答
〔3〕の数は $2+b$
〔4〕の数は $2+b+a$
〔5〕の数は $2+b+a-(20+b)=a-18$
〔6〕の数は $(a-18)+18=a$
と表すことができる。
解説
手順にしたがって計算した結果が a になることを示す。

【問 10】

2 つの自然数 m, n がある。m は 7 でわると商が a, 余りが 3, n を 7 でわると商が b, 余りが 5 である。この 2 数の積 mn を 7 でわったときの余りを求めなさい。

（徳島県　2018 年度）

解答欄

解答
1
解説
$m=7a+3$, $n=7b+5$ と表される。
Mn
$=(7a+3)(7b+5)$
$=49ab+35a+21b+15$
$=7(7ab+5a+3b+2)+1$
$7ab+5a+3b+2$ は整数だから
$7(7ab+5a+3b+2)$は 7 の倍数である。
よって $7(7ab+5a+3b+2)+1$ を 7 でわったときの余りは 1

【問 11】

一方の整数が他方の整数より 4 大きい 2 つの整数がある。この 2 つの整数のうち，大きい方の整数の 2 乗から小さい方の整数の 2 乗をひいた差を M とする。

このとき，M は 8 の倍数であることを，文字式を使って証明せよ。

（香川県 2018 年度）

解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

小さい方の整数を n とすると大きい方の整数は $n+4$ と表される。

したがって $\mathrm{M}=(n+4)^2-n^2$

$=8n+16$

$=8(n+2)$

$n+2$ は整数だから M は 8 の倍数である。

解説

小さい方の整数を n とすると大きい方の整数は $n+4$ と表される。

したがって $\mathrm{M}=(n+4)^2-n^2$

$=n^2+8n+16-n^2$

$=8n+16$

$=8(n+2)$

$n+2$ は整数だから $\mathrm{M}=8\times$(整数)となり M は 8 の倍数である。

【問 12】

ゆうきさんは，糸，くぎ，ペン，ボードを用意し，次の【手順】にしたがって，図1のような道具をつくり，図2の曲線をかいた。図2は，曲線がかかれた図1のボードを真上から見た図であり，糸の端に固定したペンでかいた曲線を実線で示したものである。このことについて，下の問1・問2に答えなさい。ただし，ペンの傾きや，糸の伸び縮みおよび太さについては考えないものとする。

（高知県 2018 年度 A）

【手順】

① ボードに正三角形 ABC をかき，3 つの頂点 A，B，C にそれぞれくぎを打つ。

② 糸の一方の端を頂点 C のくぎに固定する。辺 BC を頂点 C の方向に延長した直線上に CD＝3BC となる点 D をとり，点 D の位置にペンの先端がくるように，糸のもう一方の端にペンを固定する。

③ 糸の端に固定したペンを，糸がたるまないように引っ張りながら，正三角形 ABC のまわりを反時計回りに動かす。ペンの先端を点 D から動かし始め，辺 AC を頂点 A の方向に延長した直線と交わる点 E と，辺 AB を頂点 B の方向に延長した直線と交わる点 F を通り，頂点 C まで動かして，図2の曲線 DEFC をかく。

図1

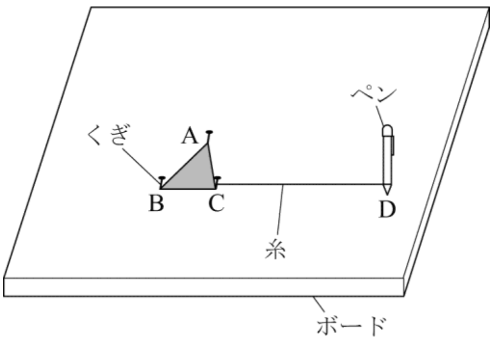
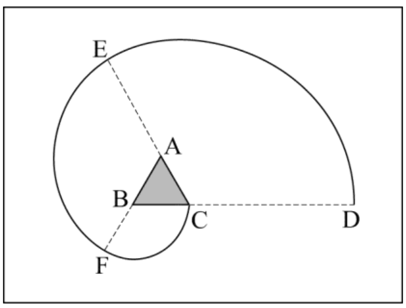


図2



問1 図2において，正三角形 ABC の 1 辺の長さが 4 cm のとき，線分 AE と線分 AF と曲線 EF で囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，円周率は π を用いること。

問2 図2において，正三角形 ABC の 1 辺の長さが a cm のとき，糸の端に固定したペンでかいた曲線 DEFC の長さは，$4\pi a$ cm と表すことができる。曲線 DEFC の長さが $4\pi a$ cm と表せることを，言葉と式を使って説明せよ。ただし，π は円周率である。

解答欄

問1	cm^2
問2	したがって，曲線 DEFC の長さは $4\pi a$ cm である。

解答

問1　$\dfrac{64}{3}\pi$　cm^2

問2

曲線 DE は半径 $3a$, 中心角 120° のおうぎ形の弧の長さなので

$2\pi\times3a\times\dfrac{120}{360}=2\pi a$ cm　①

曲線 EF は半径 $2a$, 中心角 120° のおうぎ形の弧の長さなので

$2\pi\times2a\times\dfrac{120}{360}=\dfrac{4}{3}\pi a$ cm　②

曲線 FC は半径 a, 中心角 120° のおうぎ形の弧の長さなので

$2\pi\times a\times\dfrac{120}{360}=\dfrac{2}{3}\pi a$ cm　③

①, ②, ③より

$2\pi a+\dfrac{4}{3}\pi a+\dfrac{2}{3}\pi a=4\pi a$ cm

したがって曲線 DEFC の長さは $4\pi a$ cm である。

解説

問1

CD＝3BC で AC＝4cm だから AE＝12－4＝8cm

線分 AE と線分 AF と曲線 EF で囲まれた図形は

半径 8cm で中心角が 180°－60°＝120° のおうぎ形だから

その面積は$\pi\times8^2\times\dfrac{120}{360}=\dfrac{64}{3}\pi$　cm^2

問2

曲線 DE は半径 $3a$ cm で中心角が 180°－60°＝120° のおうぎ形の弧

曲線 EF は半径 $2a$ cm で中心角が 120° のおうぎ形の弧

曲線 FC は半径 a cm で中心角が 120° のおうぎ形の弧である。

その長さの合計は

$2\pi\times3a\times\dfrac{120}{360}+2\pi\times2a\times\dfrac{120}{360}+2\pi\times a\times\dfrac{120}{360}=\dfrac{2}{3}\pi\times(3a+2a+a)=4\pi a$ cm

よって曲線 DEFC の長さは $4\pi a$ cm と表せる。

【問 13】

3 の倍数は，整数 n を用いて 3n と表される。

次の問1，問2に答えよ。

（福岡県 2018 年度）

問1 次のア～カの数のうち，整数 n を用いて 3n＋1 と表されるものをすべて選び，記号で答えよ。

ア 80　　イ 81　　ウ 82　　エ 83　　オ 84　　カ 85

問2 3 と 6，12 と 15 のように，連続する 2 つの 3 の倍数において，大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差は，もとの 2 つの数の和の 3 倍に等しくなることの証明を完成させよ。

〔証明〕

整数 n を用いると，

したがって，連続する 2 つの 3 の倍数において，大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差は，もとの 2 つの数の和の 3 倍に等しくなる。

解答欄

問1	
問2	〔証明〕 整数 n を用いると， したがって，連続する 2 つの 3 の倍数において，大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差は，もとの 2 つの数の和の 3 倍に等しくなる。

解答
問1　ウ, カ
問2
〔証明〕
整数 n を用いると
連続する 2 つの 3 の倍数のうち小さい方の数は 3n 大きい方の数は 3n＋3 と表される。
大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差は
$(3n+3)^2-(3n)^2=9n^2+18n+9-9n^2$
$=18n+9$
$=3(6n+3)$
$=3\{3n+(3n+3)\}$
3n, 3n＋3 はもとの 2 つの数だから $3\{3n+(3n+3)\}$はもとの 2 つの数の和の 3 倍である。
したがって連続する 2 つの 3 の倍数において
大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差はもとの 2 つの数の和の 3 倍に等しくなる。
解説
問1
整数 n を用いて 3n＋1 と表される数は 3 でわったときに 1 あまる整数だから
$82=3\times27+1$ と $85=3\times28+1$ の 2 つである。
問2
連続する 2 つの 3 の倍数は
大きい方の数から小さい方の数をひいて 3 となる 2 つの数であればよいので
整数nを用いたとき小さい方の数を 3n－3 大きい方の数を 3n などと表しても同じ考え方で証明ができる。

【問 14】

$460-20n$ の値が，ある自然数の 2 乗となるような自然数 n の値をすべて求めなさい。

（大分県 2018 年度）

解答欄

$n=$

解答
$n=3,\ 18$
解説
$460-20n=20(23-n)=2^2\times5(23-n)$より
$23-n$ が $5\times$(平方数)の形になるような n を探せばよい。
そのようなものは
$23-n=5\times1^2$
5×2^2
の 2 個だけである。
よって $n=3,\ 18$