

4. 相似の証明と長さ・求積などの複合問題 【2016 年度出題】

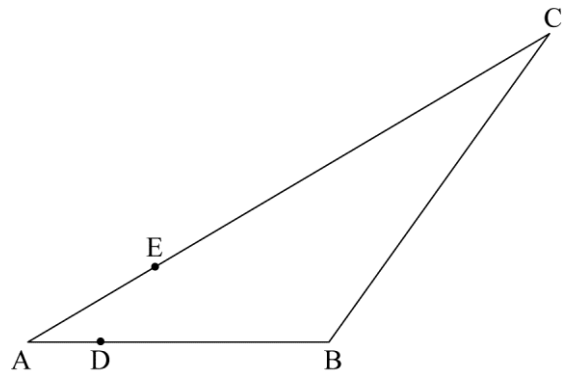
【問 1】

図のように、 $\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 D 、辺 AC 上に点 E が
あり、 $AD:DB=AE:EC=1:3$ とします。

次の問いに答えなさい。

(北海道 2016 年度)

問1 $\angle ACB=25^\circ$ のとき、 $\angle CED$ の大きさを求めなさい。



問2 $ED:EB=1:2$ のとき、 $\triangle BED \sim \triangle CBE$ を証明しなさい。

解答欄

問1	度
問2	[証明]

解答

問1 155 度

問2

〔証明〕

$\triangle BED$ と $\triangle CBE$ において

仮定より

$DE \parallel BC$

よって $\angle BED = \angle CBE$ (錯角) … ①

仮定より

$ED:EB = 1:2$ … ②

また, $DE \parallel BC$ なので

仮定より

$DE:BC = 1:4$ … ③

よって, $EB:BC = 2:4 = 1:2$ … ④

②, ④より

$ED:EB = EB:BC$ … ⑤

①, ⑤より

対応する 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BED \sim \triangle CBE$

解説

問1

$AE:EC = 1:3$

$AD:DB = 1:3$ なので

$ED \parallel CB$

同位角が等しいことにより $\angle AED = 25^\circ$

よって $\angle CED = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$

問2

$\triangle BED \sim \triangle CBE$ の証明は

$ED \parallel BC$ より, $\angle BED = \angle CBE$

$ED:BC = 1:4$ で

$ED:EB = 1:2$ より

EB と BC の比が $EB:BC = 1:2$ と求まる。

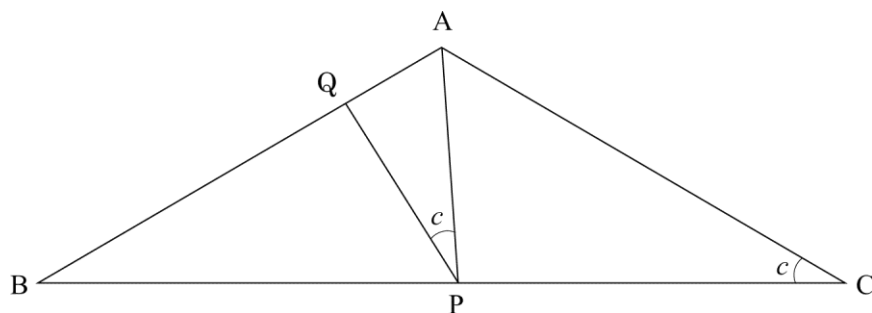
したがって対応する 2 組の辺の比とその間の角が等しいので相似となる。

【問 2】

次の図のように $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC があります。辺 BC 上に B, C と異なる点 P をとり、辺 AB 上に $\angle APQ = \angle ACP$ となるように点 Q をとり、 $\angle APQ = \angle ACP = \angle c$ とします。

このとき、 $PB:AC=BQ:CP$ であることを証明しなさい。

(岩手県 2016 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle PBQ$ と $\triangle ACP$ において

二等辺三角形 ABC の底角は等しいから

$$\angle PBQ = \angle ACP \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ACP$ の外角 $\angle APB$ は

それととなり合わない 2 つの内角の和に等しいから

$$\angle BPQ + \angle c = \angle CAP + \angle c$$

$$\angle BPQ = \angle CAP \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PBQ \sim \triangle ACP$$

対応する辺の比は等しいから

$$PB:AC = BQ:CP$$

解説

PB, BQ を辺にもつ $\triangle PBQ$ と

AC, CP を辺にもつ $\triangle ACP$ に着目し

2 つの三角形が相似であることを導く。

【問3】

長方形 $ABCD$ があり, $AB=24$ cm, $BC=10\sqrt{3}$ cm, 点 M, N は, それぞれ辺 AD, BC の中点である。図1のように, 折り目が点 B を通り, 点 C が線分 MN 上にくるように折り返す。点 C が移った点を E , 折り目を線分 BF とし, 線分 FE を延長した直線と辺 AB の交点を G とする。さらに, 図2のように, 線分 FG を折り目として折り返し, 点 D が移った点を I とすると, 点 I は線分 BF 上の点になった。点 A が移った点を H , 線分 HI と線分 GB の交点を J とする。

次の問1～問3に答えなさい。

(秋田県 2016 年度)

図1

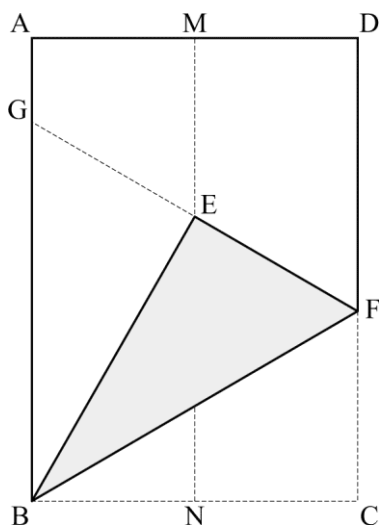
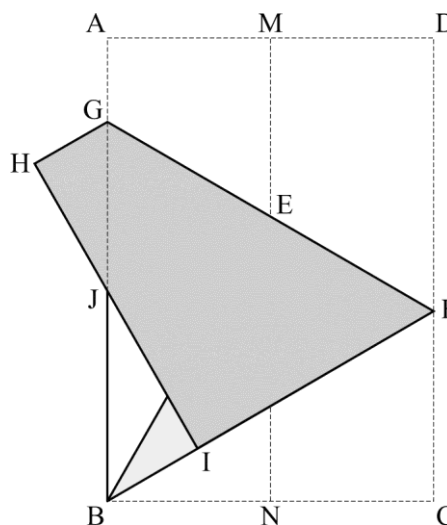


図2



問1 $\angle BFG$ の大きさを次のように求めた。求め方が正しくなるように, ア～エにあてはまる記号や数を書きなさい。

線分 BF で折り返したから, $\angle BFG = \angle$

線分 FG で折り返したから, $\angle BFG = \angle$

よって, $\angle BFG = \angle$ $= \angle$

点 C, F, D は一直線上にあるから,

$\angle BFG =$ $^\circ \div 3 =$ $^\circ$

問2 $\triangle GHJ \sim \triangle BIJ$ となることを証明しなさい。

問3 四角形 $GJIF$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
	エ	
問2	〔証明〕	
問3	cm ²	

解答

問1

ア BFC

イ DFG

ウ 180

エ 60

問2

〔証明〕

$\triangle GHJ$ と $\triangle BIJ$ において

対頂角は等しいから

$\angle GJH = \angle BJI \cdots \textcircled{1}$

$AG \parallel DF$ であるから

$HG \parallel BF$

平行線の錯角は等しいから

$\angle GHJ = \angle BIJ \cdots \textcircled{2}$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle GHJ \sim \triangle BIJ$

問3 $82\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

折り返す前と後で同じところがあるのでそこに着目すると

$\angle BFC = \angle BFG = \angle DFG$ で3つの角の和が 180° となるので1つの角は 60° となる。

問2

$\triangle GHJ$ と $\triangle BIJ$ において

対頂角が等しいことと直角の角があることに着目する。

問3

$\triangle EBF \equiv \triangle CBF$

また, $\triangle EBG$ と $\triangle EBF$ において

$AB \parallel MN \parallel DC$ なので $GE = EF$

EB は共通でこれらの間の角が $\angle GEB = \angle FEB = 90^\circ$ により

$\triangle EBG \equiv \triangle EBF$

問1より

これら3つの三角形は1つの角が 60° の直角三角形であるので

辺の比は $1:2:\sqrt{3}$

$GE = EF = 10\text{cm}$

$BG = BF = 20\text{cm}$

$AG = 4\text{cm}$

四角形 $GJIF$ の面積は

四角形 $GHIF$ から $\triangle GHJ$ を除いた面積となる。

四角形 $GHIF$ は四角形 $AGFD$ である。

また $\triangle GHJ \sim \triangle JIB$ で $\angle IBJ = 60^\circ$ なので

これら2つの三角形の辺の比も $1:2:\sqrt{3}$ であり

$HJ = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

よって求める面積は $\frac{1}{2} \times (14+4) \times 10\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 82\sqrt{3} \text{ cm}^2$

【問 4】

長方形 $ABCD$ があり, $AB=10\text{ cm}$, $BC=8\text{ cm}$, 点 E は辺 CD 上の点で $CE=6\text{ cm}$ である。図1のように, 線分 BE を折り目として折り返し, 点 C が移った点を F , 線分 BF を延長した直線と辺 AD の交点を G とする。さらに, 図2のように, 線分 BG を折り目として折り返し, 点 A が移った点を H , 線分 BH と線分 EF の交点を I とする。

次の問1～問3に答えなさい。

(秋田県 2016 年度)

図1

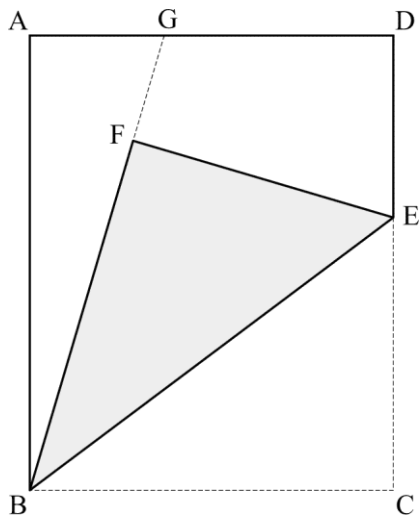
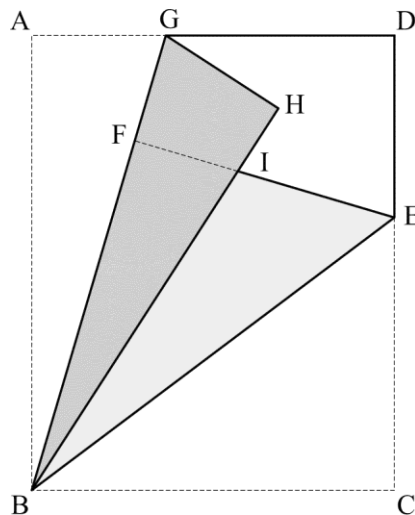


図2



問1 $\triangle BFI \sim \triangle BHG$ となることを証明しなさい。

問2 $\angle EBC = a^\circ$ のとき, $\angle IBE$ の大きさを a を用いて表しなさい。考え方がわかるように過程も書きなさい。

問3 $\triangle IBE$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	〔過程〕	
問3	答	。 cm^2

解答

問1

〔証明〕

$\triangle BFI$ と $\triangle BHG$ において

$\angle BFI$ は $\angle C$ を折り返した角だから

$$\angle BFI = \angle C = 90^\circ$$

$\angle BHG$ は $\angle A$ を折り返した角だから

$$\angle BHG = \angle A = 90^\circ$$

よって $\angle BFI = \angle BHG \cdots \textcircled{1}$

共通な角だから

$$\angle FBI = \angle HBG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle BFI \sim \triangle BHG$$

問2

〔過程〕

$\angle EBF$ は $\angle EBC$ を折り返した角だから

$$\angle EBF = \angle EBC = a^\circ$$

$$\angle ABG = \angle ABC - \angle EBF - \angle EBC = (90 - 2a)^\circ$$

$\angle GBH$ は $\angle ABG$ を折り返した角だから

$$\angle GBH = \angle ABG = (90 - 2a)^\circ$$

したがって

$$\angle IBE = \angle EBF - \angle GBH = (3a - 90)^\circ$$

答 $(3a - 90)^\circ$

$$\text{問3 } \frac{44}{3} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle BFI$ と $\triangle BHG$ において

$$\angle BFI = \angle BHG = 90^\circ$$

$\angle GBH$ は共通なので相似となる。

問2

折り返した角が等しいので $\angle EBF = \angle EBC = a^\circ$

$$\angle ABG = \angle ABC - 2\angle EBF = 90^\circ - 2a^\circ$$

さらに $\angle GBH = \angle ABG$ より $\angle IBE = (3a - 90)^\circ$

問3

図1において EF の延長と辺 AB の交点を J とおく。

$$\angle JEB = \angle BEC \text{ で } \angle BEC + \angle EBC = 90^\circ$$

また $\angle JBE + \angle EBC = 90^\circ$ なので

$\angle JBE = \angle JEB$ となり $\triangle JBE$ は $JB = JE$ の二等辺三角形。

$JF = x$ とおくと $\triangle JBF$ において

$$\text{三平方の定理より } (6+x)^2 = x^2 + 8^2$$

$$12x = 28$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$\triangle IBE$ の面積は台形 $JBCE$ から $2 \times \triangle JBF$ と $\triangle BEC$ の面積をひいたものとなる。

$$\text{台形 } JBCE \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times \left(6 + 6 + \frac{7}{3} \right) \times 8 = \frac{172}{3}$$

$$2 \times \triangle JBF \text{ の面積} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times 8 = \frac{56}{3}$$

$$\triangle BCE \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

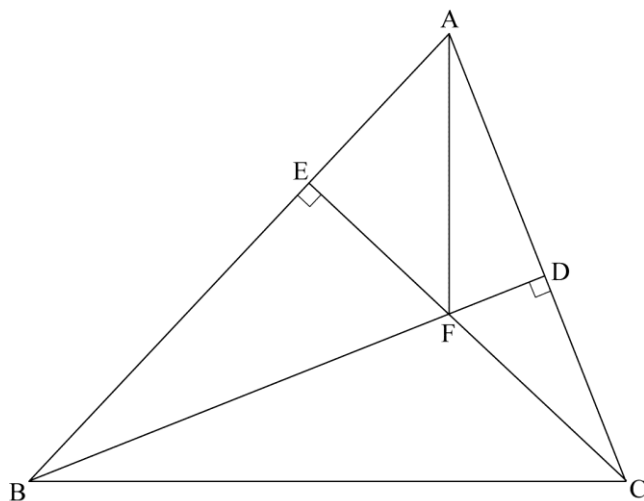
$$\text{よって } \frac{172}{3} - \frac{56}{3} - 24 = \frac{44}{3} \text{ cm}^2$$

【問 5】

下の図のように、 $\triangle ABC$ がある。頂点 B, C からそれぞれ辺 AC, AB に垂線をひき、辺 AC, AB との交点をそれぞれ D, E とし、線分 BD と線分 CE との交点を F とする。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(茨城県 2016 年度)



問1 $\triangle BFE \sim \triangle CFD$ であることを証明しなさい。

問2 $AC=6\text{ cm}$, $BE=5\text{ cm}$, $\angle ABC=45^\circ$ のとき、線分 AF の長さを求めなさい。

解答欄

問1		
問2		cm

解答

問1

$\triangle BFE$ と $\triangle CFD$ において

仮定から

$$\angle BEF = \angle CDF \cdots \textcircled{1}$$

対頂角だから

$$\angle BFE = \angle CFD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle BFE \sim \triangle CFD$$

問2 $\sqrt{22}$ cm

解説

問1

$\triangle BFE$ と $\triangle CFD$ において

$$\angle BEF = \angle CDF = 90^\circ$$

また, 対頂角は等しいので

$$\angle BFE = \angle CFD$$

よって 2 つの三角形は相似である。

問2

$\triangle BEC$ は直角二等辺三角形で $\angle ABC = 45^\circ$ なので $BE = CE = 5$

問1より

$\triangle BFE \sim \triangle CFD$ であり

かつ $\triangle CFD \sim \triangle CAE$ より

$$\triangle BFE \sim \triangle CAE$$

ここで $\triangle CAE$ に三平方の定理を用いると

$$AE = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11} \text{ となり}$$

$\triangle CAE$ に相似な三角形の辺の比も $5:6:\sqrt{11}$ となる。

$$\text{このことより } BF = 6, EF = \sqrt{11}$$

したがって

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 = (\sqrt{11})^2 + (\sqrt{11})^2$$

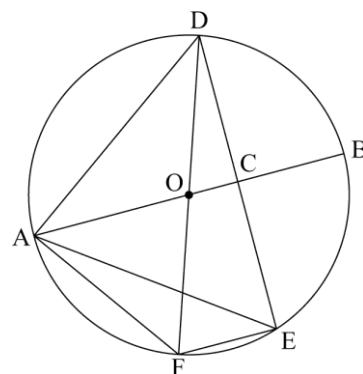
$$\text{よって } AF = \sqrt{22} \text{ cm}$$

【問 6】

図のように、線分 AB を直径とする円 O がある。線分 OB 上に、2 点 O, B と異なる点 C をとる。点 C を通り、線分 OB と垂直に交わる直線と、円との交点を D, E とする。また、線分 DO の延長線と円との交点を F とする。3 点 A, E, F をそれぞれ結び、2 点 A, D を結ぶ。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(千葉県 2016 年度 前期)



- 問1 $\triangle AOF \sim \triangle DAE$ となることの証明を次ページの の中に途中まで示してある。 (a) , (b) に入る最も適当なものを、次の選択肢のア～カのうちからそれぞれ 1 つずつ選び、符号で答えなさい。
- また、(c) には証明の続きを書き、証明を完成させなさい。ただし、 の中の①～④に示されている関係を使う場合、番号の①～④を用いてもかまわないものとする。

証明

$\triangle AOF$ と $\triangle DAE$ において、

仮定より、 $\angle DCA = 90^\circ$ …①

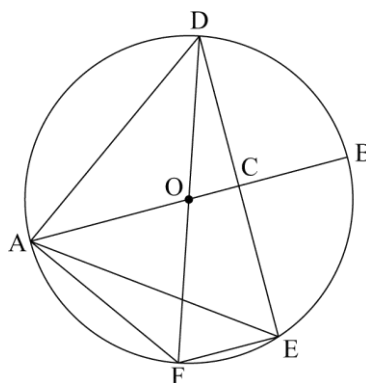
線分 DF は直径なので、

(a) $= 90^\circ$ …②

①、②より、 $\angle DCA =$ (a) …③

③より、(b) が等しいので、

$AB \parallel FE$ …④



(c)

—— 選択肢 ——

ア $\angle EAD$

イ $\angle DEF$

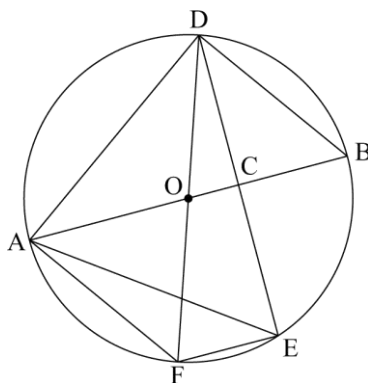
ウ $\angle FDA$

エ 円周角

オ 対頂角

カ 同位角

- 問2 2 点 B, D を結ぶ。円 O の半径が 5 cm 、 $BD = 6\text{ cm}$ のとき、 $\triangle AEF$ の面積を求めなさい。



解答欄

問1	(a)	
	(b)	
	(c)	
問2	cm ²	

解答

問1

(a) イ

(b) カ

(c)

④より

平行線の錯角は等しいので

$$\angle AOF = \angle DFE \cdots ⑤$$

$\widehat{DE}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle DFE = \angle DAE \cdots ⑥$$

⑤, ⑥より

$$\angle AOF = \angle DAE \cdots ⑦$$

$\widehat{AD}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle AFO = \angle DEA \cdots ⑧$$

⑦, ⑧より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AOF \sim \triangle DAE$$

$$\text{問2} \quad \frac{168}{25} \text{ cm}^2$$

解説

問1

(a)

直径に対する円周角は 90° である。

(b)

$\angle DCA$ と $\angle DEF$ は同位角である。

(c)

④と円周角の定理を用いて

2つの三角形の2組の角が等しいという相似条件を示す。

問2

$\triangle OBD$ で

$$OB = OD = 5 \text{ cm}, BD = 6 \text{ cm} \text{ より}$$

$$BD \text{ の中点を } M \text{ とすると } OM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$\triangle OBD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ cm}^2 \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 5 \times CD = 12, CD = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

$\triangle OCD$ で

$$OC^2 = 5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \text{ より}$$

$$OC = \frac{7}{5} \text{ cm}$$

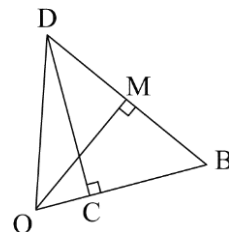
$\triangle DOC \sim \triangle DFE$ で

相似比は 1:2 であるから

$$EF = 2OC = \frac{14}{5} \text{ cm}$$

$$\text{また } CE = CD = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle AEF = \frac{1}{2} \times EF \times CE = \frac{1}{2} \times \frac{14}{5} \times \frac{24}{5} = \frac{168}{25} \text{ cm}^2$$



【問 7】

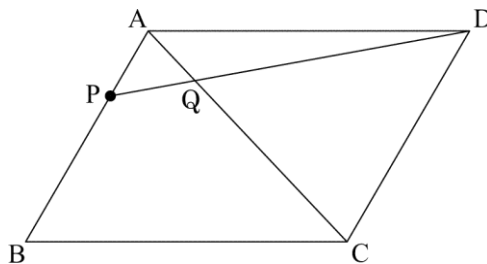
右の図1で、四角形ABCDは、平行四辺形である。点Pは、辺AB上にある点で、頂点A、頂点Bのいずれにも一致しない。

頂点Aと頂点Cを結んだ線分と、頂点Dと点Pを結んだ線分との交点をQとする。

次の各問に答えよ。

(東京都 2016 年度)

図1



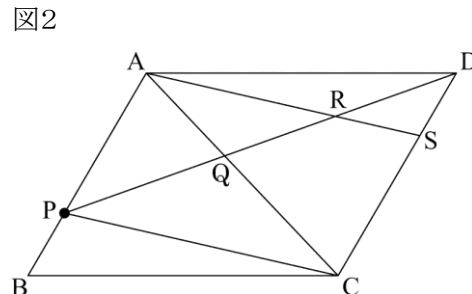
問1 図1において、 $\angle ABC = 60^\circ$ 、 $\angle DCA = 75^\circ$ 、 $\angle ADP = a^\circ$ とするとき、 $\triangle CDQ$ の内角である $\angle CQD$ の大きさを表す式を、次のア～エのうちから選び、記号で答えよ。

ア $(45 - a)$ 度 イ $(60 - a)$ 度 ウ $(a + 30)$ 度 エ $(a + 45)$ 度

問2 右の図2は、図1において、頂点Cと点Pを結び、頂点Aを通り線分CPに平行な直線を引き、線分DPとの交点をR、辺CDとの交点をSとした場合を表している。

次の(1), (2)に答えよ。

(1) $\triangle AQR \sim \triangle CQP$ であることを証明せよ。



(2) 次の の中の「い」「う」「え」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

図2において、 $AP:PB = 2:1$ のとき、 $\triangle AQR$ の面積は、四角形APCSの面積の

$\frac{\boxed{\text{い}}}{\boxed{\text{う え}}}$ 倍

である。

問1											
問2	(1)	〔証明〕 △AQR と △CQP において、									
		$\triangle AQR \sim \triangle CQP$									
	(2)	い	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
		う	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
え		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	

解答

問1 エ

問2

(1)

〔証明〕

$\triangle AQR$ と $\triangle CQP$ において

対頂角は等しいから

$$\angle AQR = \angle OQP \cdots \textcircled{1}$$

仮定から $AS \parallel PC$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle ARQ = \angle CPQ \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AQR \sim \triangle CQP$$

(2)

い 2

う 1

え 5

解説

問1

$AD \parallel BC$ より錯角は等しいので

$$\angle BAC = \angle ACD = 75^\circ$$

また $\angle DAC = \angle ACB$

ここで $\triangle ABC$ において内角の和は 180° だから

$$\angle ACB = \angle DAC = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

よって $\angle CQD = \alpha^\circ + 45^\circ$ (エ)

問2

(1)

対頂角が等しいことと錯角が等しいことから相似を証明する。

(2)

$AP:PB=2:1$ と

$\triangle APQ$ と $\triangle CQD$ が $2:3$ の相似であることより

$$AQ:QC=2:3$$

このことより

$\triangle AQR$ と $\triangle CQP$ の相似比は $2:3$ である。

平行四辺形 $APCS$ の面積を S とおくと

$$\triangle CQP \text{ の面積} = \frac{1}{2} S \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} S$$

$$\triangle AQR \text{ の面積} = \frac{3}{10} S \times \frac{4}{9} = \frac{2}{15} S$$

よって $\frac{2}{15}$ 倍である。

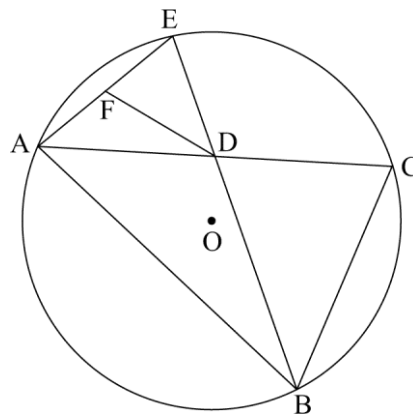
【問 8】

右の図のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C を $AB > BC$ となるようにとり、線分 AC の中点を D とする。

また、線分 BD の延長と円 O との交点で点 B とは異なる点を E とし、線分 AE の中点を F とする。

このとき、三角形 ABC と三角形 DFE が相似であることを証明しなさい。

(神奈川県 2016 年度)



解答欄

〔証明〕

解答

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle DFE$ において

まず $\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle ACB = \angle AEB$$

$$\text{よって } \angle ACB = \angle DEF \cdots \textcircled{1}$$

次に線分 CE を引くと $\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAC = \angle BEC \cdots \textcircled{2}$$

また $\triangle ACE$ において

点 D は辺 AC の中点, 点 F は辺 AE の中点であるから

中点連結定理より

$$CE \parallel DF \cdots \textcircled{3}$$

③より

平行線の錯角は等しいから

$$\angle CED = \angle FDE$$

$$\text{よって } \angle BEC = \angle FDE \cdots \textcircled{4}$$

②, ④より

$$\angle BAC = \angle FDE \cdots \textcircled{5}$$

①, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle DFE$$

解説

円周角の定理から $\angle ACB = \angle AEB$

また AC, AE のそれぞれの中点が D, F であることから

中点連結定理より

$$CE \parallel DF$$

さらに平行線の錯角が用いられ

2組の角が等しいことを示せ相似を証明できる。

【問 9】

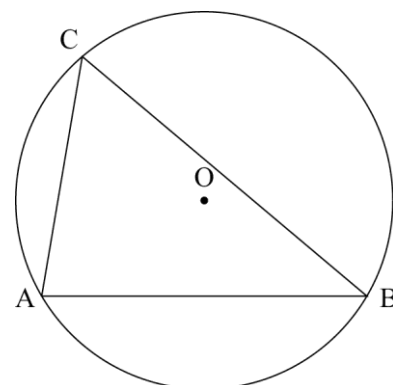
図1～図3のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C があり、 $AB=6\text{ cm}$, $\angle ACB=60^\circ$ である。

このとき、次の問1～問3に答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(石川県 2016 年度)

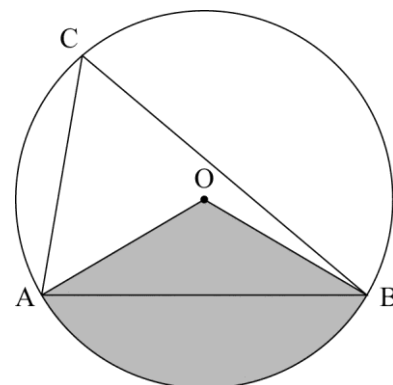
問1 点 A を含まない $\widehat{BC}$ の長さが、点 B を含まない $\widehat{AC}$ の長さの 2 倍になるとき、 $\angle ABC$ の大きさを求めなさい。

図1



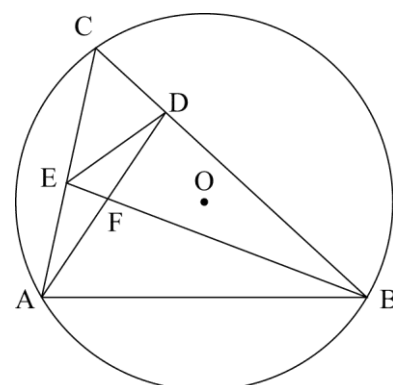
問2 図2における  部分のおうぎ形 OAB の面積を求めなさい。なお、途中の計算も書くこと。

図2



問3 図3のように、辺 BC, AC 上にそれぞれ点 D, E があり、 AD, BE の交点を F とする。 $\triangle FED \sim \triangle FAB$ となるとき、 $\triangle CAD \sim \triangle CBE$ であることを証明しなさい。

図3



解答欄

問1	度
問2	〔計算〕 答 cm²
問3	〔証明〕

解答

問1 40 度

問2

〔計算〕

円周角の定理から

$$\angle AOB = 120^\circ$$

円 O の半径は $2\sqrt{3}$

したがって求めるおうぎ形 OAB の面積は

$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{120}{360} = 4\pi$$

答 $4\pi \text{ cm}^2$

問3

〔証明〕

$\triangle CAD$ と $\triangle CBE$ について

$$\angle ACD = \angle BCE \text{ (共通)} \cdots \textcircled{1}$$

ここで $\triangle FED \sim \triangle FAB$ より

$$\angle FDE = \angle FBA$$

4 点 A, B, D, E について

B, D が直線 AE の同じ側にあつて

$$\angle ADE = \angle ABE \text{ であるから}$$

この 4 点は 1 つの円周上にある。

等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle CAD = \angle CBE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle CAD \sim \triangle CBE$$

解説

問1

同じ円で中心角は弧の長さに比例するから

$$\angle BOC = 2\angle AOC$$

$$\text{また } \angle AOB = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$$

$$\angle AOC = \angle x \text{ とおくと}$$

$$3\angle x + 120^\circ = 360^\circ \text{ より}$$

$$\angle x = 80^\circ$$

$$\text{よって } \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \angle x = 40^\circ$$

問2

右の図の直角三角形 OAH において

$$OA:AH = 2:\sqrt{3} \text{ より}$$

$$OA = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

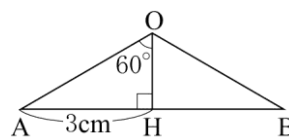
おうぎ形 OAB の面積は $\pi \times OA^2 \times \frac{120}{360}$ である。

問3

$\triangle FED \sim \triangle FAB$ より

円周角の定理の逆から

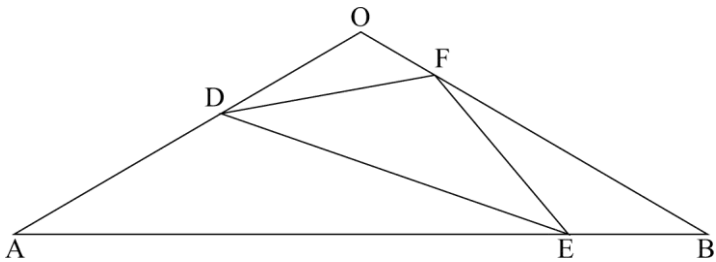
4 点 A, B, D, E が同じ円周上にあることを示す。



【問 10】

下の図のように、 $OA=OB$ で $\angle AOB=120^\circ$ の二等辺三角形 OAB において、辺 OA , AB , OB 上にそれぞれ点 D , E , F をとる。 $\triangle DEF$ が $FD=FE$ で $\angle DFE=120^\circ$ の二等辺三角形となるときの、次の問いに答えよ。

(福井県 2016 年度)



問1 $\triangle ADE \sim \triangle BEF$ を証明せよ。

〔証明〕

問2 $OA=10\text{ cm}$, $OD=3\text{ cm}$ とするとき、線分 OF の長さを求めよ。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	cm	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ADE$ と $\triangle BEF$ で

$\triangle OAB$ は $OA=OB$ で $\angle AOB=120^\circ$ の二等辺三角形だから

$\angle DAE=\angle EBF=30^\circ \cdots \textcircled{1}$

よって

$\angle FEA=\angle EBF+\angle EFB=30^\circ+\angle EFB \cdots \textcircled{2}$

$\triangle DEF$ は $FD=FE$ で $\angle DFE=120^\circ$ の二等辺三角形だから

$\angle DEF=30^\circ$

よって

$\angle FEA=\angle DEF+\angle DEA=30^\circ+\angle DEA \cdots \textcircled{3}$

②, ③から

$\angle DEA=\angle EFB \cdots \textcircled{4}$

①, ④から

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ADE \sim \triangle BEF$

問2 $\frac{7}{3}$ cm

解説

問1

$\triangle OAB$ と $\triangle DEF$ はともに 120° の角をもつ二等辺三角形であることから

$\triangle ADE$ と $\triangle BEF$ の2組の角がそれぞれ等しくなることを導く。

問2

問1より $\triangle ADE \sim \triangle BEF$ だから

$AD:BE=DE:EF \cdots \textcircled{1}$

$AE:BF=DE:EF \cdots \textcircled{2}$

右の図で $ME:EF=\sqrt{3}:2$ より

$DE:EF=2\sqrt{3}:2=\sqrt{3}:1$

①より

$AD:BE=\sqrt{3}:1$ だから

$BE=\frac{7 \times 1}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm

また AB の中点を N とすると

$AN=5\sqrt{3}$ より

$AB=10\sqrt{3}$ cm

よって

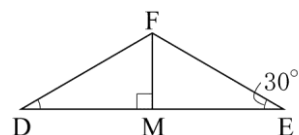
$AE=10\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{3}}{3}=\frac{23\sqrt{3}}{3}$ cm

②より

$AE:BF=\sqrt{3}:1$ だから

$BF=\frac{23\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{23}{3}$ cm

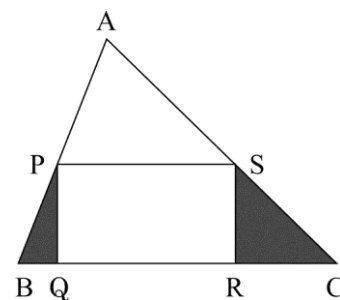
以上より $OF=10-\frac{23}{3}=\frac{7}{3}$ cm



【問 11】

図のように、 $\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 P 、辺 BC 上に点 Q 、 R 、辺 CA 上に点 S を、四角形 $PQRS$ が長方形となるようにとる。黒く塗られた 2 つの三角形が相似になるのは、 $\triangle ABC$ についてどのようなことがいえるときか、すべて答えよ。

(福井県 2016 年度)



解答欄

解答

$\angle B = \angle C$ のとき

$\angle A = 90^\circ$ のとき

解説

$\triangle ABC$ が $\angle ABC = \angle ACB$ の二等辺三角形のとき

$\triangle PBQ$ と $\triangle SCR$ において

$\angle PBQ = \angle SCR$, $\angle PQB = \angle SRC = 90^\circ$ となり

$\triangle PBQ \sim \triangle SCR$

また $\triangle ABC$ が $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形のとき

$\triangle PBQ$ と $\triangle CSR$ において

$\angle PQB = \angle CRS = 90^\circ$

$\angle BPQ = 180^\circ - (90^\circ + \angle PBQ) = 90^\circ - \angle PBQ$

$\angle SCR = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = 90^\circ - \angle ABC$

$\angle PBQ = \angle ABC$ より

$\angle BPQ = \angle SCR$

よって

$\triangle PBQ \sim \triangle CSR$

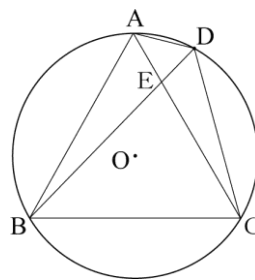
【問 12】

正三角形 ABC と、3 点 A, B, C を通る半径 2 cm の円 O がある。この円 O の点 B を含まない $\widehat{AC}$ 上に 2 点 A, C と異なる点 D をとる。

このとき、次の問1、問2に答えなさい。ただし、円周率は π とする。

(山梨県 2016 年度)

図1



問1 図1のように、点 D が、点 B を含まない $\widehat{AC}$ において、 $\widehat{AD}$ と $\widehat{DC}$ の長さの比が $1:3$ となるような位置にあるとする。また、線分 AC, BD の交点を E とする。

このとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(1) $\angle ACD$ の大きさを求めなさい。

(2) 線分 CD の長さを求めなさい。

(3) $\triangle ABD$ と相似な三角形をすべて書きなさい。ただし、相似な三角形の対応する頂点は $\triangle ABD$ と同じ順序で書くこと。

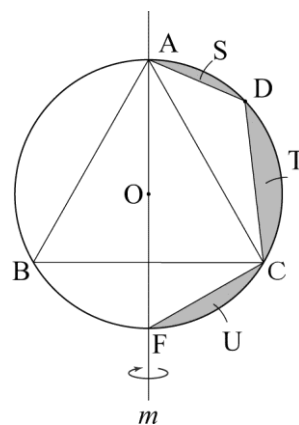
問2 図2において、線分 AF は円 O の直径であり、直線 m は 2 点 A, F を通る直

図2

線である。また、 で示したように、円 O の点 B を含まない $\widehat{AD}, \widehat{DC}, \widehat{CF}$ と、弦 AD, DC, CF とでそれぞれ囲まれた部分を S, T, U とする。

このとき、次の(1), (2)に答えなさい。

(1) 点 D を、直線 m を軸として 1 回転させてできる図形は円になる。この円の面積が $2\pi\text{ cm}^2$ となるような位置に点 D があるとき、点 B を含まない $\widehat{AC}$ において、 $\widehat{AD}$ と $\widehat{DC}$ の長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。



(2) 点 D が、 S, T, U の面積の和が最小になるような位置にあるとする。このとき、 S, T, U を、直線 m を軸として 1 回転させたときに、 S, T, U それぞれが動いてできる立体の体積の和を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	度
	(2)	cm
	(3)	
問2	(1)	$\widehat{AD}:\widehat{DC}=$:
	(2)	cm ³

解答

問1

(1) 15 度

(2) $2\sqrt{2}$ cm

(3) $\triangle EBA$, $\triangle ECD$

問2

(1) $\widehat{AD}:\widehat{DC}=3:5$

(2) $\frac{8}{3}\pi$ cm³

解説

問1

(1)

比は 1:3 だから 1:4 $\angle ACD = \frac{1}{4} \angle ABC = \frac{1}{4} \times 60^\circ = 15^\circ$

(2)

$\angle ABD = \angle ACD = 15^\circ$ だから $\angle DBC = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ $\angle DOC = 2\angle DBC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

よって $\triangle OCD$ は直角二等辺三角形だから $CD = \sqrt{2} OC = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ cm

(3)

$\triangle ABD$ と $\triangle EBA$ で

$\angle ABD = \angle EBA$ (共通)

$\angle ADB = \angle ACB = \angle EAB = 60^\circ$ より

$\triangle ABD \sim \triangle EBA$

また $\triangle EBA$ と $\triangle ECD$ で

$\angle AEB = \angle DEC$ (対頂角)

$\angle EBA = \angle ECD$ より

$\triangle EBA \sim \triangle ECD$

問2

(1)

D から直径 AF にひいた垂線 DH の長さが

点 D を 1 回転させてできる円の半径になる。

$DH = r$ cm とすると

$$\pi r^2 = 2\pi$$

$$r = \pm \sqrt{2}$$

$$r > 0 \text{ より}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$\triangle ODH$ で

$$\angle DHO = 90^\circ, OD:DH = 2:\sqrt{2} = \sqrt{2}:1 \text{ より}$$

$\triangle ODH$ は直角二等辺三角形だから $\angle HOD = 45^\circ$

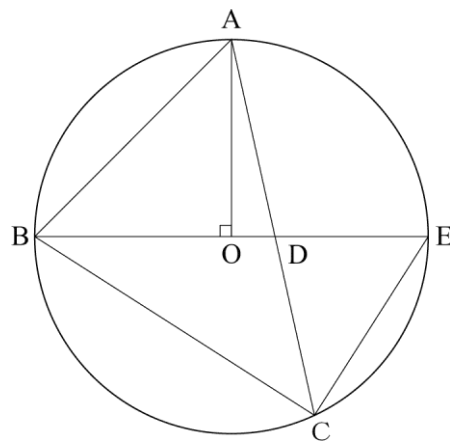
また $\angle AOC = 360^\circ \div 3 = 120^\circ$ だから

$$\angle DOC = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ = \angle AOD: \angle DOC = 45^\circ:75^\circ = 3:5$$

【問 13】

図4のように、3 点 A, B, C は半径 4 cm の円 O の円周上の点で、 $OA \perp OB$ である。直線 BO が、AC, 円 O と交わる点を、それぞれ D, E として、点 E と点 C を結ぶ。ただし、点 C は、直径 BE について点 A の反対側にあるものとする。

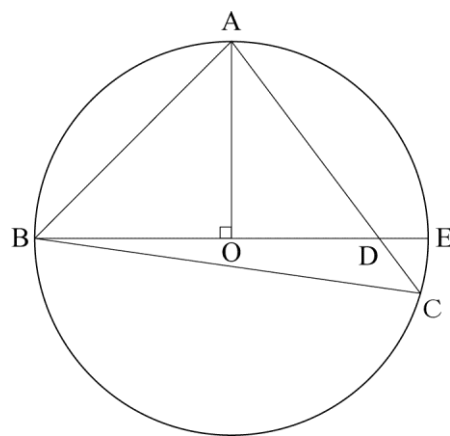
図4



(長野県 2016 年度)

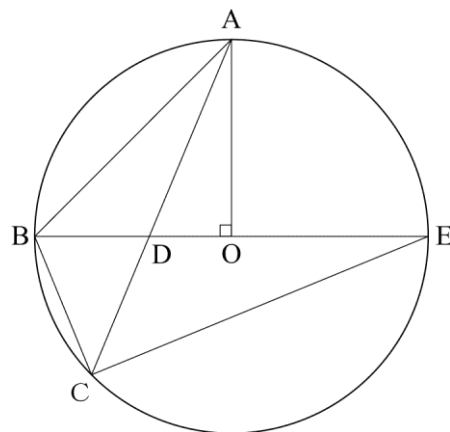
- (1) $\angle ABE$ の大きさを求めなさい。
- (2) $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ を証明しなさい。
- (3) $\triangle EDC$ 以外で $\triangle ABC$ に相似な三角形を、記号を用いて書きなさい。
- (4) 図5は、図4の図形で $DE = 1$ cm としたものとする。このとき、 BC の長さを求めなさい。

図5



- (5) 図6は、図4の図形で $\widehat{BC}$ と $\widehat{CE}$ の長さの比を $1:3$ としたものとする。このとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

図6



解答欄

(1)	°
(2)	
(3)	△
(4)	cm
(5)	cm ²

解答

(1) 45°

(2)

$\triangle ABC$ と $\triangle EDC$ について

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle BAC = \angle DEC \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle AOB = 90^\circ \text{ だから}$$

$$\text{円周角の定理より } \angle ACB = 45^\circ \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また } \angle AOE = 90^\circ \text{ だから}$$

$$\text{円周角の定理より } \angle ECD = 45^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$\angle ACB = \angle ECD \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より

2組の角が, それぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

(3) $\triangle ADB$

$$(4) \frac{28\sqrt{2}}{5} \text{ cm}$$

$$(5) 8 \text{ cm}^2$$

解説

(1)

$\triangle OAB$ は直角二等辺三角形なので $\angle ABE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

(2)

$\triangle ABC$ と $\triangle EDC$ において $\widehat{BC}$ に対する円周角により $\angle BAC = \angle DEC$

また $\widehat{AB}$ に対する円周角の定理より $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ$

同様に $\widehat{AE}$ に対する円周角の定理より $\angle ECA = \frac{1}{2} \angle AOE = 45^\circ$

よって 2 つの角が等しいので相似である。

(3)

$\triangle ADB$ は $\angle ADB = \angle EDC$, $\angle ABD = \angle DCE = 45^\circ$ なので

$\triangle EDC \sim \triangle ADB$

(4)

$DE = 1$ より $OD = 3$, $AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\triangle ABD \sim \triangle ECD$ より

$AB : CE = AD : DE$

$4\sqrt{2} : CE = 5 : 1$

$CE = \frac{4}{5}\sqrt{2}$

BE が直径なので $\angle BCE = 90^\circ$ である。

$\triangle BCE$ において

三平方の定理より $BC^2 = 8^2 - \left(\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1568}{25}$

$BC = \frac{28}{5}\sqrt{2} \text{ cm}$

(5)

線分 OC をかくと $\widehat{BC} : \widehat{CE} = 1 : 3$ なので $\angle BOC = \frac{1}{4} \times 180^\circ = 45^\circ$

また $\angle OAB = 45^\circ$ なので四角形 $OABC$ は台形になる。

O から辺 AB までの距離は $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ なので

台形の面積は $\frac{1}{2} (4 + 4\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 8$

また $\widehat{AC}$ と $\widehat{CE}$ が等しいので $AC = CE$ で $\triangle CAE$ は二等辺三角形

頂点 C から辺 AE へ垂線 CH を下ろすと $CH = 4 + 2\sqrt{2}$, $AE = 4\sqrt{2}$ なので

$\triangle ACE$ の面積は $\frac{1}{2} \times (4 + 2\sqrt{2}) \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 8$

$\triangle OAC$ の面積は $\frac{1}{2} \left\{ (8\sqrt{2} + 8) - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right\} = 4\sqrt{2}$

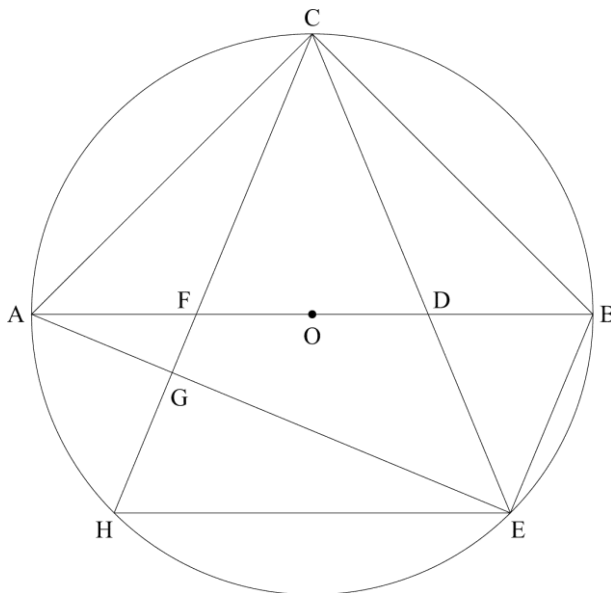
よって $\triangle ABC = 4\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2} = 8$

【問 14】

次の図のように、線分 AB を直径とする円 O の円周上に $AC=BC$ となる点 C をとり、 $\triangle ABC$ をつくる。線分 AB 上に、 $AC=AD$ となる点 D をとり、線分 CD を延長した直線と円 O の交点を E とする。点 C を通り、線分 BE に平行な直線をひき、線分 AB 、線分 AE 、円 O との交点をそれぞれ F 、 G 、 H とする。

このとき、あとの各問いに答えなさい。ただし、点 E と点 H は、それぞれ点 C と異なる点とする。

(三重県 2016 年度)



問1 次の は、 $\triangle ADC \sim \triangle CDF$ であることを証明したものである。(ア) ～ (ウ) に、それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

〔証 明〕 $\triangle ADC$ と $\triangle CDF$ において、

共通な角だから、(ア) …①

弧 BC に対する円周角は等しいから、 $\angle CAD =$ (イ) …②

$BE \parallel CH$ より、錯角は等しいから、(イ) $= \angle FCD$ …③

②、③より、 $\angle CAD = \angle FCD$ …④

①、④より、(ウ) がそれぞれ等しいので、

$\triangle ADC \sim \triangle CDF$

問2 $\triangle AED \equiv \triangle CEB$ であることを証明しなさい。

問3 $OA = 4 \text{ cm}$ のとき、次の各問いに答えなさい。

なお、答えに $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数にしない。

(1) 線分 EH の長さを求めなさい。

(2) $\triangle CGE$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(ア)	
	(イ)	
	(ウ)	
問2	〔証明〕	
問3	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

(ア) $\angle ADC = \angle CDF$

(イ) $\angle BEC$

(ウ) 2組の角

問2

〔証明〕

$\triangle AED$ と $\triangle CEB$ において

仮定より

$AC = BC \cdots ①$

$AC = AD \cdots ②$

①, ②より

$AD = CB \cdots ③$

弧 BE に対する円周角は等しいから

$\angle DAE = \angle BCE \cdots ④$

$\triangle ABC$ は二等辺三角形だから

$\angle CAB = \angle CBA \cdots ⑤$

弧 AC に対する円周角は等しいから

$\angle ABC = \angle AED \cdots ⑥$

弧 BC に対する円周角は等しいから

$\angle CAB = \angle CEB \cdots ⑦$

⑤, ⑥, ⑦より

$\angle AED = \angle CEB \cdots ⑧$

④, ⑧より

$\angle EDA = \angle EBC \cdots ⑨$

③, ④, ⑨より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AED \equiv \triangle CEB$

問3

(1) $4\sqrt{2}$ cm

(2) $8 + 4\sqrt{2}$ cm²

解説

問1

$\triangle ADC$ と $\triangle CDF$ において

共通な角だから $\angle ADC = \angle CDF \cdots ①$

$\widehat{BC}$ に対する円周角は等しいから $\angle CAD = \angle BEC \cdots ②$

$BE \parallel CH$ より、錯角は等しいから $\angle BEC = \angle FCD \cdots ③$

②, ③より $\angle CAD = \angle FCD \cdots ④$

①, ④より $\angle ADC = \angle CDF$ がそれぞれ等しいので

$\triangle ADC \sim \triangle CDF$

問2

$\triangle AED$ と $\triangle CEB$ において

仮定から $AD = CB$ を導き、円周角の定理から $\angle DAE = \angle BCE$ と $\angle EDA = \angle EBC$ を導いて
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいことから合同であることを証明する。

問3

(1)

問2より $\triangle ECA$ は $EC = EA$ の二等辺三角形である。

$\triangle ECA$ と $\triangle CEH$ において

共通な辺だから $EC = CE \cdots ①$

$\angle AEC = \angle AED = \angle CEB$ で $CH \parallel BE$ より錯角は等しいことから $\angle HCE = \angle CEB$

よって $\angle AEC = \angle HCE \cdots ②$

$\widehat{EBC}$ に対する円周角だから $\angle CAE = \angle EHC \cdots ③$

②, ③より

残りの角は等しいから $\angle ECA = \angle CEH \cdots ④$

①, ②, ④より

1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ECA \cong \triangle CEH$

よって $EH = CA$

仮定より

$\triangle CAB$ は $\angle ACB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$EH = CA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle CHE$ で

頂点 C と点 O を通る直線をひき辺 HE との交点を I とする。

(1)より

$\triangle CHE$ は $CH = CE$ の二等辺三角形だから

直線 CI は頂角 $\angle HCE$ の二等分線で $CI \perp HE$, $HI = IE$ である。

$\triangle OHE \cong \triangle OAC$ で

$\triangle OAC$ は $\angle AOC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから $\angle OHI = \angle OAC = 45^\circ$

よって $CO = OA = 4 \text{ cm}$

$$OI = \frac{OH}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$IE = \frac{1}{2} HE = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

だから直角三角形 CIE で

$$CE^2 = (4 + 2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 32 + 16\sqrt{2}$$

$\triangle CGE$ は

$\angle GCE = \angle GEC = \angle ABC = 45^\circ$ より $\angle CGE = 90^\circ$ の直角二等辺三角形である。

したがって $\triangle CGE$ は1辺が CG の長さの正方形の半分とみると

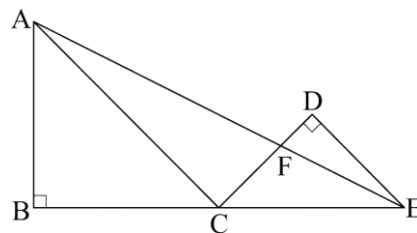
対角線が CE の長さのひし形の半分と考えることができる。

したがって求める面積は

$$\triangle CGE = \frac{1}{2} \times \left\{ (32 + 16\sqrt{2}) \times \frac{1}{2} \right\} = 8 + 4\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

【問 15】

右図において、 $\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 4 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形であり、 $\triangle DCE$ は $\angle CDE = 90^\circ$, $CE = 4 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形である。3 点 B, C, E はこの順に一直線上にあり、 A, D は直線 BE について同じ側にある。このとき、 $AC \parallel DE$ である。 A と E とを結ぶ。 F は、線分 AE と辺 CD との交点である。



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2016 年度 A)

問1 $\triangle ABC$ の内角 $\angle BAC$ の大きさを求めなさい。

問2 線分 AE の長さを求めなさい。

問3 次は、 $\triangle ACF \sim \triangle EDF$ であることの証明である。 $\boxed{\text{㉑}}$, $\boxed{\text{㉒}}$ に入れるのに適している「角を表す文字」をそれぞれ書きなさい。また、 $\textcircled{\text{ク}}$ から適しているものを一つ選び、記号を○で囲みなさい。

〔証 明〕

$\triangle ACF$ と $\triangle EDF$ において

対頂角は等しいから $\angle AFC = \angle \boxed{\text{㉑}} \cdots \text{㉓}$

$AC \parallel DE$ であり、平行線の錯角は等しいから

$\angle FAC = \angle \boxed{\text{㉒}} \cdots \text{㉔}$

㉓, ㉔より、

$\textcircled{\text{ク}}$ ア 1 組の辺とその両端の角 イ 2 組の辺の比とその間の角 ウ 2 組の角]
がそれぞれ等しいから

$\triangle ACF \sim \triangle EDF$

問4 線分 CF の長さを求めなさい。求め方も書くこと。

解答欄

問1	度	
問2	cm	
問3	㉠	
	㉡	
	㉢	ア イ ウ
問4	〔求め方〕 cm	

解答

問1 45 度

問2 $4\sqrt{5}$ cm

問3

㉑ EFD

㉒ FED

㉓ ウ

問4

[求め方]

$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$AB:AC = 1:\sqrt{2}$$

$$\text{よって } AC = \sqrt{2} AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle DCE$ は $\angle CDE = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$DE:CE = 1:\sqrt{2}$$

$$\text{よって } DE = \frac{1}{\sqrt{2}} CE = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$DC = DE \text{ だから } DC = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\triangle ACF \sim \triangle EDF$ だから

$$CF:DF = AC:ED = 2:1$$

$$\text{よって } CF = \frac{2}{3} DC = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

解説

問1

$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$

問2

直角三角形 ABE で

$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \text{ より}$$

$$4^2 + (4+4)^2 = AE^2$$

$$AE^2 = 80$$

$AE > 0$ より

$$AE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

問3

$\triangle ACF$ と $\triangle EDF$ において

$$\angle AFC = \angle \boxed{\text{㉑ EFD}} \text{ (対頂角) } \cdots \text{㉑}$$

$$\angle FAC = \angle \boxed{\text{㉒ FED}} \text{ (平行線の錯角) } \cdots \text{㉒}$$

よって 2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACF \sim \triangle EDF$$

問4

$$AC = \sqrt{2} AB = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$DE = \frac{CE}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{また } DC = DE = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

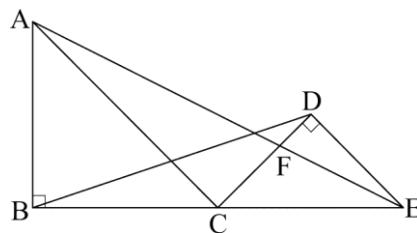
$\triangle ACF \sim \triangle EDF$ より

$$CF:DF = AC:ED = 4\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 2:1$$

$$\text{したがって } CF = \frac{2}{2+1} DC = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

【問 16】

右図において、 $\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 4$ cm の直角二等辺三角形であり、 $\triangle DCE$ は $\angle CDE = 90^\circ$, $CE = 4$ cm の直角二等辺三角形である。3 点 B, C, E はこの順に一直線上にあり、A, D は直線 BE について同じ側にある。A と E, B と D とをそれぞれ結ぶ。F は、線分 AE と辺 CD との交点である。



次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は、根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

(大阪府 2016 年度 B)

問1 線分 AE の長さを求めなさい。

問2 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ であることを証明しなさい。

問3 線分 CF の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕
問3	cm

解答

問1 $4\sqrt{5}$ cm

問2

〔証明〕

$\triangle ACE$ と $\triangle BCD$ において

$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$AC:BC = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{ア}$$

$\triangle DCE$ は $\angle CDE = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$CE:CD = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{イ}$$

$$\textcircled{ア}, \textcircled{イ} \text{より } AC:BC = CE:CD \cdots \textcircled{ウ}$$

$$\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB = 135^\circ \cdots \textcircled{エ}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle DCE = 135^\circ \cdots \textcircled{オ}$$

$$\textcircled{エ}, \textcircled{オ} \text{より } \angle ACE = \angle BCD \cdots \textcircled{カ}$$

$$\textcircled{ウ}, \textcircled{カ} \text{より}$$

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACE \sim \triangle BCD$$

$$\text{問3 } \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

解説

問1

直角三角形 ABE で

$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \text{ より}$$

$$4^2 + (4+4)^2 = AE^2$$

$$AE^2 = 80$$

$$AE > 0 \text{ より}$$

$$AE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

問2

$\triangle ACE$ と $\triangle BCD$ において

$$AC:BC = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{ア}$$

$$CE:CD = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{イ}$$

$$\textcircled{ア}, \textcircled{イ} \text{より}$$

$$AC:BC = CE:CD \cdots \textcircled{ウ}$$

$$\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \cdots \textcircled{エ}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle DCE = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \cdots \textcircled{オ}$$

$$\textcircled{エ}, \textcircled{オ} \text{より}$$

$$\angle ACE = \angle BCD \cdots \textcircled{カ}$$

$$\textcircled{ウ}, \textcircled{カ} \text{より}$$

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACE \sim \triangle BCD$$

問3

$\angle ACB = \angle DEC = 45^\circ$ より, 同位角が等しいから

$$AC \parallel DE$$

$$\text{よって } CF:DF = AC:ED = \sqrt{2} \text{ AB} : \frac{CE}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{2}} = 2:1$$

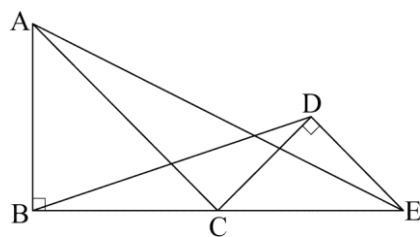
$$\text{したがって } CF = \frac{2}{2+1} DC = \frac{2}{3} \times \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

【問 17】

図1, 図2において, $\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 4 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形であり, $\triangle DCE$ は $\angle CDE = 90^\circ$, $CE = 4 \text{ cm}$ の直角二等辺三角形である。3 点 B, C, E はこの順に一直線上にあり, A, D は直線 BE について同じ側にある。 A と E, B と D とをそれぞれ結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は, 根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

図1



(大阪府 2016 年度 C)

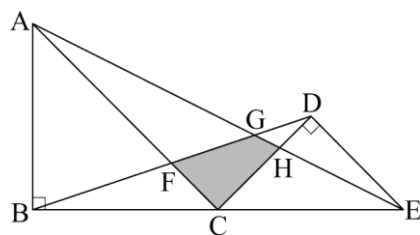
問1 図1において,

(1) 線分 AE の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ であることを証明しなさい。

問2 図2において, F は, 辺 AC と線分 BD との交点である。 G は線分 AE と線分 BD との交点であり, H は線分 AE と辺 CD との交点である。

図2



(1) 線分 CH の長さを求めなさい。

(2) 四角形 $GFCH$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	〔証明〕
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

(1) $4\sqrt{5}$ cm

(2)

〔証明〕

$\triangle ACE$ と $\triangle BCD$ において

$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$AC:BC = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{ア}$$

$\triangle DCE$ は $\angle CDE = 90^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$$CE:CD = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{イ}$$

$\textcircled{ア}$, $\textcircled{イ}$ より

$$AC:BC = CE:CD \cdots \textcircled{ウ}$$

$$\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB = 135^\circ \cdots \textcircled{エ}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle DCE = 135^\circ \cdots \textcircled{オ}$$

$\textcircled{エ}$, $\textcircled{オ}$ より

$$\angle ACE = \angle BCD \cdots \textcircled{カ}$$

$\textcircled{ウ}$, $\textcircled{カ}$ より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACE \sim \triangle BCD$$

問2

(1) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm

(2) $\frac{26}{15}$ cm²

解説

問1

(1)

直角三角形 ABE で

$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \text{ より}$$

$$4^2 + (4+4)^2 = AE^2$$

$$AE^2 = 80$$

$AE > 0$ より

$$AE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle ACE$ と $\triangle BCD$ において

$$AC:BC = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{7}$$

$$CE:CD = \sqrt{2}:1 \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ より

$$AC:BC = CE:CD \cdots \textcircled{9}$$

$$\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \cdots \textcircled{10}$$

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle DCE = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \cdots \textcircled{11}$$

$\textcircled{10}$, $\textcircled{11}$ より

$$\angle ACE = \angle BCD \cdots \textcircled{12}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{12}$ より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ACE \sim \triangle BCD$$

問2

(1)

$$\angle ACB = \angle DEC = 45^\circ \text{ より}$$

同位角が等しいから $AC \parallel DE$

$$\text{よって } CH:DH = AC:ED = 4\sqrt{2} : \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 2:1$$

$$\text{したがって } CH = \frac{2}{2+1} CD = \frac{2}{3} ED = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

(2)

$$\triangle ACE = \frac{1}{2} \times CE \times AB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$$

$$AC \parallel DE \text{ より } AH:EH = AC:ED = 2:1$$

$$\text{よって } \triangle CEH = \frac{1}{2+1} \triangle ACE = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{また } AC:DE = 2:1, FC:DE = 1:2 \text{ より}$$

$$AF:DE = (4-1):2 = 3:2$$

$$\text{よって } AG:EG = AF:ED = 3:2 \text{ だから}$$

$$\triangle ACG = \frac{3}{3+2} \triangle ACE = \frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5} \text{ cm}^2$$

$$\text{したがって } \triangle GFC = \frac{1}{3+1} \triangle ACG = \frac{1}{4} \times \frac{24}{5} = \frac{6}{5} \text{ cm}^2 \cdots \textcircled{13}$$

$$\triangle CHG = \triangle CEG - \triangle CEH = \left(8 - \frac{24}{5} \right) - \frac{8}{3} = \frac{8}{15} \text{ cm}^2 \cdots \textcircled{14}$$

$$\textcircled{13}, \textcircled{14} \text{ より 四角形 GFCH の面積は } \frac{6}{5} + \frac{8}{15} = \frac{26}{15} \text{ cm}^2$$

【問 18】

図1の 3 点 A, B, C を通る円 O を考える。

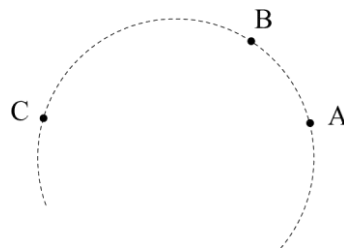
次の問1, 問2に答えなさい。

(島根県 2016 年度)

問1 この円の中心 O の位置を定規とコンパスを用いた作図により求めなさい。

また, 中心 O を示す文字も書きなさい。ただし, 作図に用いた線は消さないでおくこと。

図1



問2 図2のように, 問1で求めた点 O を中心に 3 点 A, B, C を通る円 O を描き, 図2

直径を AD とし, 直線 AB, DC の交点を P とした。また, 2 点 A, C および 2 点 B, D を結んだ。

次の(1), (2)に答えなさい。

(1) $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ を次のように証明した。解答用紙に証明を完成させなさい。ただし, 内には, 三角形の相似条件を正しく記入しなさい。

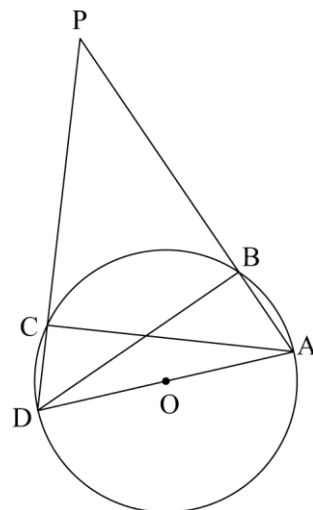
〔証明〕

$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において

よって

対応する ので

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$



(2) 図3のように, $AB = 2 \text{ cm}$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ABC = 105^\circ$ であるとき, 図3

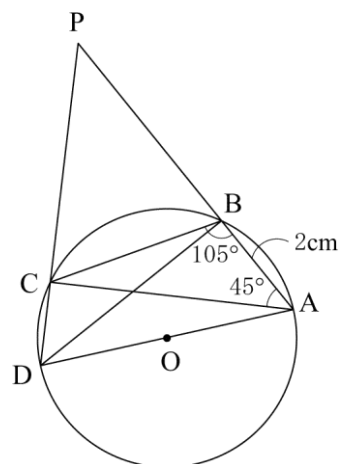
次の①～④に答えなさい。

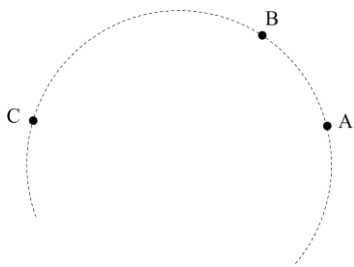
① $\angle ADB$ の大きさを求めなさい。

② 円 O の半径を求めなさい。

③ 線分 PD の長さを求めなさい。

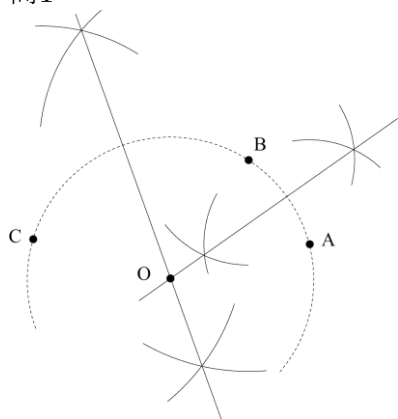
④ 四角形 ABCD の面積を求めなさい。



問1	〔作図〕 		
問2	(1)	〔証明〕 $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において	
		よって 対応する ので $\triangle PAC \sim \triangle PDB$	
	(2)	①	°
		②	cm
		③	cm
④		cm ²	

解答

問1



問2

(1)

〔証明〕

$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において

共通な角より

$$\angle APC = \angle DPB \cdots \textcircled{1}$$

また弧 BC の円周角より

$$\angle PAC = \angle PDB \cdots \textcircled{2}$$

よって①②より

対応する 2組の角がそれぞれ等しい ので

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$

(2)

① 30°

② 2 cm

③ $2\sqrt{6} \text{ cm}$

④ $3 + \sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

弦 AB, BC をかく。

弦 AB と BC の垂直二等分線の交点が円の中心 O となる。

問2

(1)

$\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において $\angle P$ は共通…①

円周角が等しいことより $\angle PAC = \angle DPB$ …②

対応する 2 組の角がそれぞれ等しいので相似である。

(2)

①

円周角の定理より $\angle ADB = \angle ACB = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$

②

$\triangle ABD$ は $\angle ADB = 30^\circ$ の直角三角形なので

辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ である。

$AD = 2 \times 2 = 4$

よって半径は 2 cm

③

$\triangle ABD$ は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形で $AB = 2$ なので $AD = 4$, $BD = 2\sqrt{3}$

$\angle CBD = 15^\circ$ より $\angle BDC = 45^\circ$

$\triangle PBD$ は $\angle PBD = 90^\circ$, $\angle BDP = 45^\circ$ なので

$PD = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ cm

④

AC と BD の交点を E とすると

$\triangle ABE$ は直角二等辺三角形なので $AE = 2\sqrt{2}$

$\triangle BAE \sim \triangle CDE$ で

相似比は $AE:ED = 2\sqrt{2}:(2\sqrt{3}-2)$

面積比は $8:(16-8\sqrt{3})$

$\triangle EDA \sim \triangle ECB$ で

相似比は $\sqrt{2}:1$

面積比は $2:1$

$\triangle ABE$ の面積は $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ cm²

$\triangle EDA$ の面積は $\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm² で

$\triangle ABE = 2$ cm² なので $\triangle EDA = 2\sqrt{3} - 2$ cm²

以上より四角形 ABCD の面積は

$2\sqrt{3} + 2 \times \frac{16-8\sqrt{3}}{8} + (2\sqrt{3}-2) \times \frac{1}{2} = 3 + \sqrt{3}$ cm²

【問 19】

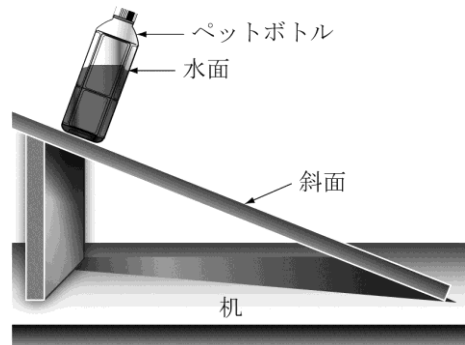
茂さんは、伊能忠敬^{いのうただなか}が江戸時代に日本地図をつくる過程で、富士山の高さを測ったことを知り、自分も身近なものを使って斜面の高低差を求めることができないかと考えた。次の＜茂さんの考え＞と＜茂さんの考察＞を読んで、問1～問3に答えなさい。



＜茂さんの考え＞

液体の入ったペットボトルを、写真のように斜面に固定すると液体の水面は水平な机と平行になっています。このことを利用すると、斜面の高低差を求めることができます。

写真



(岡山県 2016 年度 特別)

＜茂さんの考察＞

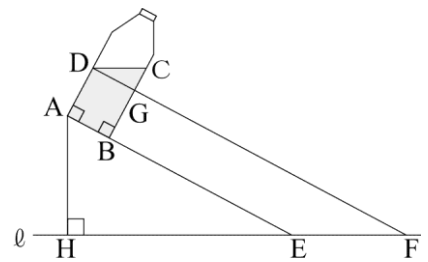
斜面の高低差を求める方法を、写真を模式化した図で考えました。

【図の説明】

- ・辺 AD と辺 BC が平行な台形 ABCD と直線 ℓ があり、点 E は直線 AB と直線 ℓ の交点である。
- ・点 D を通り、線分 AE に平行な直線と直線 ℓ の交点が F である。
- ・点 G は線分 BC と線分 DF の交点である。
- ・点 H は ^(あ)点 A から直線 ℓ にひいた垂線と直線 ℓ の交点である。
- ・線分 DC と直線 ℓ は平行である。
- ・2 直線 AD, BC は、どちらも 2 直線 AE, DF と垂直に交わっている。

このとき、^(い) $\triangle CDG$ と $\triangle AEH$ は相似だから、相似比から斜面の高低差 AH を求めることができます。

図



問1 下線部(あ)について、点 A から直線 ℓ への垂線を、定規とコンパスを使って解答用紙に作図しなさい。作図に使った線は残しておきなさい。

問2 下線部(い)について、茂さんは次のように証明した。 $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(4)}$ に適当な記号またはことばを書き入れ、＜証明＞を完成させなさい。

＜証明＞

$\triangle CDG$ と $\triangle AEH$ において
 仮定から $\angle \boxed{(1)} = \angle AHE = 90^\circ \cdots (i)$
 また、 $DC \parallel \ell$ であり、平行線の $\boxed{(2)}$ は等しいので
 $\angle CDG = \angle DFE \cdots (ii)$
 さらに、 $DF \parallel AE$ であり、平行線の $\boxed{(3)}$ は等しいので
 $\angle DFE = \angle AEH \cdots (iii)$
 $(ii), (iii)$ から、 $\angle CDG = \angle AEH \cdots (iv)$
 $(i), (iv)$ から、 $\boxed{(4)}$ がそれぞれ等しいので、 $\triangle CDG \sim \triangle AEH$

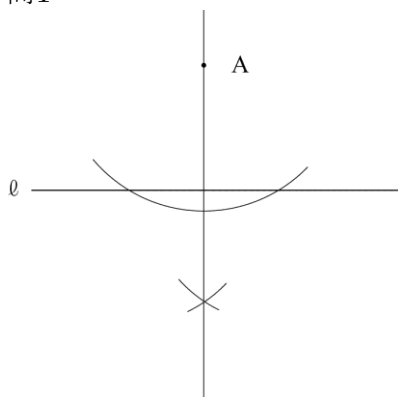
問3 図において、 $AB = 6 \text{ cm}$, $AD = 7 \text{ cm}$, $BC = 9 \text{ cm}$, $AE = 900 \text{ cm}$ であるとき、線分 AH の長さを求めなさい。

解答欄

問1	• A ℓ _____	
問2	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
問3	cm	

解答

問1



問2

(1) CGD

(2) 錯角

(3) 同位角

(4) 2組の角

問3 $90\sqrt{10}$ cm

解説

問1

Aを中心とする円をかき

直線 l との2つの交点を P, Q とする。

P, Q をそれぞれ中心とする等しい半径の円をかき交点の1つを R とする。

直線 AR が求める垂線である。

問2

平行線の錯角や同位角が等しいことなどを利用して相似を導く。

問3

$\triangle CDG$ で $\angle CGD = 90^\circ$, $CG = BC - BG = BC - AD = 9 - 7 = 2$ cm, $DG = AB = 6$ cm

よって三平方の定理より $CD = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm

$\triangle CDG \sim \triangle AEH$ より

$CG : AH = CD : AE$

$AH = x$ cm とすると

$2 : x = 2\sqrt{10} : 900$

$2\sqrt{10} x = 1800$

$x = \frac{1800}{2\sqrt{10}} = 90\sqrt{10}$

よって $AH = 90\sqrt{10}$ cm

【問 20】

次は、教室の黒板を見る位置について考えている大輝さんたちの会話である。問1～問4に答えなさい。

(岡山県 2016 年度 一般)

大輝: 黒板に向かって中央の列では、黒板に近い方が広く見えますが、端の列でもそうですか。

先生: それでは、図1のように、教室を真上から見た図で考えてみましょう。黒板に向かって左端の列から黒板の左端と右端を見たときの間の角を $\angle x$ とします。 $\angle x$ の大きさが最大になる位置を、黒板が最も広く見える位置として考えてみましょう。

良子: その位置は、^(a)円の性質を利用するとわかりそうですね。

大輝: そうですね。図1を図2のように模式化して、⁽ⁱ⁾直線 ℓ に垂直な直線 m 上の2点B, Cを通り、直線 ℓ に接する円Oをかきます。接点をDとし、点Bと点D, 点Cと点Dをそれぞれ結んでできる $\angle BDC$ が、 $\angle x$ の大きさが最大になる角ですね。

良子: ^(c) $\triangle ACD \sim \triangle ADB$ だから、相似比を使うと、黒板が最も広く見える位置がどこかわかりますね。

図1

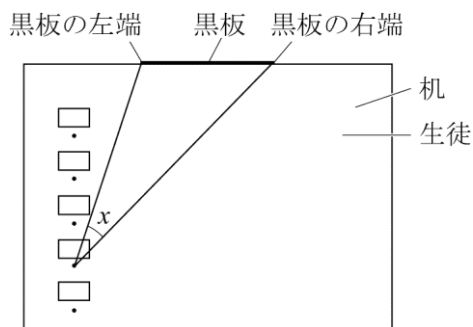
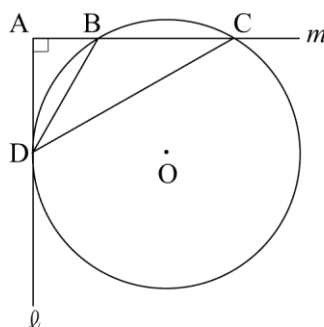


図2

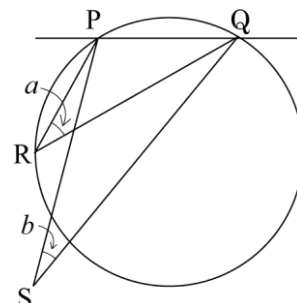


直線 ℓ 黒板に向かって左端の列
直線 m 黒板が設置されている壁
点A 2直線 ℓ , m の交点
点B 黒板の左端
点C 黒板の右端
点D 直線 ℓ と円Oの接点

問1 下線部(a)に関連して、右の図3のように、円周上に3点P, Q, Rがあり、直線PQについて、点Rと同じ側の円の外部に点Sがある。 $\angle PRQ = \angle a$, $\angle PSQ = \angle b$ とするとき、 $\angle a$ と $\angle b$ の大小関係を表したものとして最も適当なのは、ア～ウのうちではどれですか。一つ答えなさい。

ア $\angle a < \angle b$ イ $\angle a = \angle b$ ウ $\angle a > \angle b$

図3



問2 下線部(i)の中心Oは線分BCの垂直二等分線上にある。このことを利用して、中心Oを定規とコンパスを使って作図しなさい。作図に使った線は残しておきなさい。

問3 下線部(う)を良子さんは次のように証明した。 $\boxed{(1)}$, $\boxed{(2)}$ に当てはまる式として最も適当なのは, ア～オのうちではどれですか。それぞれ一つ答えなさい。また, $\boxed{(3)}$ には証明の続きを書き, <証明>を完成させなさい。

<証明>

$\triangle ACD$ と $\triangle ADB$ において,

点 O と点 B , 点 O と点 D をそれぞれ結ぶ。

$\angle ODB = \angle c$ とすると, $\triangle OBD$ は, $OB = OD$ の二等辺三角形だから,

$\angle OBD = \angle c$ であり, $\angle BOD = \boxed{(1)}$ である。

よって, 円周角の定理により, $\angle BCD = \boxed{(2)}$

$\boxed{(3)}$

ア $\angle c$ イ $2\angle c$ ウ $90^\circ - \angle c$ エ $180^\circ - \angle c$ オ $180^\circ - 2\angle c$

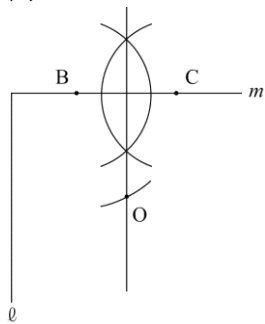
問4 図2において, $AB = 1.5 \text{ m}$, $BC = 4.5 \text{ m}$ のとき, 線分 AD の長さを求めなさい。

問1		
問2	B C <i>m</i> ℓ	
問3	(1)	
	(2)	
	(3)	
問4	m	

解答

問1 ウ

問2



問3

(1) オ

(2) ウ

(3)

円の接線は、接点を通る半径に垂直だから

$AD \perp OD$

よって

$$\angle ADB = 90^\circ - \angle c$$

したがって

$$\angle ACD = \angle ADB \cdots (i)$$

また、 $\angle A$ は共通だから、

$$\angle CAD = \angle DAB \cdots (ii)$$

(i), (ii) から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACD \sim \triangle ADB$$

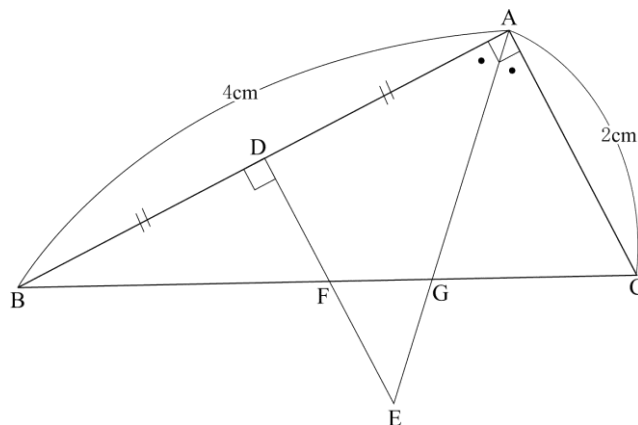
問4 3 m



【問 21】

図のように、 $AB=4\text{ cm}$ 、 $CA=2\text{ cm}$ 、 $\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。辺 AB の中点を D とし、辺 AB の垂直二等分線と $\angle A$ の二等分線との交点を E とする。線分 DE と辺 BC との交点を F 、線分 AE と辺 BC との交点を G とし、問1～問4に答えなさい。

(徳島県 2016 年度)



問1 線分 DF の長さを求めなさい。

問2 $\triangle ADE$ の面積を求めなさい。

問3 $\triangle ACG \sim \triangle EFG$ を証明しなさい。

問4 線分 AG の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm^2
問3	〔証明〕
問4	cm

解答

問1 1 cm

問2 2 cm^2

問3

〔証明〕

$\triangle ACG$ と $\triangle EFG$ で

対頂角は等しいから

$$\angle AGC = \angle EGF \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle BAC = \angle BDE = 90^\circ \text{ より}$$

$$AC \parallel FE$$

平行線の錯角は等しいので

$$\angle CAG = \angle FEG \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ACG \sim \triangle EFG$$

$$\text{問4 } \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

解説

問1

$$\triangle ABC \sim \triangle DBF \text{ で}$$

相似比は 2:1 なので

$$DF = \frac{1}{2} AC = 1 \text{ cm}$$

問2

$\triangle ADE$ において

$$\angle ADE = 90^\circ, \angle DAE = 45^\circ \text{ なので } \angle DEA = 45^\circ$$

したがって $AD = DE = 2$

$$\text{よって面積は } \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \text{ cm}^2$$

問3

$\triangle ACG$ と $\triangle EFG$ において

対頂角が等しいので $\angle AGC = \angle EGF$

また錯角が等しいので $\angle CAG = \angle FEG$

2つの角が等しいので相似である。

問4

問3より $\triangle ACG \sim \triangle EFG$ で

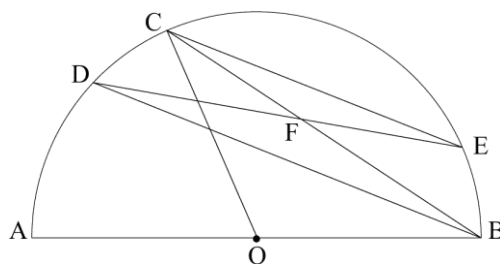
相似比は $AC:FE = 2:1$

$$AE = 2\sqrt{2} \text{ なので}$$

$$AG = 2\sqrt{2} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \sqrt{2} \text{ cm}$$

【問 22】

右の図のような、線分 AB を直径とする半円 O がある。点 C は $\widehat{AB}$ 上にあり、 $\angle BOC$ は鈍角である。 $\widehat{AC}$ 上に 2 点 A, C と異なる点 D をとり、 $\widehat{BC}$ 上に $\widehat{BC} = \widehat{DE}$ となるように点 E をとる。また、線分 BC と線分 DE との交点を F とし、点 B と点 D 、点 C と点 E をそれぞれ結ぶ。



このとき、次の問1、問2に答えなさい。

(香川県 2016 年度)

問1 $\triangle FDB \sim \triangle FCE$ であることを証明せよ。

問2 点 O と点 E を結ぶ。点 F を通り、線分 OC に平行な直線をひき、線分 OE との交点を G とする。このとき、 $OG = FG$ であることを証明せよ。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	〔証明〕

解答

問1

〔証明〕

$\triangle FDB$ と $\triangle FCE$ において, 対頂角は等しいから

$$\angle DFB = \angle CFE \cdots ①$$

$\widehat{BE}$ に対する円周角は等しいから

$$\angle EDB = \angle BCE$$

$$\angle EDB = \angle FDB$$

$$\angle BCE = \angle FCE$$

だから

$$\angle FDB = \angle FCE \cdots ②$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle FDB \cong \triangle FCE$$

問2

〔証明〕

点 O と点 F を結ぶ。

$\triangle OCF$ と $\triangle OEF$ において

OF は共通 $\cdots ①$

半円 O の半径だから

$$OC = OE \cdots ②$$

仮定より

$$\widehat{DE} = \widehat{BC} \quad \widehat{CE} \text{ は共通だから } \widehat{DC} = \widehat{BE}$$

よって等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle CED = \angle ECB$$

$$\angle CED = \angle CEF, \angle ECB = \angle ECF \text{ だから}$$

$$\angle CEF = \angle ECF$$

2つの角が等しいから $\triangle FCE$ は二等辺三角形

$$\text{よって } FC = FE \cdots ③$$

①, ②, ③より

3組の辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle OCF \cong \triangle OEF$$

$$\text{よって } \angle COF = \angle EOF$$

$$\angle EOF = \angle GOF \text{ だから}$$

$$\angle COF = \angle GOF \cdots ④$$

$CO \parallel FG$ より, 錯角は等しいから

$$\angle COF = \angle GFO \cdots ⑤$$

④, ⑤より

$$\angle GOF = \angle GFO$$

2つの角が等しいから

$$\triangle OGF \text{ は二等辺三角形}$$

$$\text{したがって } OG = FG$$

解説

問1

$\triangle FDB$ と $\triangle FCE$ で

対頂角は等しいこと

$\widehat{BE}$ に対する円周角は等しいことを使って

2組の角がそれぞれ等しいことを示し

$\triangle FDB$ の $\triangle FCE$ を導く。

問2

点Oと点Fを結ぶ。

まず $\triangle OCF \equiv \triangle OEF$ を証明し

$\angle COF = \angle EOF$ と $CO \parallel FG$ を使って

$\triangle OGF$ が $OG = FG$ の二等辺三角形であることを証明する。

$\triangle OCF$ と $\triangle OEF$ で

OFは共通

$OC = OE$ (円Oの半径)だから

あとは $FC = FE$ をいうために

$\triangle FCE$ が二等辺三角形であることを

円周角の定理を使って導く。

仮定より

$\widehat{DE} = \widehat{BC}$ で

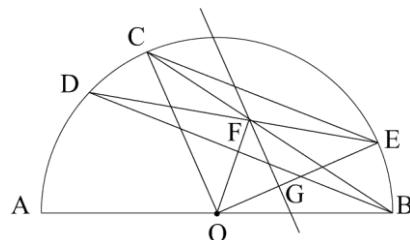
$\widehat{DE} = \widehat{DC} + \widehat{CE}$, $\widehat{BC} = \widehat{BE} + \widehat{CE}$ だから

$\widehat{DC} = \widehat{BE}$

よって $\triangle FCE$ で

$\angle CEF = \angle ECF$ より

$FC = FE$ がいえる。



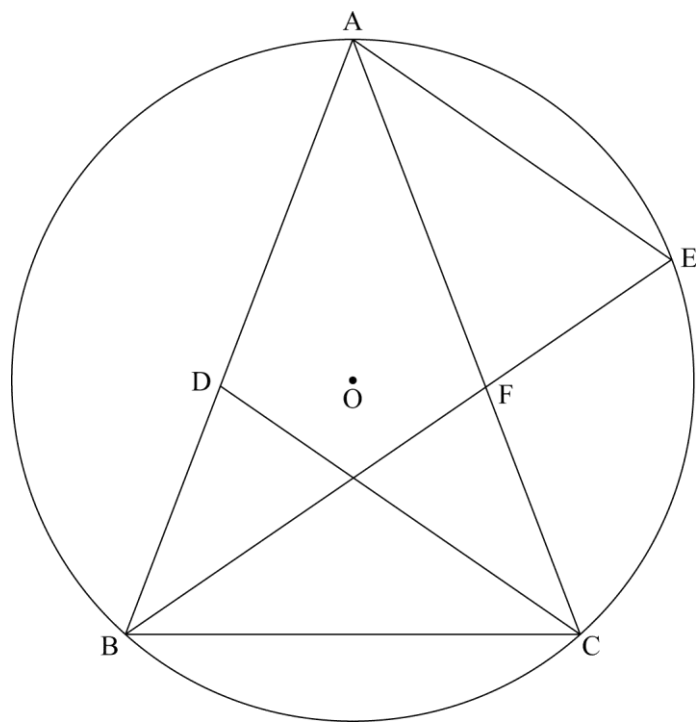
【問 23】

半径 3 cm の円 O がある。下の図のように、円 O の周上に 3 点 A, B, C を、 $BC=4$ cm, $AB=AC$, $\angle BAC < 90^\circ$ となるようにとり、 $\triangle ABC$ をつくる。 $\angle ACB$ の二等分線をひき、辺 AB との交点を D とする。円 O の周上に点 E を $DC \parallel AE$ となるようにとり、点 A と点 E , 点 B と点 E をそれぞれ結ぶ。線分 BE と辺 AC との交点を F とする。

次の問1は最も簡単な数で、問2は指示にしたがって答えよ。

ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2016 年度)



問1 図において、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

問2 図において、「 $\triangle BCD \sim \triangle EAF$ である」ことを証明せよ。

解答欄

問1	cm ²
問2	〔証明〕

解答

問1 $6 + 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$

問2

〔証明〕

$\triangle BCD$ と $\triangle EAF$ において

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$\angle CBD = \angle ACB \cdots ①$

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから

$\angle ACB = \angle AEF \cdots ②$

①, ②より

$\angle CBD = \angle AEF \cdots ③$

CD は $\angle ACB$ の二等分線だから

$\angle BCD = \angle ACD \cdots ④$

平行線の錯角は等しいから $DC \parallel AE$ より

$\angle ACD = \angle EAF \cdots ⑤$

④, ⑤より

$\angle BCD = \angle EAF \cdots ⑥$

③, ⑥より

2組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle BCD \sim \triangle EAF$

解説

問1

$AB=AC$ であるから

点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと

点 O を通り $\triangle OBH$ に三平方の定理を用いて $OH = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$

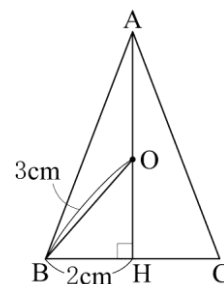
よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times (3 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$

問2

$DC \parallel AE$ から錯角は等しいこと

円周角の定理を用いて

三角形の相似条件「2組の角がそれぞれ等しい」ことを導く。



【問 24】

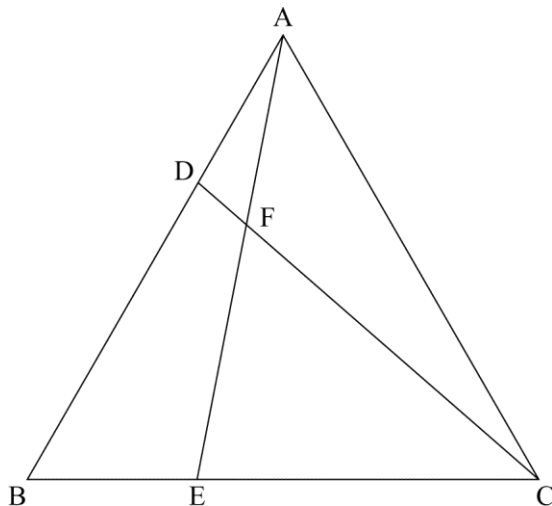
1 辺が 8 cm の正三角形 ABC がある。図1は、辺 AB 上に点 A, B と異なる点 D をとり、辺 BC 上に $AD=BE$ となるように点 E をとり、点 A と点 E、点 C と点 D をそれぞれ結び、その交点を F としたものである。

次の問1は指示にしたがって、問2、問3は最も簡単な数で答えよ。

ただし、根号を使う場合は $\sqrt{\quad}$ の中を最も小さい整数にすること。

(福岡県 2016 年度)

図1



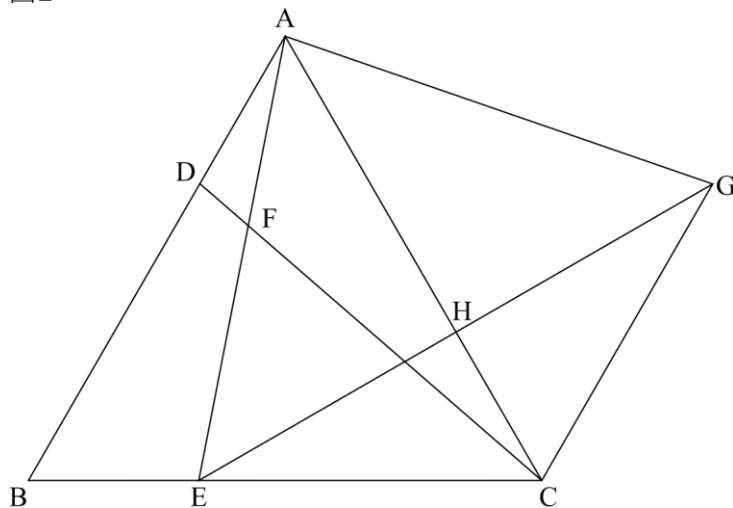
問1 図1において、「 $\triangle ABE \sim \triangle AFD$ である」ことを証明せよ。

問2 図1において、 $AD:DB=1:2$ のとき、 $\triangle FEC$ の面積は、四角形 DBEF の面積の何倍か求めよ。

問3 図2は、図1において、辺 AC を対称の軸として、点 E と対称な点 G をとり、点 G と点 A, E, C をそれぞれ結び、線分 EG と辺 AC との交点を H としたものである。

$AD=3$ cm のとき、 $\triangle DHG$ の面積を求めよ。

図2



解答欄

問1	〔証明〕	
問2	倍	
問3	cm ²	

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABE$ と $\triangle AFD$ において

共通な角だから

$$\angle BAE = \angle FAD \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABE$ と $\triangle CAD$ において

$\triangle ABC$ は正三角形だから

$$AB = CA \cdots \textcircled{2}$$

$$\angle ABE = \angle CAD = 60^\circ \cdots \textcircled{3}$$

また仮定より

$$BE = AD \cdots \textcircled{4}$$

②, ③, ④より

2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE \equiv \triangle CAD$$

よって

$$\angle AEB = \angle ADF \cdots \textcircled{5}$$

①, ⑤より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE \sim \triangle AFD$$

問2 $\frac{4}{3}$ 倍

問3 $5\sqrt{3} \text{ cm}^2$

解説

問1

正三角形の性質より $\triangle ABE \equiv \triangle CAD$ を導いて $\angle AEB = \angle ADF$ を示す。

問2

$\triangle CDB$ と $\triangle CEF$ において

$\angle DCB = \angle ECF$ (共通)

問1で $\angle ADF = \angle AEB$ だから

$\angle CDB = \angle CEF$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle CDB \sim \triangle CEF$

相似比は $CD:CE$ であるから CD, CE を求める。

右の図で $AB = 8 \text{ cm}$

$$AD:DB = 1:2 \text{ より } AD = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$AD = BE \text{ より } CE = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

$\triangle ACM$ で

$AC = 8 \text{ cm}, AM = 4 \text{ cm}$

三平方の定理より $CM = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

$$\text{また } DM = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$\triangle CDM$ で

$$\text{三平方の定理より } CD^2 = (4\sqrt{3})^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 48 + \frac{16}{9} + \frac{448}{9}, CD = \frac{8\sqrt{7}}{3} \text{ cm}$$

$$\text{よって } CD:CE = \frac{8\sqrt{7}}{3} : \frac{16}{3} = \sqrt{7} : 2 \text{ となるから}$$

$\triangle CDB$ と $\triangle CEF$ の面積の比は $(\sqrt{7})^2:2^2=7:4$

$\triangle CEF$ と四角形 $DBEF$ の面積の比は

$4:(7-4)=4:3$ より

$\triangle CEF$ の面積は四角形 $DBEF$ の面積の $\frac{4}{3}$ 倍となる。

問3

$BE = AD = 3 \text{ cm}$ より $DB = 5 \text{ cm}$

$CG = CE = 5 \text{ cm}$

$\angle ACE = \angle ACG = 60^\circ$ より

$\angle GCI = 60^\circ$ 同位角が等しいから $DB \parallel GC$

よって四角形 $DBCG$ は平行四辺形である。

よって $DG = 8 \text{ cm}$

右の図で $\triangle DBM, \triangle ECH, \triangle HCK$ はそれぞれ $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形だから

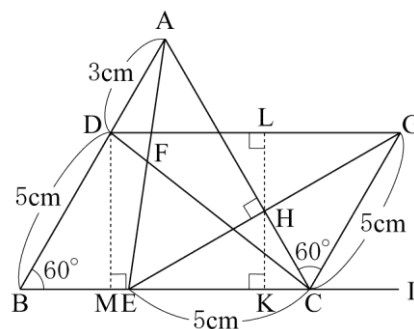
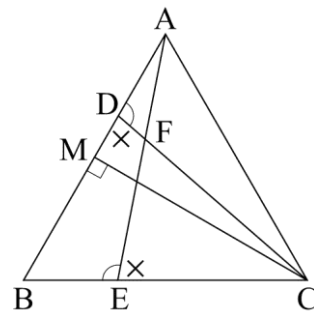
$$LK = DM = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$CH = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

$$HK = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ cm}$$

$$\text{よって } LH = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ cm}$$

$$\triangle DHG = \frac{1}{2} \times DG \times LH = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{5\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

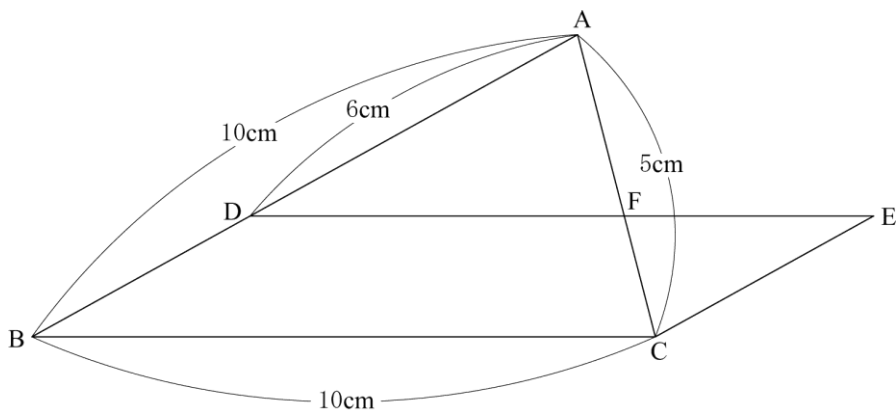


【問 25】

下の図1のように、 $BA=BC=10\text{ cm}$ 、 $AC=5\text{ cm}$ の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB 上に $AD=6\text{ cm}$ となる点 D をとり、 DB と BC を 2 辺とする平行四辺形 $DBCE$ をつくる。 DE と AC の交点を F とするとき、問1～問5に答えなさい。

(佐賀県 2016 年度 一般)

図1



問1 線分 AF の長さを求めなさい。

問2 $\triangle ADF \sim \triangle CEF$ であることを証明しなさい。

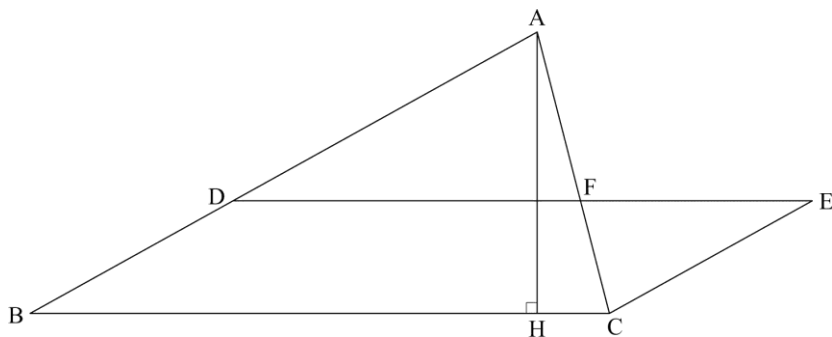
問3 $\triangle CEF$ の面積を求めなさい。

問4 BC を底辺としたとき、平行四辺形 $DBCE$ の高さを求めなさい。

問5 下の図2は、図1において点 A から辺 BC に垂線 AH をひいたものである。

このとき、(1)、(2)の問いに答えなさい。

図2



(1) 線分 BH の長さを求めなさい。

(2) $\triangle ABH$ の面積を S_1 、四角形 $AHCE$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1:S_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

問1	cm	
問2		
問3	cm ²	
問4	cm	
問5	(1)	cm
	(2)	S ₁ :S ₂ = :

解答

問1 3 cm

問2

$\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ において

対頂角は等しいので

$$\angle AFD = \angle CFE \cdots \textcircled{1}$$

$AD \parallel EC$ より, 錯角は等しいので

$$\angle ADF = \angle CEF \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ADF \sim \triangle CEF$$

問3 $\sqrt{15} \text{ cm}^2$

問4 $\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$

問5

$$(1) \frac{35}{4} \text{ cm}$$

$$(2) S_1 : S_2 = 5 : 3$$

解説

問1

DF // BC だから、AD:AB=AF:AC AF=xcm とすると

$$6:10=x:5$$

$$10x=30$$

$$x=3$$

よって AF=3 cm

問2

平行線と角の性質などを利用して相似を導く。

問3

△CEF は、△ABC と相似で FE=CE=4 cm, FC=2 cm の二等辺三角形である。

辺 FC の中点を G とすると△CEG は∠CGE=90°, GC=1 cm, CE=4 cm の直角三角形になるから

$$\text{三平方の定理より } GE=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15} \text{ cm}$$

$$\text{よって } \triangle CEF = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} = \sqrt{15} \text{ cm}^2$$

問4

求める高さは△CEF で FE を底辺としたときの高さに等しい。

$$\text{この高さを } h \text{ cm とし } \triangle CEF \text{ の面積に着目すると } FE=4 \text{ cm より, } \frac{1}{2} \times 4 \times h = \sqrt{15}$$

$$\text{これを解いて } h = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ よって } \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$$

問5

AH と DF の交点を I とする。

(1)

$$\text{問4より } IH = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ cm}$$

IF // HC より AI:IH=AF:FC

AI=y cm とすると

$$y: \frac{\sqrt{15}}{2} = 3:2$$

$$y = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{したがって } AH = AI + IH = \frac{3\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{5\sqrt{15}}{4} \text{ cm}$$

$$\triangle AHC \text{ で三平方の定理より } HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{よって } BH = BC - HC = 10 - \frac{5}{4} = \frac{35}{4} \text{ cm}$$

(2)

四角形 AHCE = △AHC + △ACE = △AHC + △AFE + △CFE

よって S₁:S₂ = △ABH:(△AHC+△AFE+△CFE)…①

$$\text{ここで } \triangle ABH = \frac{1}{2} \times BH \times AH \cdots ②$$

$$\triangle AHC = \frac{1}{2} \times HC \times AH \cdots ③$$

$$\triangle AFE + \triangle CFE = \frac{1}{2} \times FE \times AI + \frac{1}{2} \times FE \times IH = \frac{1}{2} \times FE \times (AI + IH) = \frac{1}{2} \times FE \times AH \cdots ④$$

①, ②, ③, ④より

$$S_1:S_2 = BH:(HC+FE) = \frac{35}{4} : \left(\frac{5}{4} + 4\right) = \frac{35}{4} : \frac{21}{4} = 35:21 = 5:3$$

【問 26】

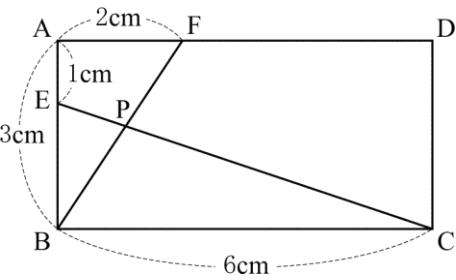
図1, 図2のように, $AB=3\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ がある。2 辺 AB , AD 上にそれぞれ点 E , F があり, $AE=1\text{ cm}$, $AF=2\text{ cm}$ である。さらに, 線分 BF と線分 CE の交点を P とする。

このとき, 次の問いに答えなさい。

(長崎県 2016 年度)

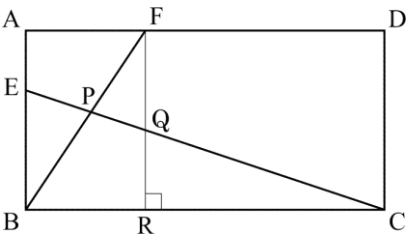
問1 線分 BF の長さは何 cm か。

図1



問2 図2のように, 点 F から辺 BC にひいた垂線と線分 CE , 辺 BC との交点をそれぞれ Q , R とする。このとき, 次の(1), (2)に答えよ。

図2



(1) $\triangle CQR \sim \triangle CEB$ であることを証明せよ。

(2) 線分 FQ の長さは何 cm か。

問3 図2において, $\triangle BCP$ の面積は何 cm^2 か。

解答欄

問1	cm	
問2	(1)	
	(2)	cm
問3	cm ²	

解答

問1 $\sqrt{13}$ cm

問2

(1)

$\triangle CQR$ と $\triangle CEB$ において

$$\angle CRQ = \angle CBE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle QCR = \angle ECB \text{ (共通)} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle CQR \sim \triangle CEB$$

$$(2) \quad \frac{5}{3} \text{ cm}$$

$$\text{問3} \quad \frac{54}{11} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$$\triangle ABF \text{ において三平方の定理より } BF = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$$

問2

(1)

$\triangle CQR$ と $\triangle CEB$ において

$$\angle CRQ = \angle CBE = 90^\circ$$

$$\angle QCR = \angle ECB \text{ (共通) により}$$

$$\triangle CQR \sim \triangle CEB$$

(2)

(1)の2つの三角形の相似比は2:3

$$\text{したがって } QR = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{よって } FQ = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

問3

$\triangle PEB$ と $\triangle PQF$ は

対頂角と錯角が等しいので相似であり

$$\text{相似比は } EB:FQ = 2:\frac{5}{3} = 6:5$$

$$\text{したがって P から EB に下ろした垂線の長さは } 2 \times \frac{6}{11} = \frac{12}{11} \text{ cm}$$

$$\triangle PEB \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{12}{11} = \frac{12}{11} \text{ cm}^2$$

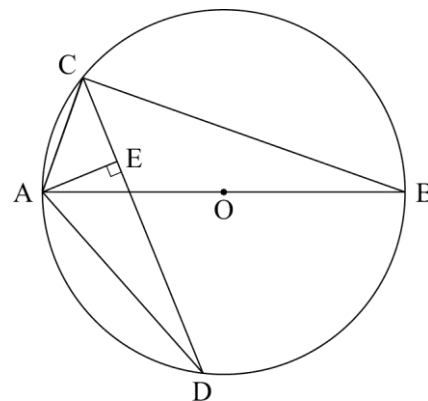
$$\text{よって } \triangle BCP \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 2 \times 6 - \frac{12}{11} = \frac{54}{11} \text{ cm}^2$$

【問 27】

右の図のように、線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C があり、 C を含まない $\widehat{AB}$ 上に点 D を、 $\widehat{AD}$ の長さが $\widehat{AC}$ の長さより長くなるようにとる。点 E は線分 CD 上にあって、 $AE \perp CD$ である。

このとき、次の各問いに答えなさい。ただし、根号がつくときは、根号のついたままで答えること。

(熊本県 2016 年度)



問1 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ であることを証明しなさい。

問2 $AB=9\text{ cm}$, $AC=3\text{ cm}$, $AD=6\text{ cm}$ のとき、

(1) 線分 DE の長さを求めなさい。

(2) $\triangle AEC$ の面積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕	
問2	(1)	cm
	(2)	cm ²

解答

問1

〔証明〕

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

$\angle ABC$ と $\angle ADE$ は $\widehat{AC}$ に対する円周角だから

$$\angle ABC = \angle ADE \cdots \textcircled{1}$$

AB は円 O の直径だから

$$\angle ACB = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

一方, $AE \perp CD$ だから

$$\angle AED = 90^\circ \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$\angle ACB = \angle AED \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より

2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

問2

$$(1) \ 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(2) \ \sqrt{5} \text{ cm}^2$$

解説

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

$$, \angle ACB = \angle AED = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

また円周角の定理より $\angle ABC = \angle ADC \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

2つの角が等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

問2

(1)

$\triangle ABC$ において

$$\text{三平方の定理より } BC = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ より

$$DE : BC = AD : AB$$

$$DE : 6\sqrt{2} = 6 : 9$$

$$DE = \frac{6 \times 6\sqrt{2}}{9} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

(2)

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ で

相似比が(1)より $3:2$ なので $AE = 2$

したがって $\triangle AEC$ に三平方の定理を用いると

$$EC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

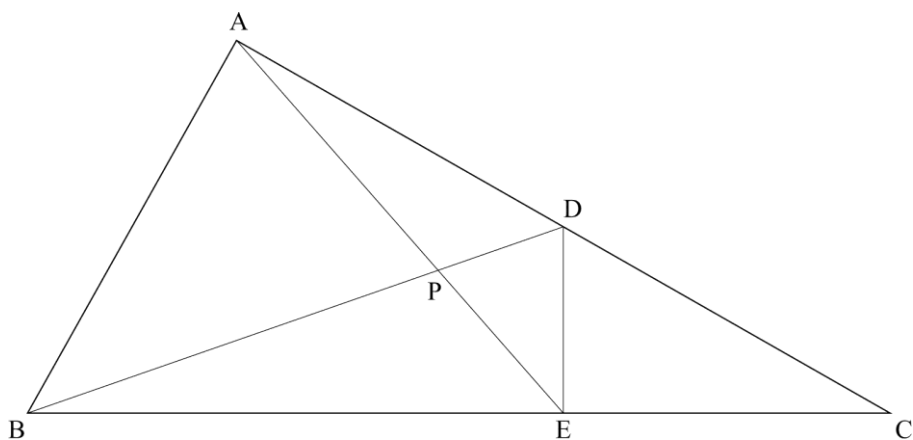
$$\text{よって } \triangle AEC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ cm}^2$$

【問 28】

下の図のような $\triangle ABC$ があり、 $\angle ACB=30^\circ$ 、 $\angle BAC=90^\circ$ 、 $BC=12\text{ cm}$ である。点 D は辺 AC の中点、点 E は $\angle CED=90^\circ$ となる辺 BC 上の点である。また、線分 AE と線分 BD の交点を P とする。

次の問1～問3に答えなさい。

(大分県 2016 年度)



問1 線分 CD の長さを求めなさい。

問2 $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ であることを証明しなさい。

問3 線分 BP の長さを求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	〔証明〕
問3	cm

解答

問1 $3\sqrt{3}$ cm

問2

〔証明〕

$\triangle ACE$ と $\triangle BCD$ において

$\triangle ABC$ は 90° , 60° , 30° である直角三角形だから

$$AC:BC = \sqrt{3}:2$$

$\triangle CDE$ は 30° , 60° , 90° である直角三角形だから

$$CE:CD = \sqrt{3}:2$$

よって $AC:BC = CE:CD \cdots \textcircled{1}$

また共通な角だから

$$\angle ACE = \angle BCD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACE \sim \triangle BCD$

問3 $\frac{30\sqrt{7}}{13}$ cm

解説

問1

$\triangle ABC$ は $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形であるから $AC:BC = \sqrt{3}:2$

$$\text{よって } AC = \frac{BC \times \sqrt{3}}{2} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

点 D は AC の中点だから, $CD = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{3}$ cm

問2

$\triangle ABC$ と $\triangle CDE$ の直角三角形の辺の比から

「2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」という相似条件を導く。

問3

$$AB = \frac{1}{2} BC = 6 \text{ cm}, AD = CD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$\triangle ABD$ で三平方の定理より $BD^2 = 6^2 + (3\sqrt{3})^2 = 63$ だから $BD = 3\sqrt{7}$ cm である。

点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと $BH = 3$ cm, $AH = 3\sqrt{3}$ cm である。

また $DE = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm, $CE = HE = \frac{9}{2}$ cm である。

$\triangle AHE$ で三平方の定理より $AE^2 = (3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{189}{4}$ だから $AE = \frac{3\sqrt{21}}{2}$ cm である。

$$BP = x \text{ cm}, AP = y \text{ cm} \text{ とすると } PE = AE - AP = \left(\frac{3\sqrt{21}}{2} - y\right) \text{ cm}$$

$\triangle PBE \sim \triangle PAD$ だから

$PB:PA = BE:AD$ より

$$x:y = \frac{15}{2} : 3\sqrt{3} = 5:2\sqrt{3}, 5y = 2\sqrt{3}x \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle PAB \sim \triangle PDE$ だから $PB:PE = AB:DE$ より

$$x:\left(\frac{3\sqrt{21}}{2} - y\right) = 6:\frac{3\sqrt{3}}{2} = 4:\sqrt{3}$$

$$4\left(\frac{3\sqrt{21}}{2} - y\right) = \sqrt{3}x$$

$$6\sqrt{21} - 4y = \sqrt{3}x \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて

$$x = \frac{30\sqrt{7}}{13}, y = \frac{12\sqrt{21}}{13} \text{ より } BP = \frac{30\sqrt{7}}{13} \text{ cm である。}$$

【問 29】

図1のように、円 O の円周上に異なる 4 点をとって、四角形 $ABCD$ をつくる。
四角形 $ABCD$ の対角線 AC , BD は点 E で交わっている。

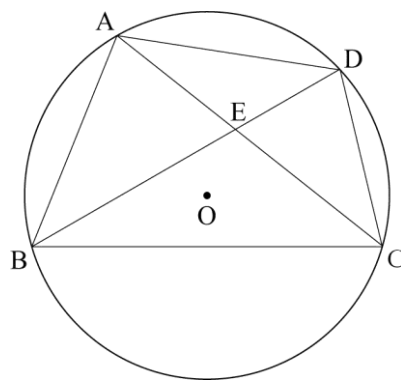
図1

$\widehat{AB} = \widehat{AD}$, $AB > DC$ のとき、次の問1～問3に答えなさい。

(宮崎県 2016 年度)

問1 $\angle BAD = 100^\circ$ のとき、 $\angle ACB$ の大きさを求めなさい。

問2 $\triangle AED \sim \triangle ADC$ であることを証明しなさい。

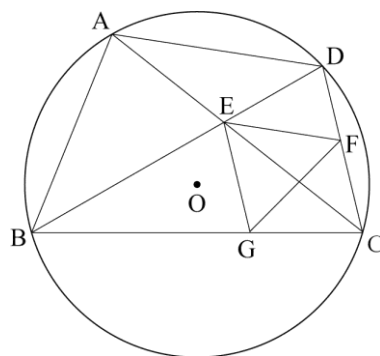


問3 図2は、図1において、 $AD \parallel EF$ になる点 F を辺 DC 上に、 $DC \parallel EG$ になる点 G を辺 BC 上にそれぞれとり、線分 EF , EG , FG をひいたものである。

図2

$AD = 2 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ のとき、次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1) 線分 AE の長さを求めなさい。



(2) $\triangle AED$ と $\triangle FGC$ の面積の比を求めなさい。

解答欄

問1	$\angle ACB =$ 度		
問2	〔証明〕		
問3	(1)	cm	
	(2)	$\triangle AED : \triangle FGC =$:	

解答

問1 $\angle ACB = 40^\circ$ 度

問2

〔証明〕

$\triangle AED$ と $\triangle ADC$ で

$\widehat{AB} = \widehat{AD}$ より

1 つの円で等しい弧に対する円周角は等しいから

$$\angle ADE = \angle ACD \cdots \textcircled{1}$$

共通な角であるから

$$\angle DAE = \angle CAD \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から

2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle AED \sim \triangle ADC$$

問3

$$(1) \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$$(2) \triangle AED : \triangle FGC = 36 : 25$$

解説

問1

$\widehat{AB} = \widehat{AD}$ より $\angle ADB = \angle ABD$

$$\triangle ABD \text{ で } \angle ADB = (180^\circ - 100^\circ) \div 2 = 40^\circ$$

$\widehat{AB}$ に対する円周角は等しいから $\angle ACB = \angle ADB = 40^\circ$

問2

$\triangle AED$ と $\triangle ADC$ で

共通な角があることと $\widehat{AB} = \widehat{AD}$ より

1 つの円で等しい弧に対する円周角は等しいことを使って

2 組の角がそれぞれ等しいことを示す。

問3

(1)

$$\triangle AED \sim \triangle ADC \text{ より}$$

$$AD : AC = AE : AD$$

$$2 : 3 = AE : 2$$

$$\text{よって } AE = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

(2)

$$\triangle AED \sim \triangle ADC \text{ で}$$

$$AD : AC = 2 : 3 \text{ より}$$

$$\triangle AED : \triangle ADC = 2^2 : 3^2 = 4 : 9 \cdots \textcircled{1}$$

$DC \parallel EG$ より

$$\triangle FGC = \triangle EFC$$

$AD \parallel EF$ より

$$\triangle EFC \sim \triangle ADC \text{ で}$$

$$EC : AC = \left(3 - \frac{4}{3} \right) : 3 = 5 : 9$$

$$\text{よって } \triangle EFC : \triangle ADC = \triangle FGC : \triangle ADC = 5^2 : 9^2 = 25 : 81 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \triangle AED : \triangle FGC = \frac{4}{9} : \frac{25}{81} = 36 : 25$$

【問 30】

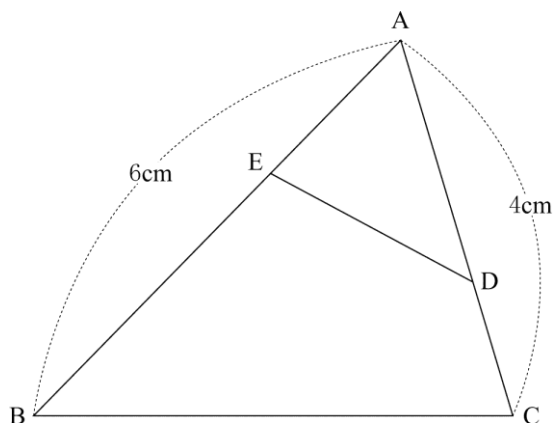
図1のような $\triangle ABC$ において、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AC=4\text{ cm}$ とし、
 $AE:EB=1:2$ 、 $AD:DC=3:1$ とする。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(沖縄県 2016 年度)

問1 図1において、 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ であることを証明しなさい。
 ただし、証明の中に根拠となることがらを必ず書くこと。

図1

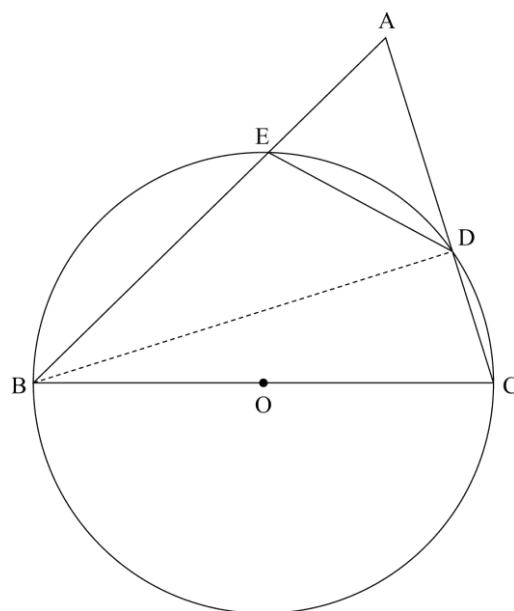


問2 図1の $\triangle ABC$ について、辺 BC を直径とする円 O をかくと、点 D 、 E でちょうど交わり、図2のようになった。

このとき、次の(1)～(3)に答えなさい。

(1) BD の長さを求めなさい。

図2



(2) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

(3) 四角形 $BCDE$ の面積を求めなさい。

問1	$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において,		
問2	(1)	cm	
	(2)	cm ²	
	(3)	cm ²	

解答

問1

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

条件より

$AD=3$ から

$AB:AD=6:3=2:1$

$AE=2$ から

$AC:AE=4:2=2:1$

よって

$AB:AD=AC:AE \cdots \textcircled{1}$

また $\angle BAC = \angle DAE$ (共通) $\cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より

2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

問2

(1) $3\sqrt{3}$ cm

(2) $6\sqrt{3}$ cm²

(3) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm²

解説

問1

$AE = 6 \times \frac{1}{3} = 2$ cm, $AD = 3$ cm

$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ において

$\angle A$ は共通

$\angle A$ の両側にある辺の比は

$AB:AD=6:3=2:1$

$AC:AE=4:2=2:1$

で同じなので

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

問2

(1)

BC が直径なので $\angle BEC = \angle AEC = 90^\circ$

$\triangle AEC$ に三平方の定理を用いると $EC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

したがって $BC = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$

$\angle BDC = 90^\circ$ なので $BD = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - 1^2} = 3\sqrt{3}$ cm

(2)

$\triangle ABC$ の面積は

底辺 $AB=6$, 高さ $EC=2\sqrt{3}$ なので

$\frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm²

(3)

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ で

相似比は $2:1$ だったので

$\triangle ADE = \frac{1}{4} \triangle ABC$

よって求める面積は $6\sqrt{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm²