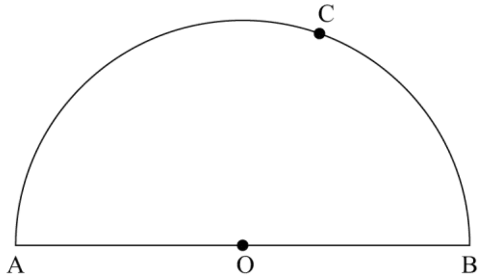
5.空間図形の複合問題 （長さ・面積・体積・角度ほか）【2017 年度出題】

【問 1】

図のように，線分 AB を直径とする半円の弧 AB 上に点 C があります。線分 AB の中点を点 O とします。

次の(1)～(3)に答えなさい。

（北海道 2017 年度）



(1) AC＝BC とします。△ABC を，線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体を P，半円を，線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体を Q とします。立体 P の体積は，立体 Q の体積の何倍ですか，求めなさい。

(2) 線分 AC が線分 AB より 1 cm 短く，線分 BC が線分 AB より 2 cm 短いとき，線分 AB の長さは何 cm になりますか。線分 AB の長さを x cm として方程式をつくり，求めなさい。

(3) 線分 AB を 4 cm とします。点 C は，弧 AB 上を，点 A から点 B まで移動するものとします。∠ABC の二等分線と∠BAC の二等分線との交点を D とするとき，点 D がえがいてできる線の長さを求めなさい。ただし，点 C が点 A の位置にあるとき，点 D は点 A の位置にあり，点 C が点 B の位置にあるとき，点 D は点 B の位置にあるものとします。また，円周率は π を用いなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="2">倍</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td colspan="2">〔方程式〕</td></tr>
<tr><td colspan="2">〔計算〕

答　　　　　cm</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">cm</td></tr>
</table>

解答

(1) $\dfrac{1}{2}$倍

(2)

〔方程式〕

$x^2=(x-1)^2+(x-2)^2$

〔計算〕

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$x=1,\ 5$

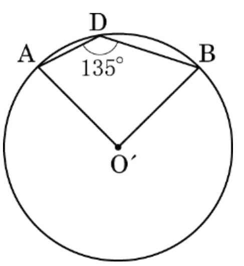
$x>2$ より

$x=5$

答 5 cm

(3) $\sqrt{2}\ \pi$ cm

解説
(1)
半円の弧に対する円周角は直角であるから∠ACB＝90°
AC＝BCより△ABCは直角二等辺三角形だからCO⊥ABとなる。
半円Oの半径をrとすると
立体Pの体積は底面の半径がrで高さがrの円錐の体積の2倍だから円周率をπとして
$$\left(\frac{1}{3}\times\pi r^2\times r\right)\times 2=\frac{2}{3}\pi r^3$$
また立体Qの体積は半径rの球の体積と等しいから
$$\frac{4}{3}\pi r^3$$
よって$\frac{2}{3}\pi r^3\div\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{2}$倍
(2)
条件よりAB＝x cm，AC＝$x-1$ cm，BC＝$x-2$ cmと表される。
△ABCにおいて
三平方の定理より
$(x-1)^2+(x-2)^2=x^2$
これを整理すると
$(x-1)(x-5)=0$
よって
$x=1,\ 5$
$x=1$のとき
AB＝1 cm，AC＝0 cm，BC＝－1 cmとなり問題にあわない。
$x=5$のとき
AB＝5 cm，AC＝4 cm，BC＝3 cmとなり問題にあっている。
(3)
∠ABC＝∠y，∠BAC＝∠zとする。
△ABCにおいて∠ACB＝90°だから∠y＋∠z＋90°＝180°より
∠y＋∠z＝90°
△ABDにおいて∠ABD＝$\frac{1}{2}$∠y，∠BAD＝$\frac{1}{2}$∠zと表されるから
$\angle ADB+\frac{1}{2}\angle y+\frac{1}{2}\angle z=180^\circ$　より
$$\angle ADB=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle y+\frac{1}{2}\angle z\right)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle y+\angle z)=180^\circ-\frac{1}{2}\times 90^\circ=135^\circ$$

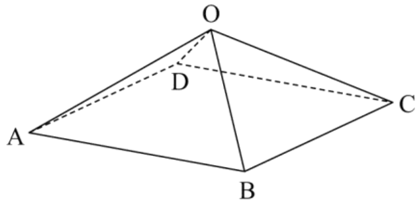


点Cが点A，Bを除く$\overset{\frown}{AB}$上のどこにあっても∠ADBの大きさは135°で一定だから
点Dがえがいてできる線は円周角の大きさが135°になるような$\overset{\frown}{AB}$である。
右の図のように点Dがえがいてできる$\overset{\frown}{AB}$を含む円の中心をO′とすると
小さい方の∠AO′Bの大きさは360°－135°×2＝90°　だから△O′ABは直角二等辺三角形になる。
O′A＝a cmとすると
O′A:AB＝$1:\sqrt{2}$
$a:4=1:\sqrt{2}$
$\sqrt{2}\,a=4$
$a=2\sqrt{2}$
よって求める長さは$2\pi\times 2\sqrt{2}\times\frac{90}{360}=\sqrt{2}\,\pi$　cm

【問 2】

右の図の正四角すいは，底面が 1 辺 4 cm の正方形で，他の辺が 3 cm である。次の(1)～(4)に答えなさい。

（青森県　2017 年度）



(1) 辺 OA とねじれの位置にある辺をすべて書きなさい

(2) AC と BD の交点を H とするとき，OH と底面 ABCD は垂直である。このとき，OH の長さを求めなさい。

(3) OH を軸として，正四角すいを 1 回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。

(4) 辺 OB 上の点を P とするとき，点 A から点 P を通って点 C まで糸をかける。この糸の長さが最も短くなるときの，糸の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	
(2)	cm
(3)	cm^3
(4)	cm

解答

(1) 辺 BC, 辺 CD

(2) 1 cm

(3) $\frac{8}{3}\pi$ cm^3

(4) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm

解説

(1)

辺 OA とねじれの位置にある辺は辺 OA と平行でなく交わらない辺である。

よって辺 BC, CD。

(2)

$\triangle OAH$ において $\angle OHA=90^\circ$, OA＝3 cm だから

三平方の定理より $OH^2=OA^2-AH^2=3^2-AH^2$ が成り立つので

AH の長さを求めれば OH の長さが求まる。

$\triangle HAD$ は

四角形 ABCD が正方形で点 H は対角線の交点になるから

HA＝HB, $\angle AHB=90^\circ$ の直角二等辺三角形になる。

よって $AH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\,AB=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times4=2\sqrt{2}$ cm だから

$OH^2=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1$

したがって OH＞0 より

OH＝1 cm

(3)

求める体積は $\triangle OAH$ を OH を軸として 1 回転させたときにできる立体の体積になる。

できる立体は底面の半径が $2\sqrt{2}$ cm で高さが 1cm の円すいだから

求める体積は $\frac{1}{3}\times\{\pi\times(2\sqrt{2})^2\}\times1=\frac{8}{3}\pi$ cm^3

(4)

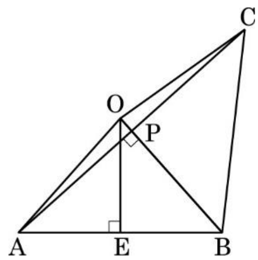
右の図のように正四角すいの展開図の一部をかいて考える。

糸の長さが最も短くなるときその糸は右の図の線分 AC で表され

$\triangle OAB\equiv\triangle OCB$ であることから OA＝OC より $AC\perp OB$ となる。

ここで $\triangle OAB$ は OA＝OB の二等辺三角形より点 O から辺 AB に垂線 OE をひくと

$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times4=2$ cm となる。



$\angle OEA=90^\circ$ だから

$OE^2=OA^2-AE^2=3^2-2^2=5$

OE＞0 より

$OE=\sqrt{5}$ cm だから

$\triangle OAB$ の面積は

$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ cm^2

よって $\triangle OAB$ の面積の関係から

$\frac{1}{2}\times3\times AP=2\sqrt{5}$

$AP=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

$CP=AP=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ cm だから

$AC=AP+CP=\frac{4\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm

【問 3】

恵子さんは，学校行事で使うために，大きさの異なる花笠 A，B を，それぞれ次の①～⑤の【手順】で作った。あとの問いに答えなさい。

（山形県　2017 年度）

【手順】

① 鍋のふたを使って，図1のように厚紙に円をかく。

② 図1において，円の中心 O を求める。

③ 図2のように，厚紙から切り取った円 O の円周上に，2 点 P，Q をとり，中心角の大きさが小さいほうのおうぎ形を切り取る。

④ 図3のように，半径 OP と OQ を合わせて円すいの側面を作る。

⑤ 花などの飾りをつける。

図1

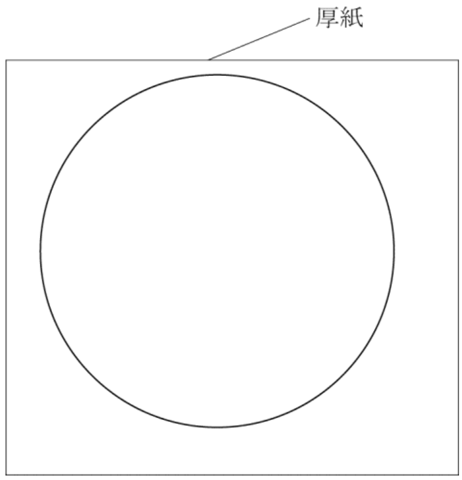


図2

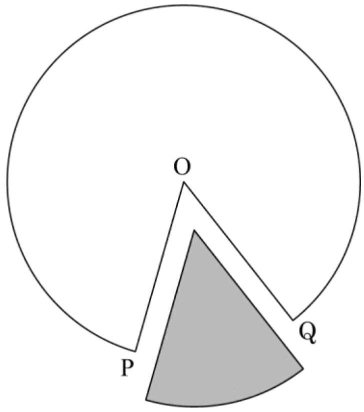
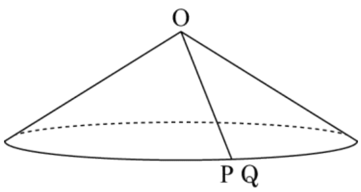


図3



(1) 下線部について，円の中心を求める方法を説明しなさい。

(2) 図2において，小さいほうのおうぎ形の中心角を 40° にして切り取り，残ったおうぎ形の厚紙で花笠 A を作った。おうぎ形の半径が 18 cm であるとき，図3の円すいの高さを求めなさい。

(3) 花笠 A と同じ【手順】で作った花笠 B の高さをはかったところ，小数第 2 位を四捨五入して得られた値は，7.0 cm であった。高さの真の値を a cm としたとき，a の範囲を表す不等式として最も適切なものを，次のア～エから 1 つ選び，記号で答えなさい。

ア　$6.94 < a \leqq 7.04$　　イ　$6.94 < a \leqq 7.05$　　ウ　$6.95 \leqq a < 7.05$　　エ　$6.95 \leqq a < 7.06$

解答欄

(1)	〔方法〕
(2)	cm
(3)	

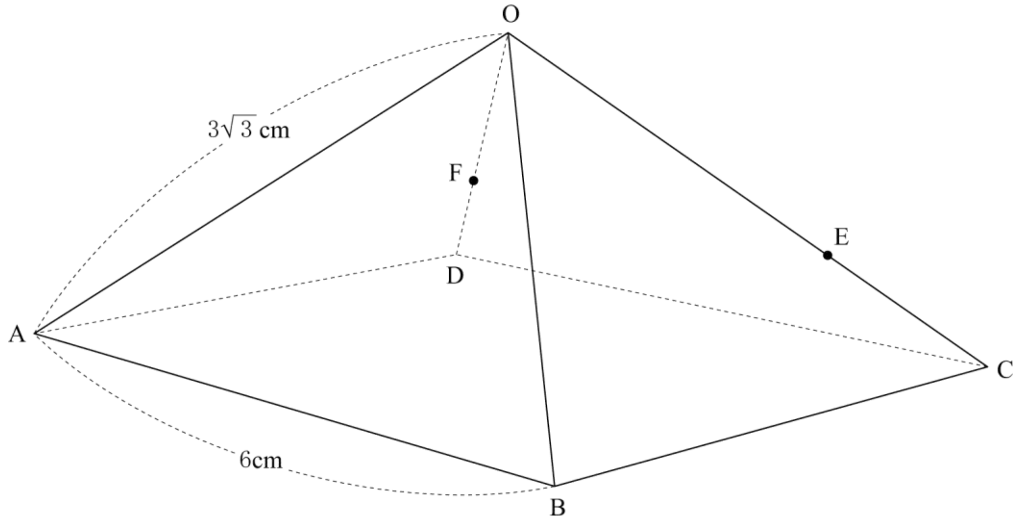
解答
(1)
〔方法〕
平行でない 2 つの弦の垂直二等分線の交点を求める。
(2) $2\sqrt{17}$ cm
(3) ウ
解説
(1)
円は中心から等しい距離にある点を集めたものであるから
円周上の 2 点と中心を結んでできる三角形は二等辺三角形になるのでこのことを利用する。
まず円周上に任意の弦を引きこの弦の垂直二等分線を作図する。
次に先に引いた弦に平行にならないようにもう 1 本弦を引き同じように垂直二等分線を作図する。
この 2 本の垂直二等分線の交点が円の中心となる。
(2)
円すいの底面の半径を求めると
$18\times\dfrac{360-40}{360}=16$ cm
よって高さを h とすると
$h^2=18^2-16^2=324-256=68$
したがって
$h>0$ だから
$2\sqrt{17}$ cm
(3)
7.0 は小数第 2 位を四捨五入した近似値であると考えられるので
a の範囲は $6.95\leqq a<7.05$

【問 4】

下の図のような，底面が 1 辺 6 cm の正方形で，他の辺が $3\sqrt{3}$ cm の正四角錐がある。辺 OC，OD 上にそれぞれ点 E，F を，OE：EC＝2：1，OF：FD＝2：1 となるようにとる。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（福島県　2017 年度）



問1　線分 EF の長さを求めなさい。

問2　辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とするとき，△OMN の面積を求めなさい。

問3　O を頂点とし，四角形 ABEF を底面とする四角錐の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm^2
問3	cm^3

解答
問1　4 cm
問2　9 cm^2
問3　20 cm^3
解説
問1
OE:EC＝OF:FD＝2:1 より EF // CD
よって EF:CD＝OE:OC＝2:(2＋1)＝2:3 だから $\mathrm{EF}=\frac{2}{3}\mathrm{CD}=\frac{2}{3}\times 6=4$ cm
問2
△OAM と△OBM において
OA＝OB, AM＝BM, OM＝OM より
3 組の辺がそれぞれ等しいから
△OAM≡△OBM
よって OM⊥AB
△OAM において
$\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\times 6=3$ cm　だから
三平方の定理より $\mathrm{OM}^2=\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM}^2=(3\sqrt{3})^2-3^2=18$
OM＞0 より $\mathrm{OM}=3\sqrt{2}$ cm
同様にして $\mathrm{ON}=3\sqrt{2}$ cm
また四角形 AMND は長方形だから MN＝AD＝6 cm
点 O から辺 MN に垂線をひきその交点を H とすると
△OMH と△ONH において
∠OHM＝∠OHN＝90°，OM＝ON, OH＝OH より
直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから
△OMH≡△ONH
よって MH＝NH
△OMH において
$\mathrm{MH}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\times 6=3$ cm　だから
三平方の定理より $\mathrm{OH}^2=\mathrm{OM}^2-\mathrm{MH}^2=(3\sqrt{2})^2-3^2=9$
OH＞0 より
OH＝3 cm
したがって△OMN の面積は $\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$ cm^2
問3
問2で求めた線分 OH の長さは正四角錐 O-ABCD の高さである。
正四角錐 O-ABCD の体積は $\frac{1}{3}\times(6\times 6)\times 3=36$ cm^3
四角錐 O-ABEF を三角錐 O-ABF と三角錐 O-EBF に分けて考える。
まず三角錐 O-ABF において△OFB を底面として考える。
このとき三角錐 A-OBD と高さが等しく底面積は OF:FD＝2:1 より三角錐 A-OBD の底面積の $\frac{2}{3}$ になる。
よって三角錐 O-ABF の体積は $36\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=12$ cm^3
次に 三角錐 O-EBF において同様に△OFB を底面として考える。
このとき OE:EC＝2:1 より
三角錐 O-CBD の高さの $\frac{2}{3}$，底面積も OF:FD＝2:1 より三角錐 O-CBD の底面積の $\frac{2}{3}$ になる。
よって三角錐 O-EBF の体積は $36\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=8$ cm^3
したがって求める体積は 12＋8＝20 cm^3

【問 5】

図1のように，三角すい ABCD がある。図2は，図1の展開図である。この展開図の四角形 AEDF は，2 つの対角線の長さが AD＝8 cm，EF＝6 cm のひし形であり，線分 AD と線分 BC の交点を G とする。また，図3は，図1の頂点 A から線分 DG に垂線をひき，その交点を H としたものである。

このとき，次の問1，問2に答えなさい。

（茨城県　2017 年度）

問1　図2において，△ABC の面積は，四角形 AEDF の面積の何倍か求めなさい。

問2　図3において，線分 AH の長さを求めなさい。

図1

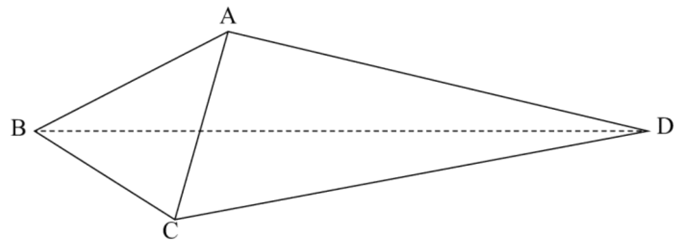


図2

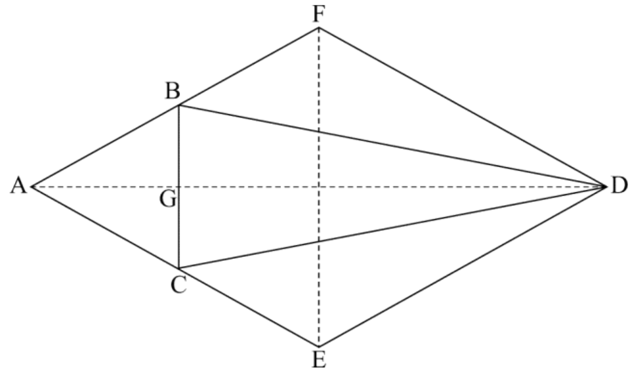
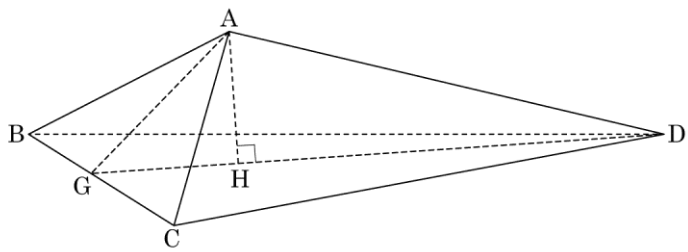


図3



解答欄

問1	倍
問2	cm

解答

問1　$\dfrac{1}{8}$倍

問2　$\dfrac{\sqrt{39}}{4}$ cm

解説

問1

図2の展開図を組み立てると線分 AB と線分 FB, 線分 AC と線分 EC がそれぞれ重なるから
AB＝FB, AC＝EC となる。

△AFE において中点連結定理より BC // FE, BC＝$\dfrac{1}{2}$FE

△ABC∽△AFE であり
相似比は AB:AF＝1:2 だから
面積の比は $1^2:2^2=1:4$
△ABC＝S とすると△DFE＝△AFE＝4 S となるから
四角形 AEDF の面積は $4S+4S=8S$ と表される。

よって $S\div 8S=\dfrac{1}{8}$倍

問2

図2において対角線 AD と EF の交点を I とすると BC // FE より
AG:GI＝AB:BF＝1:1

AI＝$\dfrac{1}{2}$AD＝$\dfrac{1}{2}\times 8=4$ cm だから

AG＝$\dfrac{1}{2}$AI＝$\dfrac{1}{2}\times 4=2$ cm

GD＝AD－AG＝8－2＝6 cm
また ID＝8÷2＝4, IE＝6÷2＝3 だから
$\mathrm{ED}^2=\mathrm{ID}^2=\mathrm{IE}^2=4^2+3^2=25$
ED＞0 より
ED＝5 cm
図3の△AGD において AH＝x cm, GH＝y cm とする。
△AGH において
三平方の定理より
$y^2+x^2=2^2$
$x^2=4-y^2$…①
△ADH において
三平方の定理より
$(6-y)^2+x^2=5^2$
$x^2=25-(6-y)^2$…②
①, ②より
$4-y^2=25-(6-y)^2$
整理すると

$y=\dfrac{5}{4}$…③

よって ①に③を代入して

$x^2=4-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$ より

$x^2=\dfrac{39}{16}$

$x>0$ だから

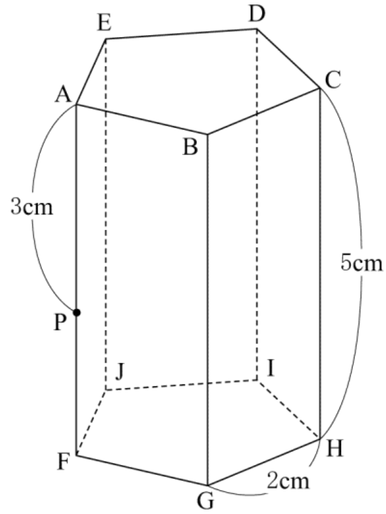
$x=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$

【問 6】

右の図のような，底面が 1 辺 2 cm の正五角形で高さが 5 cm である正五角柱 ABCDE－FGHIJ があり，辺 AF 上に AP＝3 cm となる点 P がある。

このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（栃木県　2017 年度）



(1) 正五角柱 ABCDE－FGHIJ の側面上に点 P と点 H を最短の長さで結ぶ線をひくとき，その線の長さを求めなさい。

(2) 正五角柱 ABCDE－FGHIJ の体積を S cm^3，五角錐 P－FGHIJ の体積を T cm^3 とする。このとき，2 つの図形の体積の比 S:T を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	S:T＝　　　　:

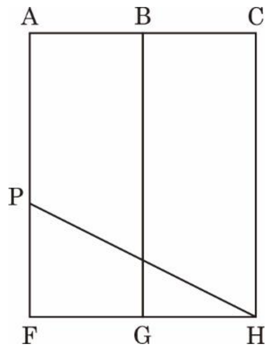
解答

(1)　$2\sqrt{5}$ cm

(2)　S:T＝15:2

解説

(1)



右の図のように正五角柱の展開図の一部をかいて考える。

点 P と点 H を最短の長さで結ぶ線をひくときその線は右の図の線分 PH で表される。

求める長さを x cm とすると

右の図の△PFH において

三平方の定理より

$(5-3)^2+(2+2)^2=x^2$

$2^2+4^2=x^2$

$x^2=20$

$x>0$ だから

$x=2\sqrt{5}$

(2)

正五角柱 ABCDE－FGHIJ と五角錐 P－FGHIJ において

底面 FGHIJ の面積を y cm^2 とすると

正五角柱 ABCDE－FGHIJ の体積は

$y\times5=5y$ cm^3

五角錐 P－FGHIJ の体積は

$\dfrac{1}{3}\times y\times2=\dfrac{2}{3}y$ cm^3

よって $S:T=5y:\dfrac{2}{3}y=5:\dfrac{2}{3}=15:2$

【問 7】

図1の正四角すいOABCDは，OA＝$6\sqrt{3}$ cm，AB＝6 cm である。図2は，この正四角すいの側面に，点 A から辺 OB と辺 OC を通って点 D まで，1 本の糸を巻きつけたものである。糸と辺 OB，OC との交点をそれぞれ P，Q とする。

次の問1～問3に答えなさい。ただし，糸はそれぞれの側面でたるむことなく巻きつけられているものとする。

（群馬県　2017 年度　後期）

図1

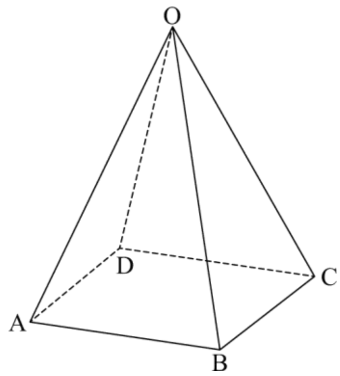
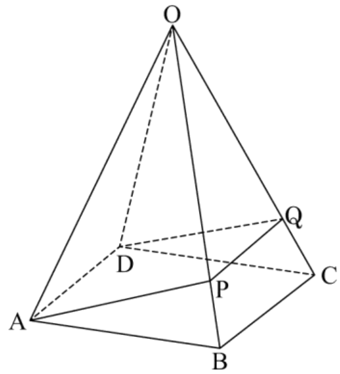


図2



問1 P，Q がそれぞれ辺 OB，OC の中点となるように糸を巻きつけたとき，PQ の長さを求めなさい。

問2 AP⊥OB，DQ⊥OC となるように糸を巻きつけたとき，

(1) OP と PB の長さの比 OP：PB を，最も簡単な整数比で表しなさい。

(2) 巻きつけた糸の A から D までの長さを求めなさい。

問3 A から D までの糸の長さが最も短くなるように巻きつけたとき，巻きつけた糸の A から D までの長さを求めなさい。

解答欄

問1		cm
問2	(1)	OP：PB＝　　：
	(2)	cm
問3		cm

解答

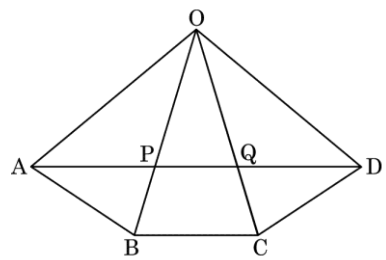
問1　3 cm

問2

(1)　OP:PB＝5:1

(2)　$5+2\sqrt{33}$ cm

問3　16 cm

解説
問1
△OBCにおいて
中点連結定理より $PQ=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times 6=3$ cm
問2
(1)
$OP=x$ cmとすると $PB=6\sqrt{3}-x$ cm
△AOPにおいて
三平方の定理より $AP^2=AO^2-OP^2=(6\sqrt{3})^2-x^2=108-x^2$
△ABPにおいて
三平方の定理より $AP^2=AB^2-BP^2=6^2-(6\sqrt{3}-x)^2=-72+12\sqrt{3}x-x^2$
よって $108-x^2=-72+12\sqrt{3}x-x^2$
整理すると $x=5\sqrt{3}$ となるから
$OP:PB=5\sqrt{3}:(6\sqrt{3}-5\sqrt{3})=5\sqrt{3}:\sqrt{3}=5:1$
(2)
(1)より
$AP^2=AO^2-OP^2=(6\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3})^2=108-75=33$
$AP>0$ より $AP=\sqrt{33}$ cm
△OAB≡△ODC
AP⊥OB, DQ⊥OCより
△OAP≡△ODQだから
$DQ=AP=\sqrt{33}$ cm
また $OQ:QC=OP:PB=5:1$ だから PQ // BC
よって $PQ:BC=OP:OB=5:(5+1)=5:6$ だから $PQ=\dfrac{5}{6}BC=\dfrac{5}{6}\times 6=5$ cm
したがって求める糸の長さは $\sqrt{33}+5+\sqrt{33}=5+2\sqrt{33}$ cm
問3


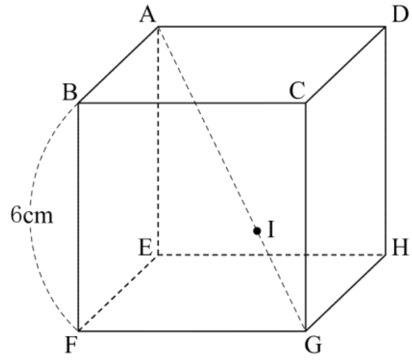
右の図のように正四角すいの展開図の一部をかいて考える。
糸の長さが最も短くなるように巻きつけたときその糸は
右の図の線分ADで表され一直線になる。
△OBCはOB＝OCの二等辺三角形
△OADもOA＝ODの二等辺三角形だから
点Oから辺BCに引いた垂線は辺ADとも垂直に交わるので
BC // ADとなることがわかる。
ここで平行線の錯角は等しいので∠APB＝∠OBC
また△OAB≡△OBC≡△OCDより∠OBA＝∠OCB
△OBCは二等辺三角形だから∠OCB＝∠OBC
よって∠OBA＝∠OBCとなる。
したがって△ABPは∠APB＝∠ABPとなるので二等辺三角形になり $AP=AB=6$ cm
同様に $DQ=6$ cm となる。
また△ABP∽△OBCなので
$AB:OB=BP:BC$ で
$6:6\sqrt{3}=BP:6$ となり
$BP=2\sqrt{3}$ cm
$OP=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ cm だから
平行線と線分の比の関係より
$OP:OB=PQ:BC$ で
$4\sqrt{3}:6\sqrt{3}=PQ:6$ となり
$PQ=4$ cm
したがって巻き付けた糸のAからDまでの長さは
$AP+PQ+QD=6+4+6=16$ cm

【問 8】

右の図のように，1 辺が 6 cm の立方体 ABCD－EFGH があります。この立方体の対角線 AG 上に，∠AIF＝90° となる点 I をとります。

このとき，次の各問に答えなさい。

（埼玉県　2017 年度）



問1　△AGF と△AFI が相似であることを証明しなさい。

問2　線分 FI の長さを求めなさい。

問3　4 つの点 A，F，I，C を頂点とする立体の体積を求めなさい。

解答欄

問1	〔証明〕
問2	cm
問3	cm^3

解答
問1
〔証明〕
△AGF と△AFI において
∠AFG＝∠AIF＝90° …①
∠FAG＝∠IAF …②
①, ②から
2 組の角がそれぞれ等しいので
△AGF∽△AFI
問2 $2\sqrt{6}$ cm
問3 24 cm^3
解説
問1
長方形の 4 つの角が 90° になることと共通な角を使って証明する。
問2
$AG^2＝(6\sqrt{2})^2＋6＝108$
よって AG＞0 だから
$AG＝\sqrt{108}＝6\sqrt{3}$
△AGF∽△AFI より
AF : AG＝FI : GF となるから
$6\sqrt{2} : 6\sqrt{3}＝FI : 6$
$FI＝2\sqrt{6}$ cm
問3
三角すい C-AFG＝三角柱 ABCEFG－三角すい A-EFG－三角すい F-ABC より
$\frac{1}{2}\times6\times6\times6-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6＝108-36-36＝36\ \mathrm{cm}^3$
ここで△AFI∽△FGI となるから
$6\sqrt{2} : 6＝2\sqrt{6} : IG$
$IG＝\frac{6\times2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}＝2\sqrt{3}$
よって $AI : IG＝(6\sqrt{3}-2\sqrt{3}) : 2\sqrt{3}＝4\sqrt{3} : 2\sqrt{3}＝2 : 1$ だから
△AFI : △IFG＝2 : 1
したがって求める立体の体積は $\frac{2}{2+1}$ ×三角すい C-AFG の体積＝$\frac{2}{3}\times36＝24\ \mathrm{cm}^3$

【問 9】

右の図1に示した立体 A－BCD は，AB＝8 cm，BC＝BD＝6 cm，∠ABC＝∠ABD＝90°，∠CBD＝60° の三角すいである。辺 AD の中点を M とする。辺 BC 上にある点を P とし，点 M と点 P を結ぶ。

次の各問に答えよ。

（東京都　2017 年度）

問1　次の □ の中の「く」に当てはまる数字を答えよ。

点 P が辺 BC の中点となるとき，線分 MP の長さは，$\boxed{く}$ cm である。

図1

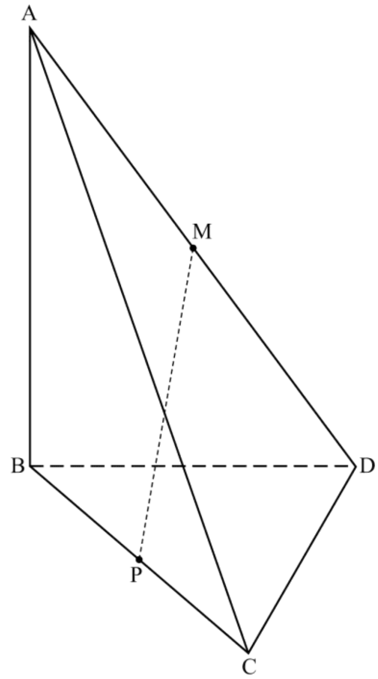
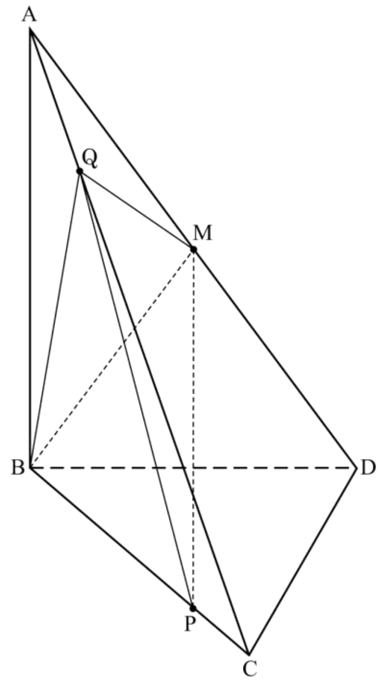


図2



問2　次の □ の中の「け」「こ」に当てはまる数字をそれぞれ答えよ。

右の図2は，図1において，辺 AC 上にある点を Q とし，頂点 B と点 M，頂点 B と点 Q，点 M と点 Q，点 P と点 Q をそれぞれ結んだ場合を表している。

BP＝5 cm，AQ＝2 cm のとき，立体 M－QBP の体積は，

$\boxed{け}\sqrt{\boxed{こ}}$ cm^3 である。

解答欄

問1	く	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
問2	け	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
	こ	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

解答
問1
く　5
問2
け　8
こ　3
解説
問1
辺 BD の中点を N とする。
△ABD において中点連結定理より MN // AB
また $\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4\mathrm{cm}$
BC＝BD，∠CBD＝60° より∠BCD＝∠BDC＝(180°－60°)÷2＝60° だから△BCD は正三角形である。
このことから CD＝BC＝6 cm
△BCD において中点連結定理より $\mathrm{PN}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=\frac{1}{2}\times 6=3\ \mathrm{cm}$
辺 AB と面 BCD は垂直で MN // AB だから線分 MN と面 BCD も垂直となる。
よって△MNP は∠MNP＝90° の直角三角形だから MP＝x cm とすると三平方の定理より
$4^2+3^2=x^2$
$x^2=25$
$x>0$ だから
$x=5$
問2
立体 A－BCD の体積を V とする。
点 M は辺 AD の中点だから立体 M－BCD＝$\frac{1}{2}V$
よって立体 A－BCM＝立体 A－BCD－立体 M－BCD＝$V-\frac{1}{2}V=\frac{1}{2}V$
△ABC において AC＝y cm とすると
三平方の定理より
$8^2+6^2=y^2$
$y^2=100$
$y>0$ だから
$y=10$
QC＝AC－AQ＝10－2＝8 cm だから
立体 Q－BCM＝立体 A－BCM×$\frac{8}{10}=\frac{1}{2}V\times\frac{8}{10}=\frac{2}{5}V$
BC＝6 cm，BP＝5 cm だから
立体 Q－BPM＝立体 Q－BCM×$\frac{5}{6}=\frac{2}{5}V\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}V$
このことから立体 M－QBP＝$\frac{1}{3}V$ となる。
1 辺の長さが 6 cm の正三角形の高さを h cm とすると三平方の定理より
$3^2+h^2=6^2$　$h^2=27$
$h>0$ だから
$h=3\sqrt{3}$
よって△BCD の面積は $\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$　cm^2 だから
立体 A－BCD の体積は
$\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 8=24\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$
したがって立体 M－QBP の体積は $\frac{1}{3}\times 24\sqrt{3}=8\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

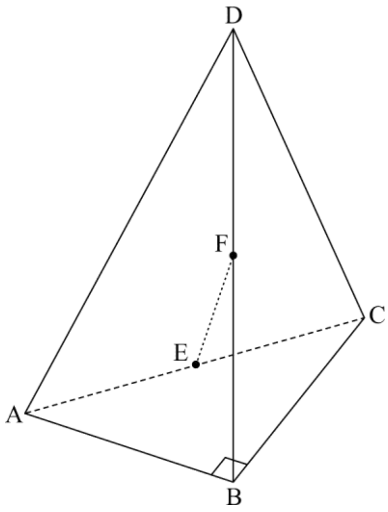
【問 10】

右の図1は，AB＝BC＝6 cm，∠ABC＝90° の直角二等辺三角形 ABC を底面とし，BD＝12 cm を高さとする三角すいである。また，2 点 E，F はそれぞれ辺 AC，辺 BD の中点である。

このとき，次の問いに答えなさい。

（神奈川県　2017 年度）

図1



問1 この三角すいの体積として正しいものを次の1～6の中から 1 つ選び，その番号を答えなさい。

1 24 cm^3　　2 72 cm^3

3 108 cm^3　　4 126 cm^3

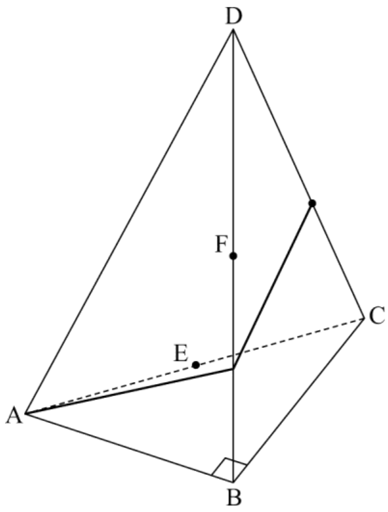
5 144 cm^3　　6 216 cm^3

問2 この三角すいにおいて，2 点 E，F 間の距離として正しいものを次の1～6の中から 1 つ選び，その番号を答えなさい。

1 3 cm　　2 $3\sqrt{2}$ cm　　3 $3\sqrt{3}$ cm

4 6 cm　　5 $3\sqrt{5}$ cm　　6 $3\sqrt{6}$ cm

図2



問3 この三角すいの側面上に，図2のように点 A から辺 BD に交わるように辺 CD 上の点まで，長さが最も短くなるように線を引いたときの線の長さとして正しいものを次の1～6の中から 1 つ選び，その番号を答えなさい。

1 $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ cm　　2 $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ cm

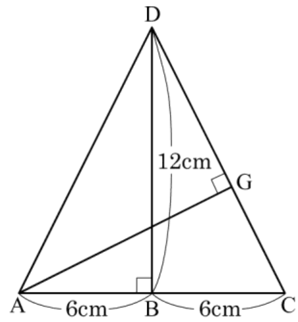
3 $6\sqrt{3}$ cm　　4 $\dfrac{24\sqrt{5}}{5}$ cm

5 $6\sqrt{5}$ cm　　6 $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$ cm

解答欄

問1	① ② ③ ④ ⑤ ⑥
問2	① ② ③ ④ ⑤ ⑥
問3	① ② ③ ④ ⑤ ⑥

解答
問1　2
問2　6
問3　4
解説
問1
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times12=72\ \mathrm{cm}^3$
問2
△ABE と△CBE において
3 組の辺がそれぞれ等しいので
△ABE≡△CBE
このことから△ABE は辺 AB を斜辺とする直角二等辺三角形であるとわかる。
BE＝x cm とすると
$x:6=1:\sqrt{2}$
$\sqrt{2}\,x=6$
$x=3\sqrt{2}$
辺 BD は△ABC を底面としたときの高さだから BF⊥BE
△BEF において
EF＝y cm とすると BF＝12÷2＝6 cm　だから
三平方の定理より
$(3\sqrt{2})^2+6^2=y^2$
$y^2=54$
$y>0$ だから
$y=3\sqrt{6}$
よって 2 点 E, F 間の距離は $3\sqrt{6}$ cm
問3
辺 CD 上に点 G をとる。
このとき線分 AG が最も短くなるのは AG⊥CD のときで
右の図は三角すいの展開図の一部にそのようすを表したものである。



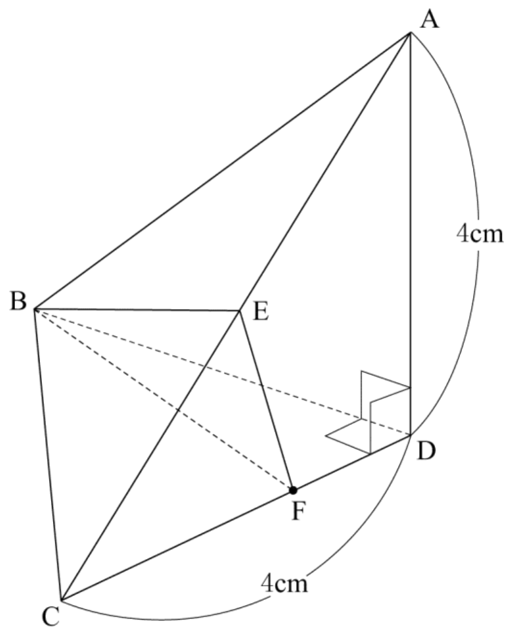
△DBC において CD＝z cm とすると
三平方の定理より
$6^2+12^2=z^2$
$z^2=180$
$z>0$ だから
$z=6\sqrt{5}$
線分 AG は△DAC の CD を底辺としたときの高さである。
AG＝h cm とすると
△DAC の面積の関係より
$\frac{1}{2}\times6\sqrt{5}\times h=\frac{1}{2}\times(6+6)\times12$
整理すると
$h=\frac{24\sqrt{5}}{5}$

【問 11】

下の図のように，AD＝BD＝CD＝4 cm，∠ADB＝∠ADC＝∠BDC＝90°である三角すい ABCD がある。辺 AC の中点を E とし，辺 CD 上を点 C から点 D まで移動する点を F とする。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（新潟県 2017 年度）



問1 辺 AB の長さを答えなさい。

問2 △ABC の面積を求めなさい。

問3 EF＋FB の長さが最も短くなるとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) EF＋FB の長さを求めなさい。

(2) 三角すい EBCF の体積を求めなさい。

解答欄

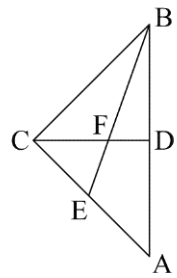
<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm</td></tr>
<tr><td>問2</td><td colspan="2">〔求め方〕

答　　　　　　cm^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問3</td><td>(1)</td><td>〔求め方〕

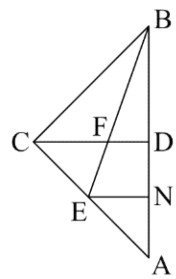
答　　　　　　cm</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>〔求め方〕

答　　　　　　cm^3</td></tr>
</table>

解答
問1　$4\sqrt{2}$ cm
問2
〔求め方〕
△ABC は 1 辺の長さが $4\sqrt{2}$ の正三角形で
1 辺の長さと高さの比は $2:\sqrt{3}$ だから
高さは $2\sqrt{6}$ となる。
よって求める面積は $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}=8\sqrt{3}$
答　$8\sqrt{3}$ cm^2
問3
(1)
〔求め方〕
図において



EF＋FB の長さが最も短くなるのは
3 点 E, F, B が同一直線上にあるときである。
△BCE は
$BC=4\sqrt{2}$
$CE=2\sqrt{2}$
$\angle BCE=90^\circ$ の直角三角形だから
$EB^2=(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=40$
よって $EF+FB=EB=2\sqrt{10}$
答　$2\sqrt{10}$ cm
(2)
〔求め方〕
図において



CD // EN となる点 N を AD 上にとると
$EN=DN=2$ cm
$FD:EN=BD:BN=4:6=2:3$ より
$FD=\frac{4}{3}$, $CF=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ となるので
△CFB の面積は $\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 4=\frac{16}{3}$
また三角すい EBCF の高さは DN に等しく $DN=2$ cm だから
体積は $\frac{1}{3}\times\frac{16}{3}\times 2=\frac{32}{9}$
答　$\frac{32}{9}$ cm^3

解説

問1

AD＝BD＝4 cm，∠ADB＝90° だから $AB=4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ cm

問2

△ABC は 1 辺の長さが $4\sqrt{2}$ cm の正三角形だから

BC の中点を M とすると $BM=2\sqrt{2}$ cm，∠AMB＝90° より

$AM^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2=24$

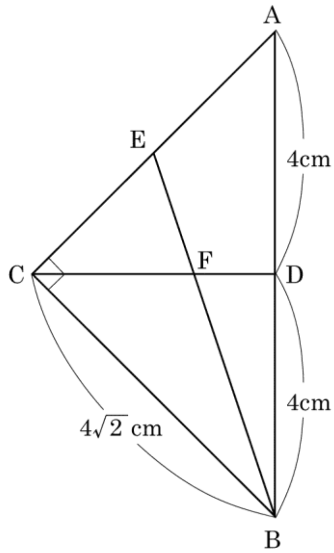
AM＞0 だから

$AM=2\sqrt{6}$ cm

よって $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=8\sqrt{3}$ cm²

問3

(1)



三角すい ABCD の展開図の一部をかくと右の図のようになる。

EF＋FB の長さが最も短くなるのは

右の展開図で点 E と点 B を直線で結んだとき。

よって△BCE において∠ACB＝90° となるから

三平方の定理より

$(EF+FB)^2=CE^2+CB^2$ がいえる。

したがって

$(EF+FB)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2=40$

EF＋FB＞0 だから

$EF+FB=2\sqrt{10}$ cm

(2)

点 E を通り CD に平行な線と辺 AD の交点を G とすると中点連結定理より

$EG=\dfrac{1}{2}CD=2$ cm, AG＝GD＝2 cm となる。

また△BEG∽△BFD となるから

BG : BD＝EG : FD

(4＋2) : 4＝2 : FD

$FD=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$ cm

よって $CF=4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$ cm

求める三角すい EBCF は△ECF を底面とみると高さは BD となる。

したがって求める体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times2\times4=\dfrac{32}{9}$ cm³

【問 12】

底面の半径が 4 cm, 高さが 10 cm の透明な円柱の容器があり, 2 つの底面の中心をそれぞれ O, O′とする。

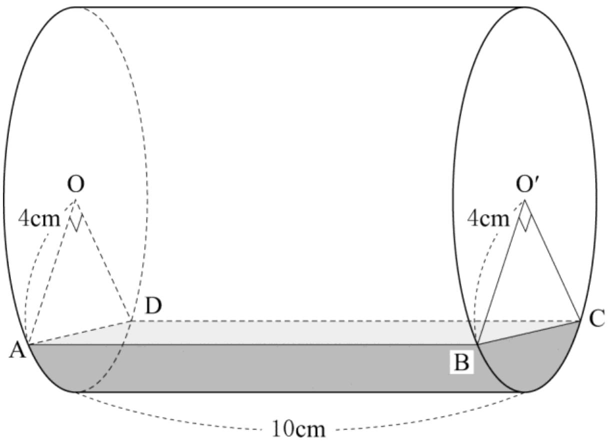
この容器に水を入れ, 右の図1のように, 水面の形が長方形になるように置いた。

このときの水面を長方形 ABCD とすると∠AOD＝∠BO′C＝90°であった。

このとき, 次の問いに答えなさい。ただし, 円周率はπとし, 容器の厚さは考えないものとする。

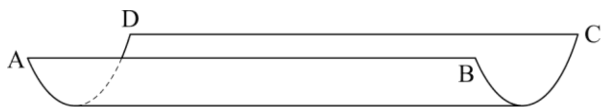
（富山県 2017 年度）

図1



問1 長方形 ABCD の面積を求めなさい。

図2



問2 右の図2は, 円柱の容器の側面で, 水にふれている部分のみを取り出した図である。この部分の面積を求めなさい。

問3 円柱の容器に入っている水の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm^2
問2	cm^2
問3	cm^3

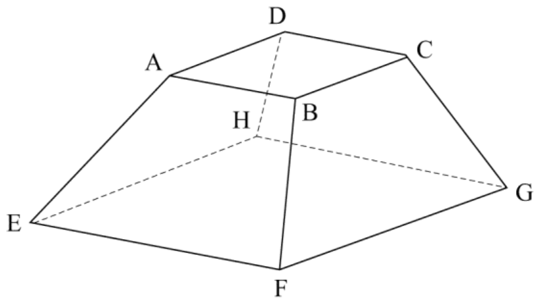
解答
問1　$40\sqrt{2}$ cm^2
問2　20π　cm^2
問3　$(40\pi-80)$ cm^3
解説
問1
△OAD は OA＝OD＝4 cm，∠AOD＝90° の直角二等辺三角形なので AD＝$4\sqrt{2}$ cm
よって長方形 ABCD の面積は $4\sqrt{2}\times10=40\sqrt{2}$ cm^2
問2
広げると$\overset{\frown}{AD}$が縦，AB が横の長方形になる。
$\overset{\frown}{AD}$の長さは半径 4 cm，中心角 90° の扇形の弧の長さなので
$2\pi\times4\times\dfrac{90}{360}=2\pi$　cm
よって求める面積は $2\pi\times10=20\pi$　cm^2
問3
底面が半径 4 cm，中心角 90°の扇形，高さ 10 cm の柱体から
底面が直角二等辺三角形，高さ 10 cm の三角柱を取り除いた立体の体積が
容器に入っている水の体積になる。
よって $\pi\times4^2\times\dfrac{90}{360}\times10-\dfrac{1}{2}\times4\times4\times10=40\pi-80$ cm^3

【問 13】

右の図のように，立体 ABCD－EFGH において，面 ABCD と面 EFGH は，1 辺の長さがそれぞれ 2 cm，4 cm の正方形であり，この 2 つの面は平行である。また，それ以外の 4 つの面は，すべて台形で AE＝BF＝CG＝DH＝3 cm である。

このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（石川県　2017 年度）



問1　辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて書きなさい。

問2　線分 AF の長さを求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

問3　立体 ABCD－EFGH の体積を求めなさい。なお，途中の計算も書くこと。

解答欄

問1	
問2	〔計算〕 答　　　　　cm
問3	〔計算〕 答　　　　　cm^3

解答
問1　辺 CG, 辺 DH, 辺 EH, 辺 FG
問2
〔計算〕
点 A から辺 EF に垂線をひくとその長さは
$\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$
よって AF$=\sqrt{(\sqrt{8})^2+3^2}=\sqrt{17}$
答　$\sqrt{17}$ cm
問3
〔計算〕
与えられた立体は
正四角すいを底面と平行な面で切りとってできたものである。
その正四角すいの頂点を I とすると
IABCD, IEFGH は正四角すいで相似比が 1 : 2 より
点 I から底面 EFGH にひいた垂線の長さは
$\sqrt{6^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$
点 I から面 ABCD にひいた垂線の長さは $\sqrt{7}$
求める体積は
$\frac{1}{3}\times 4^2\times 2\sqrt{7}-\frac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{7}=\frac{28\sqrt{7}}{3}$
答　$\frac{28\sqrt{7}}{3}$ cm^3

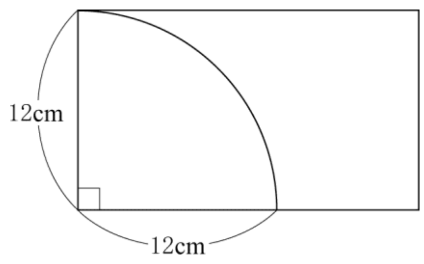
解説
問1
辺 AB とねじれの位置にある辺は辺 AB と平行でなく交わらない辺である。
よって辺 CG，DH，EH，FG
問2
2 点 A，B から辺 EF に垂線をひきその交点をそれぞれ I，J とする。
△AEI と△BFJ において
∠AIE＝∠BJF＝90°
AE＝BF
また AB // EF より平行な 2 直線間の距離は一定だから AI＝BJ がいえるので
△AEI≡△BFJ
合同な図形では対応する辺の長さは等しいから EI＝FJ
ここで四角形 AIJB は長方形になるから IJ＝AB＝2 cm
よって EI＝FJ＝(4－2)÷2＝1 cm
△AEI において
三平方の定理より
$AI^2=AE^2-EI^2=3^2-1^2=8$
AI＞0 より
$AI=2\sqrt{2}$ cm
したがって△AIF において
三平方の定理より
$AF^2=AI^2+IF^2=(2\sqrt{2})^2+(4-1)^2=17$ となり
AF＞0 より
$AF=\sqrt{17}$ cm
問3
辺 EA，FB，GC，HD をそれぞれ延長すると 1 点で交わる。
その点を O とする。
立体 ABCD－EFGH は正四角すい OEFGH から正四角すい OABCD を取り除いたものである。
また正四角すい OABCD と正四角すい OEFGH は相似で
相似比は AB:EF＝2:4＝1:2 だから
体積の比は $1^3:2^3=1:8$ となる。
四角形 EFGH の対角線の交点を K とすると線分 OK の長さが，正四角すい OEFGH の高さになる。
AE＝3 cm，OA:OE＝1:2 だから
OE＝3÷(2－1)×2＝6 cm
$EK=\frac{1}{2}EG=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}EF=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times4=2\sqrt{2}$ cm
△OEK において
三平方の定理より
$OK^2=OE^2-EK^2=6^2-(2\sqrt{2})^2=28$
OK＞0 より
$OK=2\sqrt{7}$ cm
正四角すい OEFGH の体積は
$\frac{1}{3}\times(4\times4)\times2\sqrt{7}=\frac{32\sqrt{7}}{3}$ cm^3
立体 ABCD－EFGH と正四角すい OEFGH の体積の比は
(8－1):8＝7:8
よって立体 ABCD－EFGH の体積は
$\frac{32\sqrt{7}}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{28\sqrt{7}}{3}$ cm^3

【問 14】

右の図のように，縦 12 cm の長方形の紙に半径 12 cm，中心角 90° のおうぎ形がかかれている。このおうぎ形を側面とする円錐の展開図を完成させるために，底面の円をかき加える。

このとき，次の問いに答えよ。

（福井県　2017 年度）



問1　底面の半径を求めよ。

問2　長方形の横の長さを最も短くするために，底面をかき加える位置を工夫して，展開図を完成させた。このときの横の長さを求めよ。

解答欄

問1	cm
問2	cm

解答

問1　3 cm

問2　15 cm

解説

問1

底面の半径を r cm とする。

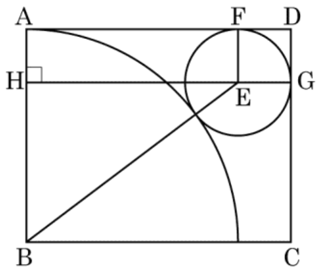
円錐の展開図では側面のおうぎ形の弧の長さと底面の円の周の長さは等しくなるから

$$2\pi \times 12 \times \frac{90}{360} = 2\pi r$$

$2\pi r = 6\pi$

$r = 3$

問2



長方形の横の長さを最も短くするときの円錐の展開図は右の図のようになる。

このとき円の接線はその接点を通る半径に垂直であるから

$\mathrm{EF} \perp \mathrm{AD}$，$\mathrm{EG} \perp \mathrm{CD}$

よって四角形 DFEG は正方形だから FD＝EG＝3 cm

点 E から辺 AB に垂線 EH をひくと四角形 AHEF は長方形だから

AH＝FE＝3 cm

また△BEH において

三平方の定理より

$\mathrm{HE}^2 = \mathrm{BE}^2 - \mathrm{BH}^2 = (12+3)^2 - (12-3)^2 = 144$

HE＞0 より

HE＝12 cm

したがって AF＝HE＝12 cm だから

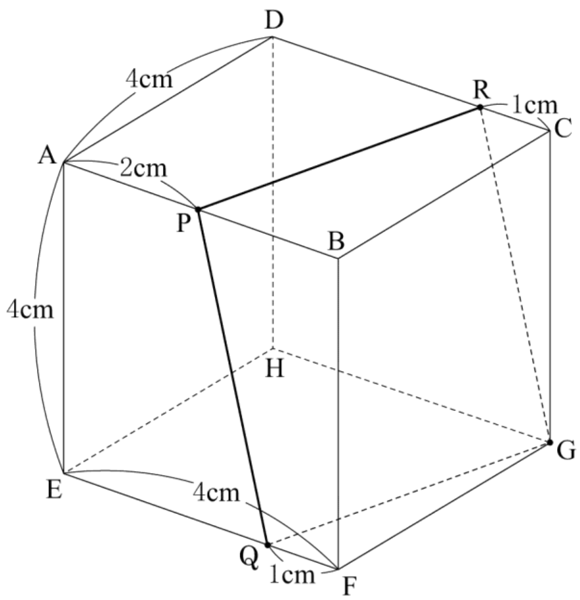
AD＝AF＋FD＝12＋3＝15 cm

【問 15】

一辺の長さが 4 cm の立方体 ABCD－EFGH において，点 P は辺 AB の中点である。また，点 Q，R はそれぞれ辺 EF，DC 上の点であり，FQ＝1 cm，CR＝1 cm である。

このとき，4 点 P，Q，G，R は同じ平面上にある。次の問1～問5に答えなさい。

（山梨県　2017 年度）



問1　線分 PQ の長さを求めなさい。

問2　次のア～エの三角形の中に直角三角形が 1 つだけある。その記号を書きなさい。

ア　△PQR　　イ　△PBG　　ウ　△PQG　　エ　△PBR

問3　線分 PG の長さを求めなさい。

問4　△QGR の面積を求めなさい。

問5　4 点 B，Q，G，R を頂点とする三角錐の体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	
問3	cm
問4	cm^2
問5	cm^3

解答
問1　$\sqrt{17}$ cm
問2　イ
問3　6 cm
問4　$6\sqrt{2}$ cm^2
問5　$\dfrac{16}{3}$ cm^3
解説
問1
点 Q から辺 AB に垂線 QS をひきその交点を S とする。
△PQS において
三平方の定理より $PQ^2=PS^2+SQ^2=(2-1)^2+4^2=1^2+4^2=17$
よって PQ＞0 より
$PQ=\sqrt{17}$ cm
問2
$QG=GR=RP=PQ=\sqrt{17}$ cm
$PG^2=PB^2+BF^2+FG^2=2^2+4^2+4^2=36$
PG＞0 より PG＝6 cm
QR＝ED より
$QR^2=ED^2=EA^2+AD^2=4^2+4^2=32$
QR＞0 より $QR=4\sqrt{2}$ cm
よって四角形 PQGR はひし形であることがわかる。
アの△PQR とウの△PQG は直角三角形でない。
エの△PBR は 3 辺の長さが $\sqrt{17}$ cm，$\sqrt{17}$ cm，2 cm の二等辺三角形であり直角三角形でない。
イの△PBG は PB と面 BFGC が垂直だから PB⊥BG より直角三角形である。
問3
問2より PG＝6 cm
問4
問2より $QG=GR=\sqrt{17}$ cm，$QR=4\sqrt{2}$ cm だから△QGR は二等辺三角形である。
点 G から辺 QR に垂線 GT をひく。
△GQT と△GRT において∠GTQ＝∠GTR＝90°，GQ＝GR，GT＝GT より
直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいから△GQT≡△GRT
このことから $QT=RT=\dfrac{1}{2}QR=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ cm
△GQT において三平方の定理より $GT^2=GQ^2-QT^2=(\sqrt{17})^2-(2\sqrt{2})^2=17-8=9$
よって GT＝3 cm
したがって△QGR の面積は $\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3=6\sqrt{2}$ cm^2
問5
三角錐 B－QGR の体積は四角錐 B－PQGR の体積の $\dfrac{1}{2}$ なので
まず四角錐 B－PQGR の体積を求める。
立方体 ABCD－EFGH を 4 点 P，Q，G，R を通る平面で 2 つの立体に分けたとき
点 B を含む方の立体は
三角柱 BCS－FGQ，四角錐 Q－CRPS，三角錐 C－GQR の 3 つの立体を合わせたものになるから
$\left(\dfrac{1}{2}\times1\times4\right)\times4+\dfrac{1}{3}\times(1\times4)\times4+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times4\right)\times4=8+\dfrac{16}{3}+\dfrac{8}{3}=16$ cm^3
この体積から三角錐 B－FGQ と三角錐 G－BCR の体積を取り除くと四角錐 B－PQGR の体積になる。
よって四角錐 B－PQGR の体積は $16-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times4\right)\times4-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times1\times4\right)\times4=\dfrac{32}{3}$ cm^3
したがって求める立体の体積は $\dfrac{32}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{16}{3}$ cm^3

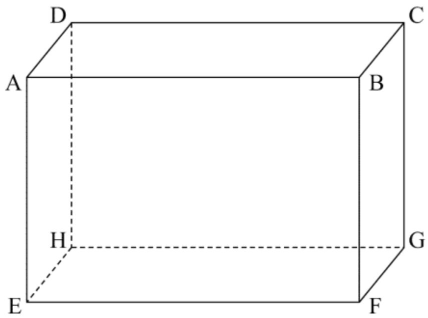
【問 16】

図3の立体は，AB＝6 cm，AD＝2 cm，AE＝4 cm の直方体である。このとき，次の問1～問3に答えなさい。

（静岡県　2017 年度）

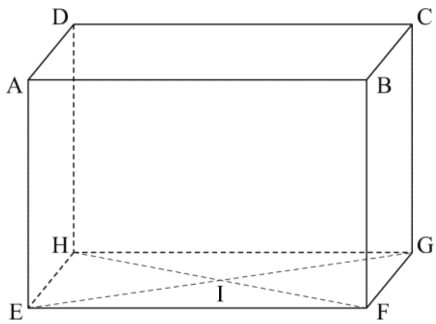
問1　辺 AB とねじれの位置にあり，面 ABCD と平行である辺はどれか。すべて答えなさい。

図3



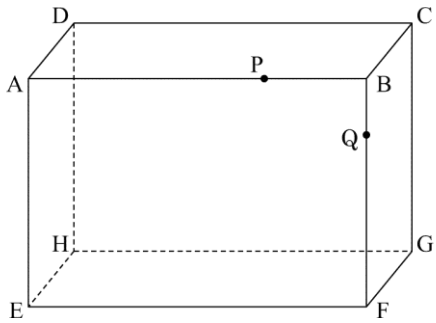
問2　この直方体において，図4のように，面 EFGH の対角線 EG，HF の交点を I とする。△DHI を，辺 DH を軸として 1 回転させてできる円すいの母線の長さを求めなさい。

図4



問3　この直方体において，図5のように，辺 AB，BF 上の点をそれぞれ P，Q とする。DP＋PQ＋QG が最小となるときの，三角すい BPQC の体積を求めなさい。

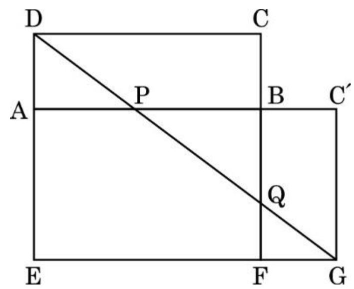
図5



解答欄

問1	
問2	cm
問3	cm^3

解答
問1　辺 EH, 辺 FG
問2　$\sqrt{26}$ cm
問3　$\dfrac{25}{9}$ cm^3
解説
問1
辺 AB とねじれの位置にある辺は辺 CG, DH, EH, FG である。
このうち面 ABCD と平行である辺は辺 EH, FG
問2
この円すいの母線の長さは線分 DI の長さと等しい。
DI の長さは∠DHI＝90° より
△DHI において
三平方の定理より $DI^2=DH^2+HI^2$ が成り立つ。
ここで△EFH において
三平方の定理より
$2^2+6^2=HF^2$
$HF^2=40$
HF＞0 だから
$HF=2\sqrt{10}$ cm
よって $HI=\dfrac{1}{2}HF=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}=\sqrt{10}$ cm
したがって $DI^2=4^2+(\sqrt{10})^2=26$ となるから
DI＞0 より
$DI=\sqrt{26}$ cm
問3
右の図のように直方体の展開図の一部をかいて考える。
DP＋PQ＋QG が最小となるとき 3 つの線分 DP, PQ, QG は
右の図の線分 DG と重なる。
右の図において DE＝2＋4＝6 cm　EG＝6＋2＝8 cm となる。
△DAP∽△DEG より
DA：DE＝AP：EG だから
AP＝a cm とすると
$2:6=a:8$
$6a=16$
$a=\dfrac{8}{3}$
よって $PB=6-\dfrac{8}{3}=\dfrac{10}{3}$ cm
また△QFG∽△DEG より QF：DE＝FG：EG だから QF＝b cm とすると
$b:6=2:8$
$8b=12$
$b=\dfrac{3}{2}$
よって $BQ=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$ cm
図5において三角すい BPQC の底面を△BPQ とすると高さは BC となるから
三角すい BPQC の体積は $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{3}\times\dfrac{5}{2}\right)\times 2=\dfrac{25}{9}$ cm^3

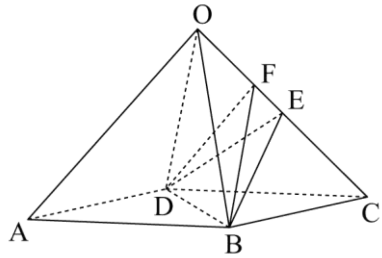


【問 17】

図で，立体 OABCD は，正方形 ABCD を底面とする正四角すいである。E は辺 OC の中点，F は辺 OC 上の点で，OF : FC＝1 : 2 である。

正四角すい OABCD のすべての辺の長さが 6 cm のとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

（愛知県 B　2017 年度）



(1) 線分 FB の長さは何 cm か，求めなさい。

(2) B，D，E，F を頂点とする三角すいの体積は何 cm^3 か，求めなさい。

解答欄

(1)	cm
(2)	cm^3

解答

(1)　$2\sqrt{7}$ cm

(2)　$3\sqrt{2}$ cm^3

解説

(1)

点 E は辺 OC の中点だから OE＝3cm

OF:FC＝1:2 より OF＝2 cm

よって EF＝1 cm

△BEF において∠BEF＝90° だから

三平方の定理より

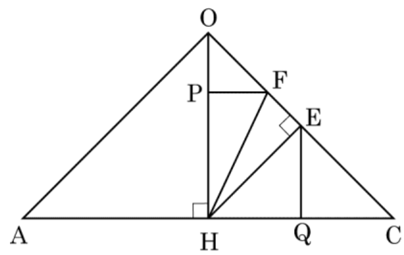
$FB^2=EF^2+BE^2=1^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=28$

FB＞0 より

FB＝ $2\sqrt{7}$ cm

(2)

点 O，点 A，点 C を通る面で切り取ると切り口は右の図のようになる。



ここで点 O から辺 AC へ垂直に引いた直線と線分 AC との交点を点 H

点 F から線分 OH へ垂直に引いた直線と線分 OH との交点を点 P

また点 E から線分 CH へ垂直に引いた直線と線分 CH との交点を点 Q

とする。

このとき AC＝ $6\sqrt{2}$ cm で HC＝HA＝ $3\sqrt{2}$ cm　OC＝6 cm だから

$OH^2=6^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$

OH＞0 より

OH＝ $3\sqrt{2}$ cm

OF:FC＝1:2 より

PF:HC＝OF:OC だから

PF: $3\sqrt{2}$ ＝1:3

PF＝ $\sqrt{2}$ cm

また中点連結定理より

$EQ=3\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ cm

B, D, E, F を頂点とする三角すいの体積は

三角すい ODBC の体積から三角すい FODB と三角すい EDBC の体積を引けば求められる。

よって

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BC\times DC\times OH-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times OH\times DB\times FP-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BC\times DC\times EQ$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times3\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times6\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$=18\sqrt{2}-6\sqrt{2}-9\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}$ cm^3

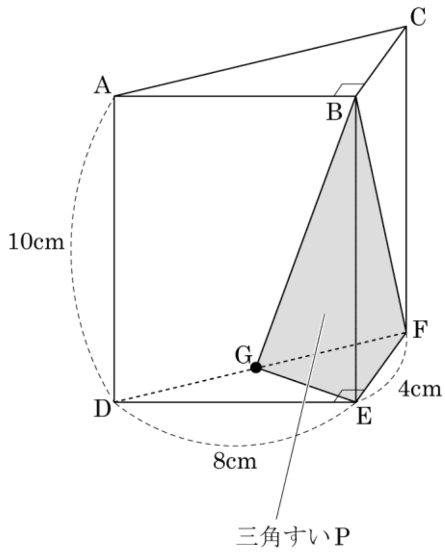
【問 18】

右の図のように，点 A, B, C, D, E, F を頂点とし，∠DEF＝90° の直角三角形 DEF を底面の 1 つとする三角柱がある。辺 DF の中点を G とし，4 点 B, E, F, G を結んで三角すい P をつくる。

辺 DE の長さが 8 cm，辺 EF の長さが 4 cm，辺 AD の長さが 10 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

なお，各問いにおいて，答えの分母に $\sqrt{\ }$ がふくまれるときは，分母を有理化しなさい。また，$\sqrt{\ }$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。

（三重県　2017 年度）



(1) 三角すい P の体積を求めなさい。

(2) 三角すい P の辺 BG の長さを求めなさい。

解答欄

(1)	cm^3
(2)	cm

解答

(1) $\dfrac{80}{3}\,\mathrm{cm}^3$

(2) $2\sqrt{30}$ cm

解説

(1)

点 G が辺 DF の中点なので△EGF の面積は△FDE の面積の半分になる。

よって求める体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 8\times 4\times\dfrac{1}{2}\times 10=\dfrac{80}{3}\,\mathrm{cm}^3$

(2)

点 G を通り辺 EF に平行な直線と辺 DE との交点を H とすると中点連結定理より

GH＝2 cm，EH＝4 cm

よって△GHE において∠GHE＝90° だから

三平方の定理より $\mathrm{GE}^2=2^2+4^2=20$

また∠BEG＝90° だから

$\mathrm{BG}^2=\mathrm{GE}^2+\mathrm{BE}^2$ より

$\mathrm{BG}^2=20+100=120$

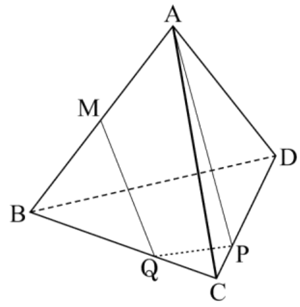
BG＞0 より $\mathrm{BG}=2\sqrt{30}$ cm

【問 19】

右の図のような，1 辺の長さが 5 cm の正四面体 ABCD があり，辺 AB の中点を M とする。また，2 点 P，Q をそれぞれ辺 CD，BC 上に，3 つの線分 AP，PQ，QM の長さの和 AP＋PQ＋QM が最短となるようにとる。

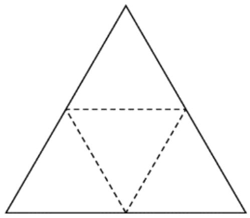
このとき，次の問1～問3に答えよ。

（京都府　2017 年度　前期）

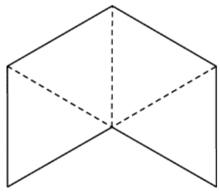


問1　正四面体の展開図として適当でないものを，次の(ア)～(ウ)から 1 つ選べ。

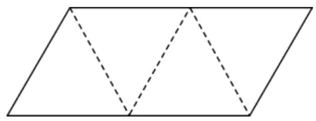
(ア)



(イ)



(ウ)



問2　AP＋PQ＋QM を求めよ。

問3　正四面体 ABCD と四面体 MQCP の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

解答欄

問1	
問2	cm
問3	正四面体 ABCD：四面体 MQCP＝　　：

解答

問1　イ

問2　$\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$ cm

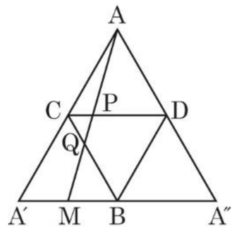
問3　正四面体 ABCD：四面体 MQCP＝24：1

解説

問1

正四面体の展開図は(ア)と(ウ)の 2 種類しかない。

問2



右の図のように正四面体 ABCD の問1の(ア)の展開図にかいて考える。

AP＋PQ＋QM が最短となるとき 3 つの線分 AP，PQ，QM は

右の図の線分 AM と重なる。

△AA′A″ は 1 辺の長さが 5×2＝10 cm の正三角形だから

△AA′B は 30°，60°，90°の直角三角形になるので AA′：AB＝2：$\sqrt{3}$

よって 10：AB＝2：$\sqrt{3}$ より

AB＝$5\sqrt{3}$ cm

BM＝5÷2＝$\dfrac{5}{2}$ cm だから

AP＋PQ＋QM＝y cm とすると

三平方の定理より

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+(5\sqrt{3})^2=y^2$

$y^2=\dfrac{325}{4}$

$y>0$ だから

$y=\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$

問3

右上の図で CD // A′A″ より AP：PM＝AC：CA′＝1：1 だから CP＝$\dfrac{1}{2}$ A′M＝$\dfrac{1}{4}$ CD

また△CQP∽△BQM だから CQ：BQ＝CP：BM＝CP：A′M＝1：2

よって　CQ＝$\dfrac{1}{3}$ BC

△BCD＝S とすると

△QCP＝$\dfrac{1}{4}$△QCD＝$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}$△BCD＝$\dfrac{1}{12}S$

ここで正四面体 ABCD において点 A と△BCD の距離を h とすると点 M は辺 AB の中点だから

点 M と△BCD の距離は $\dfrac{1}{2}h$ と表される。

よって正四面体 ABCD と四面体 MQCP の体積の比は

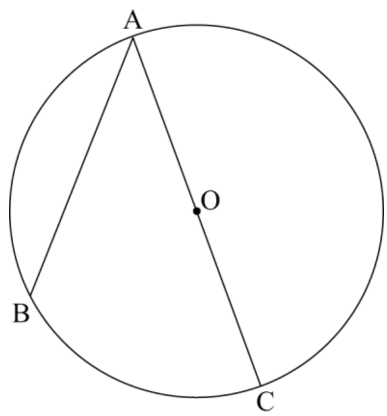
$\left(\dfrac{1}{3}\times S\times h\right):\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{12}S\times\dfrac{1}{2}h\right)=\dfrac{1}{3}Sh:\dfrac{1}{72}Sh=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{72}=24:1$

【問 20】

右の図のように，半径 6 cm の円 O の周上に 3 点 A，B，C があり，AC は円 O の直径である。また，AB＝9 cm である。

このとき，次の問1～問3に答えよ。

（京都府　2017 年度　中期）



問1　線分 BC の長さを求めよ。

問2　直線 AC を対称の軸として，点 B と線対称な点を D とするとき，線分 BD の長さを求めよ。

問3　△ABC を，直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積は，半径 6 cm の球の体積の何倍か求めよ。

解答欄

問1	cm
問2	cm
問3	倍

解答
問1　$3\sqrt{7}$ cm
問2　$\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$ cm
問3　$\dfrac{63}{128}$ 倍
解説
問1
半円の弧に対する円周角は直角であるから∠ABC＝90°
△ABC において
三平方の定理より
$9^2+BC^2=(6+6)^2$
$BC^2=12^2-9^2$
$BC^2=63$
BC＞0 だから
$BC=3\sqrt{7}$ cm
問2
条件より BD⊥AC である。
また線分 BD と直線 AC との交点を E とすると BE＝DE となる。
△ABC と△AEB において∠ABC＝∠AEB＝90°，∠BAC＝∠EAB より
2 組の角がそれぞれ等しいから
△ABC∽△AEB
このことから
AC : AB＝BC : EB
$12:9=3\sqrt{7}:EB$
$12EB=27\sqrt{7}$
$EB=\dfrac{9\sqrt{7}}{4}$
よって $DE=BE=\dfrac{9\sqrt{7}}{4}$ cm だから
$BD=BE+DE=\dfrac{9\sqrt{7}}{4}+\dfrac{9\sqrt{7}}{4}=\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$ cm
問3 △ABC＝△ABE＋△CBE より，
△ABC を直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積は
△ABE を直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積と
△CBE を直線 AC を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積の和になる。
よって AE＝x cm とすると
$$\frac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\frac{9\sqrt{7}}{4}\right)^2\right\}\times x+\frac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\frac{9\sqrt{7}}{4}\right)^2\right\}\times(12-x)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\frac{9\sqrt{7}}{4}\right)^2\right\}\times\{x+(12-x)\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left\{\pi\times\left(\frac{9\sqrt{7}}{4}\right)^2\right\}\times 12$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{567}{16}\pi\times 12$$
$$=\frac{567}{4}\pi\ \ \mathrm{cm}^3$$
半径 6 cm の球の体積は
$$\frac{4}{3}\pi\times 6^3=288\pi\ \ \mathrm{cm}^3$$
したがって $\dfrac{567}{4}\pi\div 288\pi=\dfrac{63}{128}$ 倍

【問 21】

図1～図3において，立体 ABC－DEF は三角柱である。△ABC と△DEF は合同な三角形であり，AC＝4 cm，BC＝8 cm，∠ACB＝90° である。四角形 ACFD は正方形であり，四角形 ABED，CBEF は長方形である。G は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。H は辺 EF 上の点であり，HF＝BG である。G と H とを結ぶ。BG＝HF＝x cm とし，$0<x<8$ とする。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は，根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

（大阪府　2017 年度　B）

図1

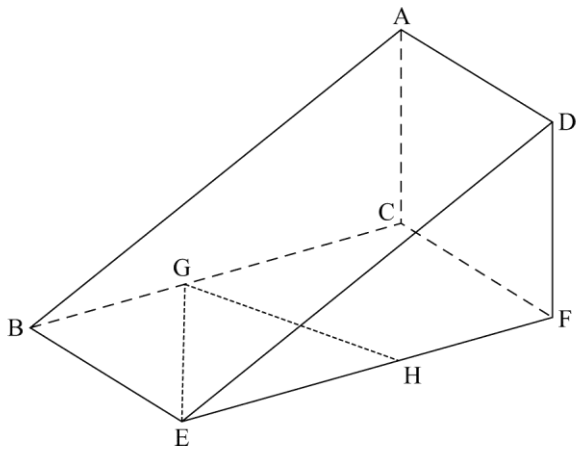


図2

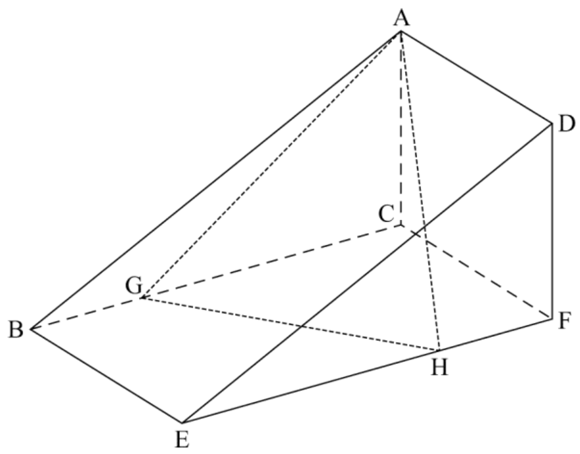
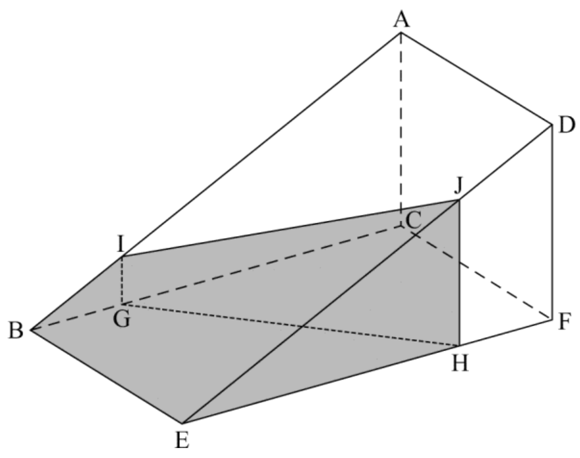


図3



問1 図1において，G と E とを結ぶ。△GEH の面積を x を用いて表しなさい。

問2 図2において，A と G，A と H とをそれぞれ結ぶ。AG＝AH である。

(1) x の値を求めなさい。求め方も書くこと。

(2) △AGH の面積を求めなさい。

問3 図3において，$x=2$ である。I は G を通り辺 AC に平行な直線と辺 AB との交点であり，J は H を通り辺 DF に平行な直線と辺 DE との交点である。I と J とを結ぶ。このとき，4 点 I，G，H，J は同じ平面上にあって，直線 IG，直線 JH はともに平面 CBEF と垂直である。立体 BE－IGHJ の体積を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">cm^2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">問2</td><td>(1)</td><td>〔求め方〕

xの値</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>問3</td><td colspan="2">cm^3</td></tr>
</table>

解答

問1　$2(8-x)$ cm^2

問2

(1)

〔求め方〕

BG＝x cm だから

CG＝$8-x$ cm

∠ACG＝90°　だから

AG^2＝AC^2＋CG^2…㋐

∠ACH＝90°　だから

AH^2＝AC^2＋CH^2…㋑

∠CFH＝90°　だから

CH^2＝CF^2＋FH^2…㋒

㋑，㋒より

AH^2＝AC^2＋CF^2＋FH^2…㋓

AG＝AH だから

㋐，㋓より

AC^2＋CG^2＝AC^2＋CF^2＋FH^2

よって CG^2＝CF^2＋FH^2

よって$(8-x)^2=4^2+x^2$

これを解くと

$x=3$

x の値　3

(2)　$6\sqrt{5}$ cm^2

問3　$\dfrac{52}{3}$cm^3

解説

問1

辺 EH を底辺と考えると高さは辺 BE になる。

EH＝EF－HF＝8－x cm

よって BE＝4 cm だから△GEH＝$\frac{1}{2}\times(8-x)\times4=2(8-x$ cm^2

問2

(1)

△AGC において∠ACG＝90°だから

三平方の定理より $AG^2=AC^2+GC^2=4^2+(8-x)^2$

また△AHF において∠AFH＝90°だから

三平方の定理より $AH^2=AF^2+HF^2$

ここで辺 AF は 1 辺 4 cm の正方形の対角線なので AF＝$4\sqrt{2}$ cm となるから

$AH^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+x^2$

AG＝AH より

$AG^2=AH^2$ だから

$4^2+(8-x)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+x^2$

整理すると $x=3$

(2)

点 G を通り辺 BE に平行な直線と辺 EF との交点を P とすると∠GPH＝90°だから

三平方の定理より $GH^2=GP^2+PH^2=4^2+(8-2\times3)^2=20$

GH＞0 より GH＝$2\sqrt{5}$ cm

また $AG^2=4^2+5^2=41$

AG＞0 より AG＝$\sqrt{41}$ cm

よって△AGH は 3 辺の長さが $\sqrt{41}$ cm，$\sqrt{41}$ cm，$2\sqrt{5}$ cm の二等辺三角形になるので

辺 GH を底辺と見たとき高さ p は

$p^2=\left(\sqrt{41}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=36$

$p>0$ より

$p=6$ cm

よって△AGH＝$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times6=6\sqrt{5}$ cm^2

問3

点 I, G, E を通る面で切ると①底面が△BEG，高さ IG の三角すいと

②底面が四角形 IGHJ，高さが辺 GH と点 E の距離の四角すいに分けられる。

①…BG：GI＝BC：CA より 2：GI＝8：4 となるから GI＝1 cm

よって三角すいの体積は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times1=\frac{4}{3}$ cm^3

②…点 G を通り，辺 BE に平行な直線と EF との交点を Q とすると∠GQH＝90°　だから

三平方の定理より $GH^2=GQ^2+QH^2=4^2+(8-2\times2)^2=32$

GH＞0 より

GH＝$4\sqrt{2}$ cm

また△GEH において

△GEH＝$\frac{1}{2}\times6\times4=12$ cm^2 になるので辺 GH を底辺と見たとき高さ q は

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times q=12$ となり $q=3\sqrt{2}$ cm

EH：HJ＝EF：FD より 6：HJ＝8：4 となるから HJ＝3 cm

よって四角すいの体積は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+3)\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=16$ cm^3

したがって $\frac{4}{3}+16=\frac{52}{3}$ cm^3

【問 22】

図1～図3において，立体 ABC－DEF は三角柱である。△ABC と△DEF は合同な三角形であり，AC＝4 cm，BC＝8 cm，∠ACB＝90° である。四角形 ACFD は正方形であり，四角形 ABED，CBEF は長方形である。G は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。H は辺 EF 上の点であり，HF＝BG である。G と H とを結ぶ。

次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ数になる場合は，根号の中をできるだけ小さい自然数にすること。

（大阪府　2017 年度　C）

問1　図1において，I は H を通り辺 DF に平行な直線と辺 DE との交点である。

BG＝HF＝x cm とし，$0<x<8$ とする。

(1) 線分 IH の長さを x を用いて表しなさい。

(2) 四角形 CGHF の面積が四角形 IHFD の面積の 2 倍であるときの x の値を求めなさい。

問2　図2において，A と G，A と H とをそれぞれ結ぶ。AG＝AH である。△AGH の面積を求めなさい。

問3　図3において，BG＝HF＝2 cm である。C と H とを結ぶ。J は直線 AC 上にあって A について C と反対側にある点であり，JA＝2 cm である。J と G，J と H とをそれぞれ結ぶ。K は，線分 JG と辺 AB との交点である。L は，線分 JH と平面 ABED との交点である。M は，L を通り辺 AD に平行な直線と辺 AB との交点である。このとき，直線 LM は平面 ABC と垂直である。A と L，K と L とをそれぞれ結ぶ。

(1) 線分 LM の長さを求めなさい。

(2) 立体 AKL－CGH の体積を求めなさい。

図1

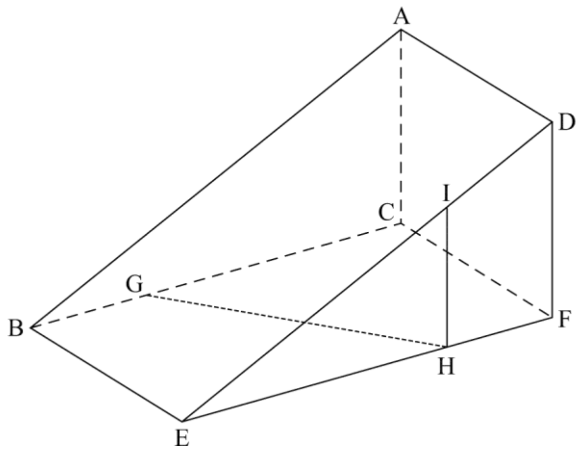


図2

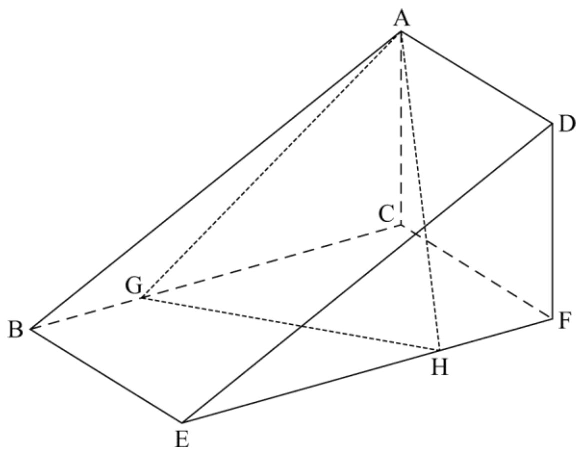
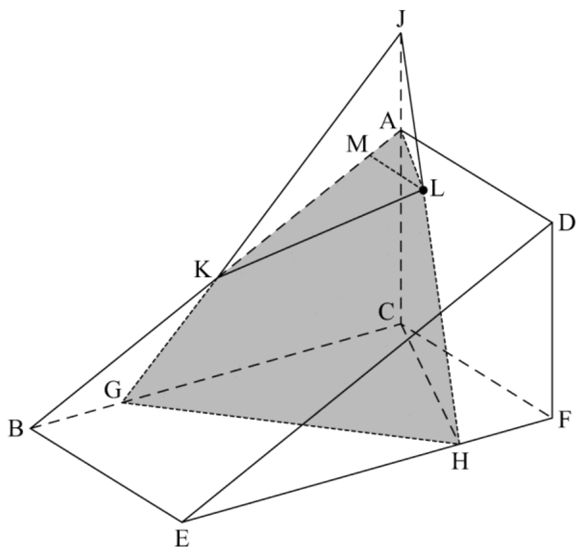


図3



解答欄

問1	(1)	cm
	(2)	
問2		cm^2
問3	(1)	cm
	(2)	cm^3

解答
問1
(1) $\dfrac{8-x}{2}$ cm
(2) $8-4\sqrt{2}$
問2 $6\sqrt{5}$ cm^2
問3
(1) $\dfrac{8}{5}$ cm
(2) $\dfrac{328}{15}$ cm^3

解説
問1
(1)
$\triangle$DEF において IH // DF となるから平行線と線分の比の関係より
EF : DF = EH : IH
EH = EF − HF = 8 − x となるから
8 : 4 = (8 − x) : IH
IH = $\dfrac{8-x}{2}$ cm
(2)
四角形 CGHF = $\dfrac{1}{2}\times\{x+(8-x)\}\times 4=16$
四角形 IHFD = $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{8-x}{2}+4\right)\times x=\dfrac{16x-x^2}{4}$
四角形 CGHF の面積が四角形 IHFD の面積の 2 倍なので
$16=\dfrac{16x-x^2}{4}\times 2$
整理すると
$x^2-16x+32=0$
解の公式より
$x=\dfrac{-(-16)\pm\sqrt{16^2-4\times1\times32}}{2\times1}=8\pm4\sqrt{2}$
$0<x<8$ より
$x=8-4\sqrt{2}$ cm
問2
AG = AH となるときの x の値を求める。
$\triangle$AGC において $\angle$ACG = 90° だから
三平方の定理より $AG^2=AC^2+GC^2=4^2+(8-x)^2$
また $\triangle$AHF において $\angle$AFH = 90° だから
三平方の定理より $AH^2=AF^2+HF^2$
ここで辺 AF は 1 辺 4cm の正方形の対角線なので AF = $4\sqrt{2}$ cm となるから
$AH^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+x^2$
AG = AH より
$4^2+(8-x)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+x^2$
整理すると
$x=3$
次に点 G を通り辺 BE に平行な直線と EF との交点を P とすると $\angle$GPH = 90° だから
三平方の定理より $GH^2=GP^2+PH^2=4^2+(8-2\times3)^2=20$
GH > 0 より
GH = $2\sqrt{5}$ cm
また $AG^2=4^2+5^2=41$
AG > 0 より
AG = $\sqrt{41}$ cm
よって $\triangle$AGH は $\sqrt{41}$ cm, $\sqrt{41}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm の二等辺三角形になるので高さ h は
$h^2=\left(\sqrt{41}\right)^2-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=36$
$h>0$ より
$h=6$ cm
よって $\triangle$AGH = $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times6=6\sqrt{5}$ cm^2

解説

問3

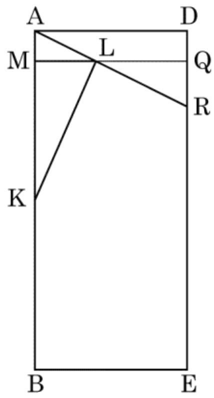
図3を 3 つの方向から見た図をぞれぞれかくと下の図ア，図イ，図ウのようになる。

図中の点 Q は ML を L のほうにのばし辺 ED との交点，点 R は AL を L の方にのばし辺 ED との交点とする。

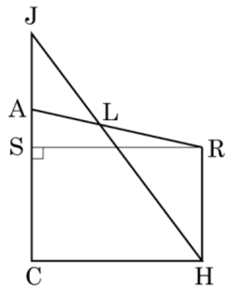
また点 S は点 R から辺 AC に引いた垂線との交点，点 T は点 G を通り辺 AC に平行な線と辺 AB との交点

点 U は点 K を通り辺 BC に平行な線と辺 AC との交点とする。

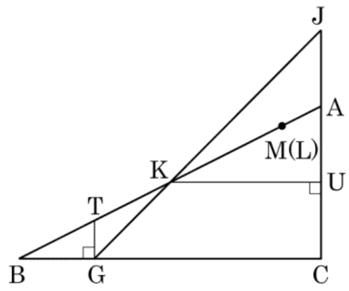
図ア



図イ



図ウ



(1)

図アにおいて AD // BE, AB // DE より△AML∽△RQL となるので AL:LM がわかれば

MQ＝AD＝4 cm より線分 LM の長さがわかる。

図3より△CHF において∠CFH＝90° となるから

三平方の定理より $CH^2=CF^2+HF^2=4^2+2^2=20$

CH＞0 より

$CH=2\sqrt{5}$ cm

点 R は問1(1)の点 I だから $RH=\dfrac{8-2}{2}=3$ cm より

図イにおいて AS＝AC－RH＝4－3＝1 cm

よって△ASR において∠ASR＝90° となるから

三平方の定理より $AR^2=AS^2+SR^2=1^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=\sqrt{21}$

また JC // RH となるから△JAL∽△HRL で相似比は AL:LR＝JA:HR＝2:3

したがって図アで LM:LQ＝AL:LR＝2:3 だから $LM=\dfrac{2}{5}AD=\dfrac{2}{5}\times4=\dfrac{8}{5}$ cm

(2)

立体 AKL－CGH の体積は三角錐 J－CGH の体積から三角錐 L－JKA の体積を引けばよい。

三角錐 J－CGH の体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times4\times6=24$ cm^3

ここで図ウより△ABC において∠ACB＝90° より

$AB^2=AC^2+BC^2=4^2+8^2=80$

AB＞0 より $AB=4\sqrt{5}$ cm

平行線と線分の関係から BG:GT＝BC:CA より 2:GT＝8:4　GT＝1 cm

△TBG において∠TGB＝90° より

$TB^2=TG^2+BG^2=1^2+2^2=5$

TB＞0 より

$TB=\sqrt{5}$ cm

よって $AT=4\sqrt{5}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ で AK:KT＝JA:GT＝2:1 だから $AK=\dfrac{2}{3}AT=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ cm

平行線と線分の関係から JG：GC＝JK:KU より 3:6＝2:KU で KU＝4 cm

よって三角錐 L－JKA の体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{32}{15}$ cm^3 となるから

立体 AKL－CGH の体積は $24-\dfrac{32}{15}=\dfrac{328}{15}$ cm^3

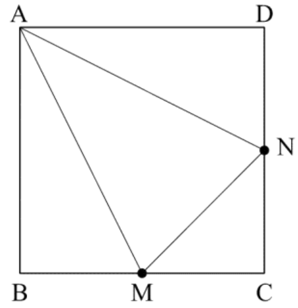
【問 23】

右の図1のような一辺の長さが 4 cm の正方形の折り紙 ABCD がある。辺 BC，CD の中点をそれぞれ M，N とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

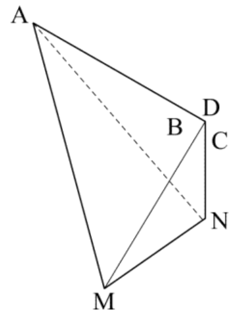
（鳥取県　2017 年度）

図1



問1 線分 AM を折り目として折り返したとき，点 B が折り紙と重なる点を P とする。このとき，点 P を作図しなさい。ただし，作図に用いた線は消さずに残しておきなさい。

図2



問2 線分 AM の長さを求めなさい。

問3 右の図2のように，図1の線分 AM，MN，AN で折り，3 点 B，C，D が 1 点で重なる三角錐をつくった。この三角錐は，下の図3のように，一辺の長さが 4 cm の立方体の一部と一致した。この立方体の展開図が，下の図4のようであるとき，線分 AN，線分 MN をそれぞれかきなさい。ただし，図4の点線は，この立方体の各辺の中点を結んでできる線分を表している。

図3

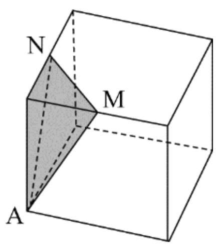
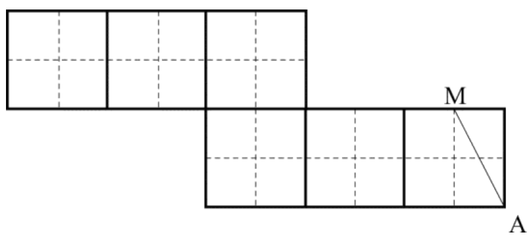
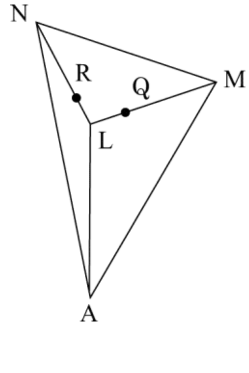


図4

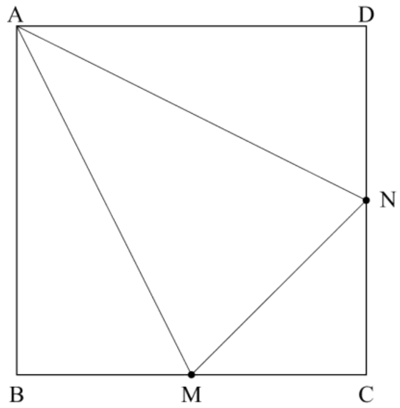
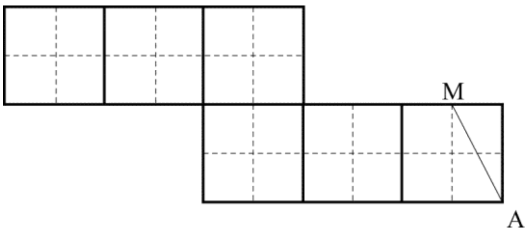


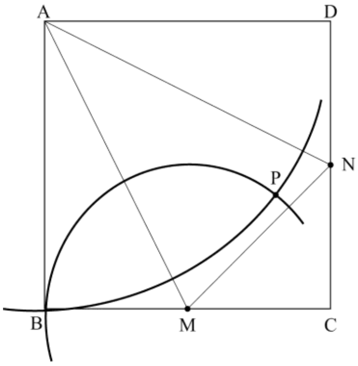
問4 右の図5のように，図2の三角錐の 3 点 B，C，D が 1 点で重なった点を L とする。また，2 点 Q，R は，それぞれ線分 LM，LN 上の点で，2 点 M，N からそれぞれ a cm はなれている。この三角錐を，2 点 Q，R を通り線分 AL に平行な平面で切ったときの切り口の面積を，a を用いて表しなさい。ただし，$0 < a < 2$ とする。

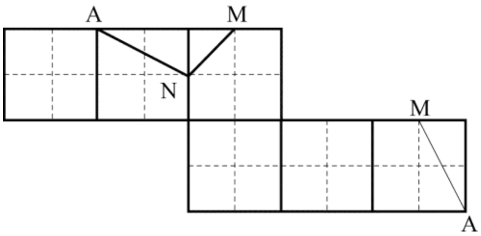
図5



解答欄

問1	
問2	AM＝　　　　　　cm
問3	
問4	cm^2

解答
問1


問2　AM＝$2\sqrt{5}$ cm
問3


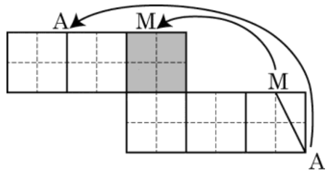
問4　$4\sqrt{2}a-2\sqrt{2}a^2$ cm^2
解説
問1
点 P は点 B を線分 AM を対称の軸として対称移動した点になる。
よって点 A を中心とし半径の長さが辺 AB の長さと等しい円と
点 M を中心とし半径の長さが線分 BM の長さと等しい円をかきその交点が P となる。
問2
点 M は辺 BC の中点なので BM＝2 cm　∠ABM＝90° だから
三平方の定理より
$AM^2=4^2+2^2=20$
AM＞0 より
AM＝$2\sqrt{5}$ cm
問3


図4の展開図で線分 AM がかかれている面が手前にくるようにおると
右の図のように点 M と点 A と重なる点がわかる。
このとき色をつけた面が図3で一番上にある面になるので
この面に線分 MN をかく。
線分 AN がかかれる面を考えると点 N の位置は解答のようになり
それぞれの線分をかくことができる。
問4
点 Q を通り線分 AL に平行な線をひき辺 AM との交点を S とおく。
このとき求める切り口は縦 QS，横 QR の長方形となるので線分 QS，線分 QR の長さをそれぞれ求める。
まず△LMN は LM＝LN，∠NLM＝90° の直角二等辺三角形になるから MN＝$2\sqrt{2}$ cm
また△LRQ も LQ＝LR，∠RLQ＝90° の直角二等辺三角形になるから LQ：QR＝LM：MN がいえる。
よって$(2-a)$：QR＝2：$2\sqrt{2}$
QR＝$(2-a)\sqrt{2}$ cm
次に△MLA において MQ：QS＝ML：LA がいえるので
a：QS＝2：4
QS＝$2a$
したがって求める面積は $2a\times(2-a)\sqrt{2}=4\sqrt{2}a-2\sqrt{2}a^2$ cm^2

【問 24】

時計の歴史は古く，太陽の光を利用した日時計や，水の流れを利用した水時計が，紀元前から使われていたことが知られている。現在では，デジタル方式やアナログ方式によって時刻を表示する時計がある。

次の問1～問3に答えなさい。

（山口県　2017 年度）

問1　図1のデジタル時計は，図2のように置かれた 7 個の LED (発光ダイオード) が個別に点灯したり消灯したりすることで 0 から 9 までの数を表し，時刻を表示する。

表1は，0 から 9 までのそれぞれの数について，LED によって表される数字と点灯している LED の個数をまとめたものである。

図1

図2

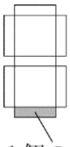


表1

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
LEDによって表される数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
点灯しているLEDの個数(個)	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

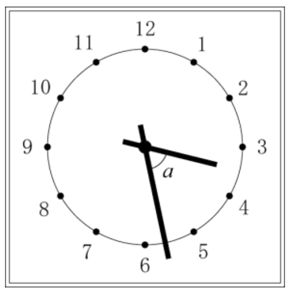
※ ▌は点灯しているLED，⁞は消灯しているLEDを表している。

このデジタル時計では，「分」について，0 分から 59 分を，00，01，02，03，…，59 のように 2 つの数字で表示し，点灯している LED の個数は，例えば，3 分の場合，03 と表示するので，あわせて 11 個となる。2 つの数字で 0 分から 59 分を表示するとき，点灯している LED の個数があわせて 9 個になる場合は何通りあるか。求めなさい。

問2　図3のように，円周を 12 等分する点にそれぞれ 1 から 12 の数字が書かれている文字盤をもち，長針と短針からなるアナログ時計がある。

この時計の長針と短針がそれぞれ一定の速さで動き，ちょうど 3 時 28 分を示すとき，長針と短針のつくる角 (図3中の $\angle a$) の大きさを求めなさい。

図3



問3　日時計とは，物体に太陽の光があたってできる影をもとに，時刻を知ることができる装置である。

校庭に立っているポールなどの影の向きや長さは，季節や時刻によって変化する。表2は，水平な校庭に，垂直に立つポールの影の向きと，太陽の高度を，ある日の午前 9 時と午後 3 時 30 分に測定してまとめたものである。

図4は，表2をもとに，ポールの先端を A，ポールの根元を B，午前 9 時にできた影の先端を C，午後 3 時 30 分にできた影の先端を D として示している。

2 つの地点 C，D 間の距離が 20 m であるとき，ポールの高さ AB を求めなさい。

図4

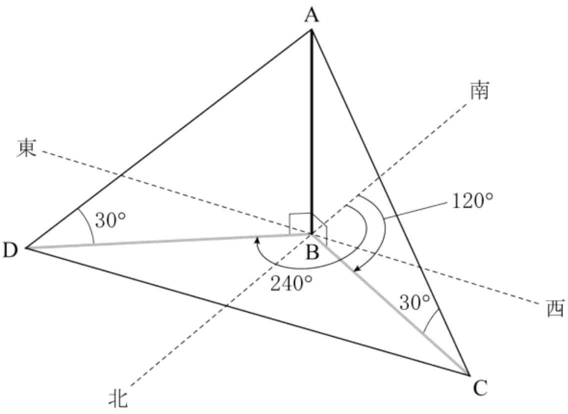


表2

時　刻	午前 9 時	午後 3 時 30 分
影 の 向 き	120°	240°
太陽の高度	30°	30°

※「影の向き」は，ポールの根元を中心に，南の向きを 0° として，西，北，東とまわる向きに測った影までの角度を示している。

解答欄

問1	通り
問2	度
問3	m

解答
問1　8 通り
問2　64 度
問3　$\dfrac{20}{3}$ m
解説
問1
07, 18, 24, 34, 42, 43, 45, 54 の 8 通り
問2
長針は 1 時間に 1 周するから 60 分間に 360° 動くことになる。
よって 1 分間に 360° ÷60＝6° 動くから 3 時 00 分から 3 時 28 分までの 28 分間に 6° ×28＝168° 動く。
短針は 12 時間に 1 周するから 1 時間に 360° ÷12＝30° 動く。
60 分間に 30° 動くことになるから 1 分間に 30° ÷60＝0.5° 動く。
12 時 00 分 (0 時 00 分) から 3 時 00 分までの 3 時間に 30° ×3＝90° 動く。
3 時 00 分から 3 時 28 分までの 28 分間に 0.5° ×28＝14° 動く。
よって合計で 90° ＋14° ＝104° 動くことになる。
したがって∠a＝168° －104° ＝64°
問3
△ABC, △ABD はどちらも 3 つの角が, 90° , 30° , 60° の直角三角形だから
BC＝$\sqrt{3}$ AB, BD＝$\sqrt{3}$ AB
よって△BCD は BC＝BD の二等辺三角形で∠CBD＝240° －120° ＝120° だから
∠BCD＝∠BDC＝(180° －120°)÷2＝30°
点 B から辺 CD にをひきその交点を E とすると
△BCE と△BDE は 3 つの角が 90° , 30° , 60° の直角三角形となる。
また△BCE≡△BDE だから
CE＝DE＝$\dfrac{1}{2}$ CD＝$\dfrac{1}{2}$ ×20＝10 m
BC＝$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ CE＝$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ×10＝$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ m
△ABC は 3 つの角が 90° , 30° , 60° の直角三角形だから
AB＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ BC＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ × $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ ＝ $\dfrac{20}{3}$ m

【問 25】

さとしさんは，めだかを飼うために水槽などを準備した。問1～問3に答えなさい。ただし，それぞれの水槽は，水平な台の上に置くと考え，水槽の厚さは考えないものとする。

（徳島県　2017 年度）

問1　さとしさんは，めだかを飼う水を準備するために，水道水から消毒剤を抜くことにした。消毒剤を抜くための中和剤の使用説明書を見ると，水 56 L に対して中和剤を 12 mL 使用するよう書かれていた。さとしさんは水槽に 27 L の水道水を入れ，使用説明書にある割合でこの中和剤を入れた。さとしさんは中和剤を何 mL 入れたか，小数第 2 位を四捨五入して，小数第 1 位まで求めなさい。ただし，用いる文字が何を表すかを示して比例式をつくり，解く過程も書くこと。

図1

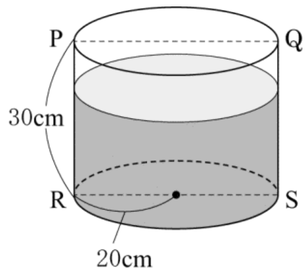


図2

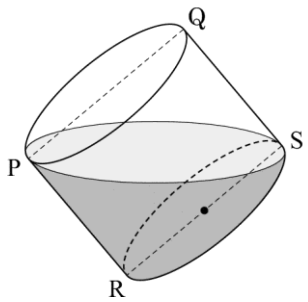
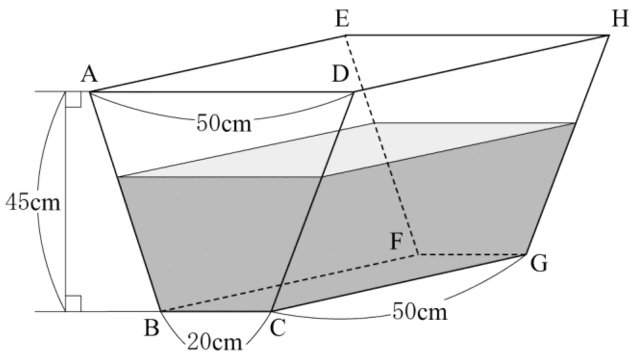


図3



問2　さとしさんは，図1のような底面の半径が 20 cm，高さが 30 cm の円柱の形をした水槽に，水 27L を入れ，めだかを飼っていた。しばらくたって，水替えをするときに，この水槽を図2のように水面がちょうど 2 点 P，S を通るところまで傾けて，水を捨てた。捨てた水の体積は何 L か，求めなさい。

ただし，線分 PQ，線分 RS は底面の円の直径で，PQ // RS である。また，円周率は π とする。

問3　さとしさんは，しばらくめだかを飼っていたが，稚魚が増えてきたので，図3のような水槽を準備した。さとしさんがインターネットで調べると，めだかを飼うには，1 匹あたり 50 cm^2 以上の水面の広さ（水と空気が接する部分の面積）が必要であることがわかった。この水槽で 40 匹のめだかを飼うためには，何 L 以上の水が必要か，求めなさい。

ただし，水槽は合同な 2 つの台形 ABCD と台形 EFGH を底面とする四角柱であり，台形 ABCD は，AD // BC，AB＝DC，AD＝50 cm，BC＝20 cm で，高さは 45 cm である。また，AE＝BF＝CG＝DH＝50 cm であるとする。

解答欄

問1	
問2	L
問3	L 以上

解答
問1
中和剤を x mL 入れたとする。
$56:12=27:x$
$56x=12\times27$
$x=5.78$
5.78…の小数第 2 位を四捨五入して 5.8 となる。
よって中和剤を 5.8 mL 入れた。
問2　$27-6\pi$　L
問3　45 L 以上
解説
問1
比を利用して求める。
さとしさんが入れた中和剤の量を x mL とすると
$56:12=27:x$
$56x=12\times27=324$
$x=5.78...$
よって小数第 2 位を四捨五入して約 5.8 となるから入れた中和剤は約 5.8 mL
問2
傾けて水槽に残っている水の量は水槽の体積の半分なので
$\pi\times20^2\times30\div2=6000\pi$ cm^3
1000 cm^3＝1 L だから
6000π $cm^3=6\pi$ L
よって最初に入っていた水の体積は 27 L だから捨てた水の量は $(27-6\pi)$ L
問3
1 匹あたり 50 cm^2 以上の水面の広さが必要だから
40 匹飼うのに必要な水面の広さは $50\times40=2000$ cm^2 になる。
ここで辺 AB 上に点 P, 辺 DC 上に点 Q, 辺 HG 上に点 R, 辺 EF 上に点 S を
四角形 PQRS が面 BCGF と平行になるようにとり四角形 PQRS が面積 2000 cm^2 となる水面を作るとする。
このとき QR＝CG＝50 cm だから
PQ＝2000÷50＝40 cm
点 C を通り辺 AB に平行な線と辺 AD との交点を A′, 辺 PQ との交点を P′ とすると
四角形 ABC A′ は平行四辺形となるので
$A'D=AD-AA'=50-20=30$ cm, $P'Q=PQ-PP'=40-20=20$ cm
よって AD // PQ より△A′CD∽△P′CQ だから
相似比は $A'D:P'Q=30:20=3:2$
高さも 3:2 になるので△P′CQ の高さは $45\times\frac{2}{3}=30$ cm
したがって必要な水の体積は $\frac{1}{2}\times(20+40)\times30\times50=45000$ cm^3 だから 45 L

【問 26】

図1は，底面 ABCDEF が 1 辺の長さ 4 cm である正六角形で，側面がすべて合同な長方形の六角柱 ABCDEFGHIJKL を表しており，AG＝6 cm である。

図2は，図1に示す立体において，点 G と点 I，点 H と点 J，点 H と点 L をそれぞれ結び，線分 GI と線分 HJ，HL との交点をそれぞれ P，Q としたものである。

次の問1は指示にしたがって，問2，問3は最も簡単な数で答えよ。ただし，根号を使う場合は $\sqrt{}$ の中を最も小さい整数にすること。

（福岡県　2017 年度）

図1

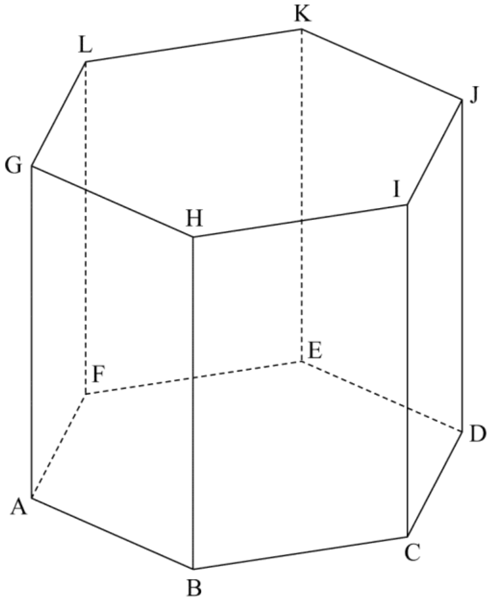
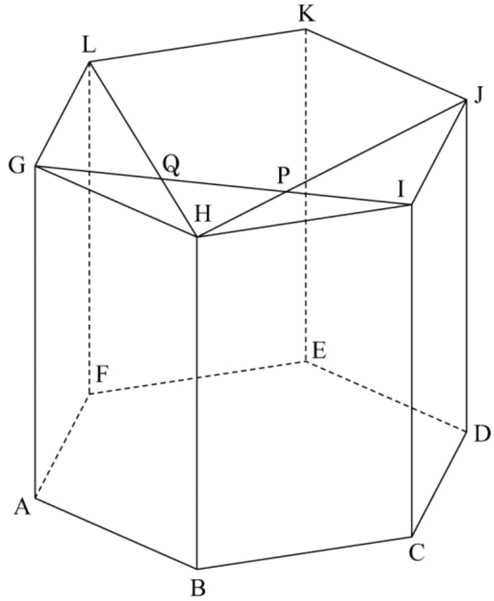


図2



問1　図1に示す立体において，次のア～カのうち，辺 BH とねじれの位置にある辺をすべて選び，記号で答えよ。

ア 辺 BC　　イ 辺 DE　　ウ 辺 AG　　エ 辺 EK　　オ 辺 KL　　カ 辺 GH

問2　図2に示す立体において，三角すい BHPQ の体積を求めよ。

問3　図1に示す立体において，点 D と点 K を結び，線分 DK 上に点 R を△ADR と四角形 BCJG の面積比が 1 : 2 となるようにとる。このとき，線分 DR の長さを求めよ。

解答欄

問1	
問2	cm^3
問3	cm

解答

問1　イ, オ

問2　$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^3

問3　$\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$ cm

解説

問1

辺 BH とねじれの位置にある辺は辺 BH と平行でなく交わらない辺である。

辺 BH とねじれの位置にある辺は辺 CD, DE, EF, FA, IJ, JK, KL, LG の 8 本である。

問2

1 辺 4 cm の正六角形は対角線をひいて 1 辺 4 cm の正三角形 6 個に分けることができる。

線分 GJ, IL をそれぞれひくと△GPJ∽△IPH, △LQI∽△HQG となるから

GP : IP＝GJ : IH＝2 : 1, IQ : GQ＝IL : GH＝2 : 1 より

GQ＝QP＝PI

よって△HQP＝$\dfrac{1}{3}$△GHI がいえる。

線分 GJ と線分 IL との交点を O とすると OI // GH より△GHI＝△GHO

つまり△GHI の面積は 1 辺 4 cm の正三角形の面積に等しくなる。

点 O から辺 GH に垂線をひきその交点を M とする。

このとき△OGM は 3 つの角が 90°, 30°, 60° の直角三角形だから

OM＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$OG＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4 = 2\sqrt{3}$ cm

よって△GHI＝△GHO＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm^2

だから△HPQ＝$\dfrac{1}{3}$△GHI＝$\dfrac{1}{3}\times 4\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm^2

したがって三角すい BHPQ の体積は$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times 6 = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^3

問3

四角形 BCJG≡四角形 KLAD で四角形 KLAD は LK // AD の台形である。

点 K から辺 AD に垂線をひきその交点を N とする。

このとき KN＝h cm とすると AD＝4×2＝8 cm だから

四角形 KLAD の面積は$\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times h = 6h$ cm^2

△ADR と四角形 BCJG の面積比が 1 : 2 で四角形 BCJG≡四角形 KLAD だから

△ADR と四角形 KLAD の面積比は 1 : 2 になる。

よって△ADR＝$6h\times\dfrac{1}{2} = 3h$ cm^2

点 R から辺 AD に垂線をひき交点を R とする。

このとき RS＝x cm とすると△ADR の面積の関係から

$\dfrac{1}{2}\times 8\times x = 3h$

$4x = 3h$

$x = \dfrac{3h}{4}$

このことから DR : DK＝RS : KN＝$x : h = \dfrac{3h}{4} : h = 3 : 4$

△DEK において

三平方の定理より DK^2＝DE^2＋EK^2＝$4^2+6^2=52$

DK＞0 より

DK＝$2\sqrt{13}$ cm

したがって DR＝$\dfrac{3}{4}$DK＝$\dfrac{3}{4}\times 2\sqrt{13} = \dfrac{3\sqrt{13}}{2}$ cm

【問 27】

図1，図3のように，O を頂点とし，底面の半径が 2 cm，高さが $4\sqrt{2}$ cm の円すいがあり，点 A は底面の円周上の点とする。このとき，次の問いに答えなさい。

（長崎県　2017 年度）

問1　図1において，円すいの体積は何 cm^3 か。

問2　図1において，母線 OA の長さは何 cm か。

問3　図2は図1の円すいの展開図である。この展開図において，円すいの側面になるおうぎ形の中心角の大きさは何度か。

問4　図3のように，図1の円すいの底面の直径を AB とし，母線 OA，弧 AB の中点をそれぞれ C，D とする。円すいの側面において，点 C から点 B まで長さが最も短くなる線を母線 OD と交わるようにひくとき，この線と線分 CA，および点 D を含む弧 AB によって囲まれる部分（図3の　　　で示した部分）の面積は何 cm^2 か。

図1

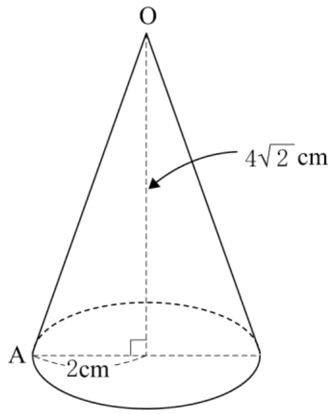


図2

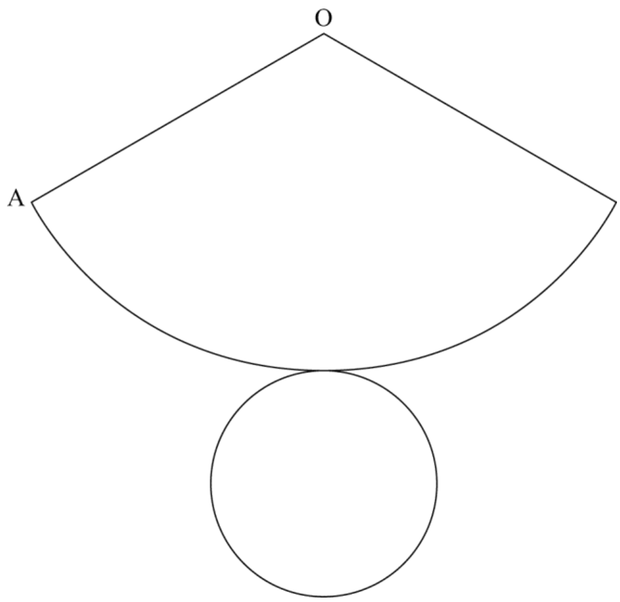
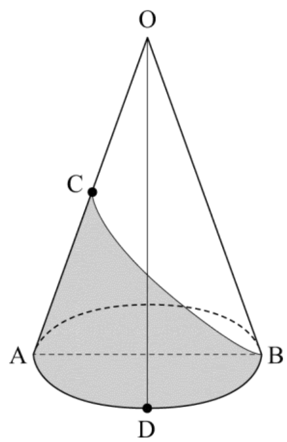


図3



解答欄

問1	cm^3
問2	cm
問3	°
問4	cm^2

解答

問1　$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi\ \ \mathrm{cm}^3$

問2　6 cm

問3　120°

問4　$6\pi-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$

解説

問1

$\dfrac{1}{3}\times(\pi\times 2^2)\times 4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi\ \ \mathrm{cm}^3$

問2

底面の円の中心をO′とすると∠OO′A＝90°

△OAO′において

三平方の定理より

$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OO'}^2+\mathrm{O'A}^2=(4\sqrt{2})^2+2^2=36$

OA＞0 より

OA＝6 cm

問3

おうぎ形の中心角の大きさを a° とする。

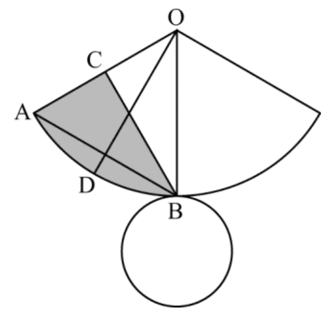
円すいの展開図において側面になるおうぎ形の弧の長さは底面の円周の長さに等しいから

$2\pi\times 6\times\dfrac{a}{360}=2\pi\times 2$

整理すると

$a=120$

問4



右の図のように円すいの展開図をかいて考える。

長さが最も短くなる線は，右の図の線分 CB で表される。

右の図において∠AOB＝120°×$\dfrac{1}{2}$＝60° だから

OA＝OB より△OAB は正三角形である。

ここで OC＝AC より BC⊥OA

△BOC は，3 つの角が 90°，30°，60° である直角三角形になるので

$\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}=\dfrac{1}{2}\times 6=3$ cm より

$\mathrm{BC}=\sqrt{3}\,\mathrm{OC}=\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$ cm

したがっておうぎ形 OAB の面積は

$\pi\times 6^2\times\dfrac{60}{360}=6\pi\ \ \mathrm{cm}^2$

△BOC の面積は

$\dfrac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$ となるから

求める面積は $6\pi-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$

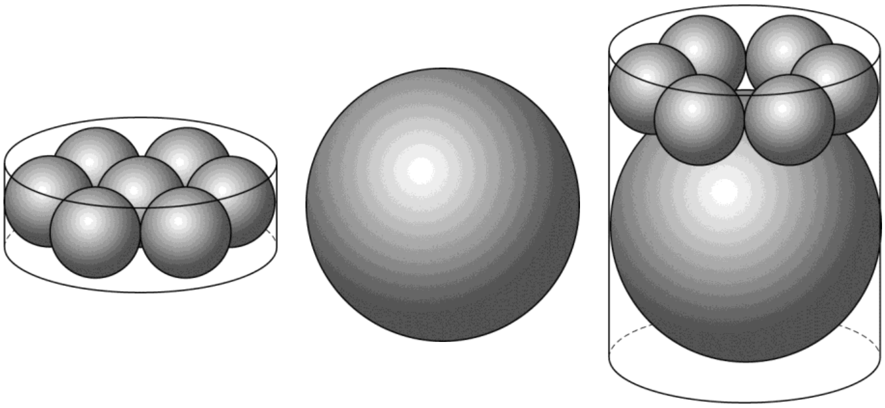
【問 28】

図1は，半径が 2 cm の球 7 個がちょうど入っている円柱である。図2は，直径が図1の円柱の底面の直径と等しい球であり，図3は，底面の直径が図1の円柱の底面の直径と等しく，図2の球 1 個と，半径が 2 cm の球 6 個がちょうど入っている円柱である。

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，円周率は π とする。また，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。

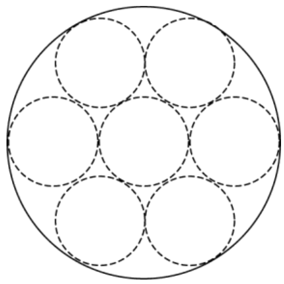
（熊本県　2017 年度）

図1　図2　図3



問1　図4は，図1の平面図である。図1の円柱の底面の直径を求めなさい。

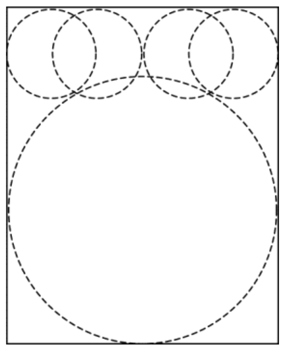
図4



問2　図2の球の体積を求めなさい。

問3　図5は，図3の立面図である。図3の円柱の高さを求めなさい。

図5

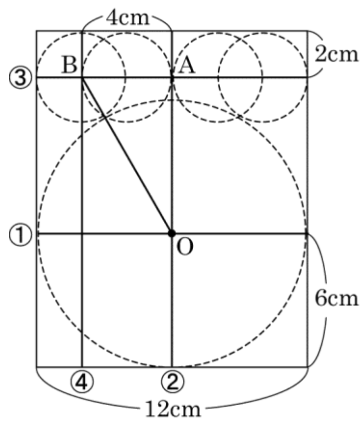


問4　図3において，円柱の中にある 7 個の球の中心を結び，底面が正六角形の角すいをつくる。この角すいの体積を求めなさい。

解答欄

問1	cm
問2	cm^3
問3	cm
問4	cm^3

解答
問1　12 cm
問2　288π　cm^3
問3　$8+4\sqrt{3}$ cm
問4　96 cm^3
解説
問1
図4より直径のところに半径 2cm の球が 3 個並んでいるので $2\times2\times3=12$ cm
問2
半径 6 cm の球だから $\frac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi$　cm^3
問3
右の図は図5に半径 6 cm の球の中心を通り底面に平行な直線①と
垂直な直線②
半径 2 cm の中心を通り底面に平行な直線③
左から 2 番目の球に接し底面に垂直な直線④を引いたものである。
このとき直線①と直線②の交点を O
直線②と直線③の交点を A
直線③と直線④の交点を B とする。
点 O は半径 6 cm の球の中心
点 B は半径 2 cm の球の中心になるから
$OB=6+2=8$ cm
線分 AB は半径 2 cm の球の直径になるから $AB=4$ cm
ここで $\angle OAB=90°$ だから
三平方の定理より $OA^2=OB^2-AB^2=8^2-4^2=48$
$OA>0$ より
$OA=4\sqrt{3}$ cm
よって円柱の高さは $2+4\sqrt{3}+6=8+4\sqrt{3}$ cm



問4
底面の正六角形の対角線を結ぶと 1 辺 4cm の正三角形が 6 個できる。
この正三角形 1 個の面積は $\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$　cm^2 だから
底面積は $4\sqrt{3}\times6=24\sqrt{3}$ cm^2
よってこの角すいの体積は高さが $OA=4\sqrt{3}$ cm だから $\frac{1}{3}\times24\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=96$ cm^3

【問 29】

下の図1のように，AB＝2 cm，AC＝3 cm，AD＝6 cm，∠BAC＝90°の三角柱 ABC－DEF がある。三角柱 ABC－DEF を図2，図3，図4のように，3 つの三角すい ABCD，CDEF，BCDE に分ける。

図1

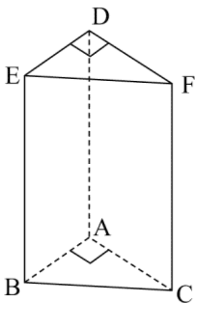


図2

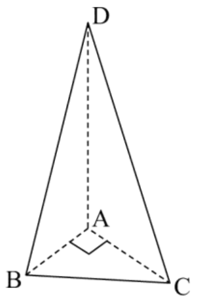


図3

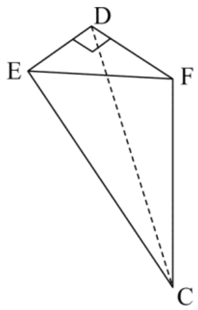
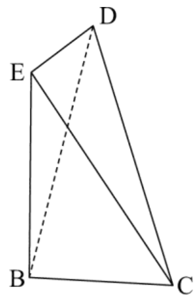


図4



次の問1～問3に答えなさい。

（大分県　2017 年度）

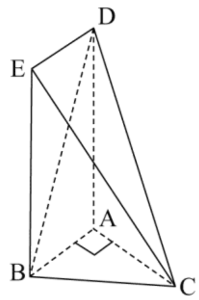
問1　次の［説明］は，図2の三角すい ABCD の体積が，図1の三角柱 ABC－DEF の体積の 3 分の 1 であることを説明したものである。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に適する記号を入れ，［説明］を完成させなさい。

［説明］

$\boxed{1}$　図2の三角すいと図3の三角すいにおいて，
図2の三角すいの底面を△$\boxed{\text{ア}}$ とすると，高さは AD となる。
図3の三角すいの底面を△DEF とすると，高さは $\boxed{\text{イ}}$ となる。
△$\boxed{\text{ア}}$ ＝△DEF で，AD＝ $\boxed{\text{イ}}$ であるから，図2と図3の三角すいの体積は等しい。

$\boxed{2}$　図2と図4の三角すいを組み合わせて，図5のように四角すい CADEB をつくる。
図5の四角すいと図2の三角すいにおいて，
図5の四角すいの底面を四角形 ADEB とすると，高さは AC となる。
図2の三角すいの底面を△$\boxed{\text{ウ}}$ とすると，高さは AC となる。
四角形 ADEB の面積は△$\boxed{\text{ウ}}$ の面積の 2 倍で，AC は共通であるから，図5の四角すいの体積は，図2の三角すいの体積の 2 倍となる。
よって，図2と図4の三角すいの体積は等しい。

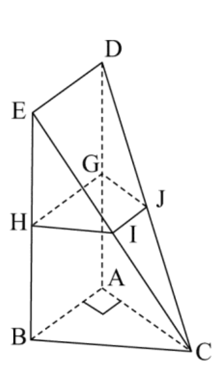
図5



$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ より，図2と図3と図4の 3 つの三角すいの体積は等しいから，図2の三角すい ABCD の体積は図1の三角柱 ABC－DEF の体積の 3 分の 1 である。

問2　図5の四角すい CADEB の体積を求めなさい。

問3　図5の四角すい CADEB の辺 AD，BE，CE，CD の中点をそれぞれ G，H，I，J とする。立体 DEHIJG の体積を求めなさい。



解答欄

問1	ア	
	イ	
	ウ	
問2	cm^3	
問3	cm^3	

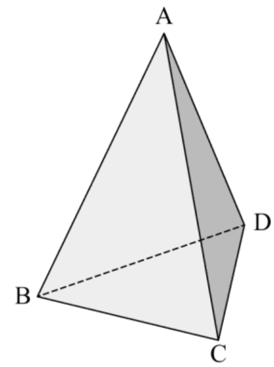
解答
問1
ア　ABC
イ　CF
ウ　ADB
問2　12 cm^3
問3　$\frac{15}{4}$ cm^3
解説
問1
高さが等しい 2 つの角すいでは体積の比と底面積の比は等しくなる。
問2
問1より四角すい CADEB の体積は三角柱 ABC－DEF の体積の $\frac{2}{3}$ だから
$\left\{\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)\times6\right\}\times\frac{2}{3}=12$ cm^3
問3
点 I を通り辺 EB に平行な直線と辺 BC との交点を K
点 J を通り辺 DA に平行な直線と辺 AC との交点を L とする。
このとき立体 DEHIJG の体積は
四角すい CADEB の体積から立体 ABKL－GHIJ の体積と四角すい CLJIK の体積をひいたものになる。
まず立体 ABKL－GHIJ は四角柱で中点連結定理より
LK // AB, LK$=\frac{1}{2}$AB$=\frac{1}{2}\times2=1$ cm
CL : LA＝CJ : JD＝1 : 1 より LA$=\frac{1}{2}$AC$=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$ cm
$\angle$KLA＝$\angle$LAB＝90° だから四角形 ABKL の面積は $\frac{1}{2}\times(1+2)\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ cm^2
AG$=\frac{1}{2}$AD$=\frac{1}{2}\times6=3$ cm だから立体 ABKL－GHIJ の体積は $\frac{9}{4}\times3=\frac{27}{4}$ cm^3
次に四角すい CLJIK と四角すい CADEB は相似で相似比は CI : CE＝1 : 2
よって体積の比は $1^3:2^3=1:8$ だから四角すい CLJIK の体積は $12\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$ cm^3
したがって問2より四角すい CADEB の体積は 12 cm^3 だから求める体積は $12-\frac{27}{4}-\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$ cm^3

【問 30】

図1のような，正三角錐がある。AB＝AC＝AD＝9 cm，BC＝CD＝BD＝6 cm のとき，次の問1，問2に答えなさい。

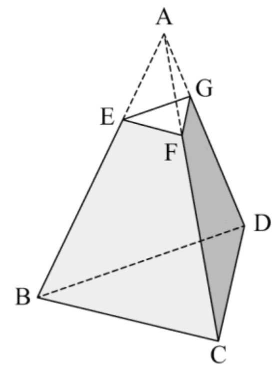
（宮崎県　2017 年度）

図1



問1 図1において，辺を直線とみたとき，直線 BC とねじれの位置にある直線を答えなさい。

図2

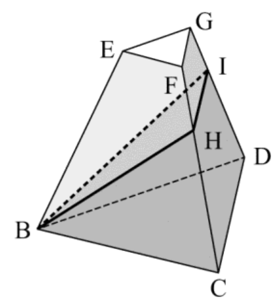


問2 図2のように，図1の正三角錐の辺 AB 上に AE＝3 cm となる点 E をとり，点 E を通り，面 BCD に平行な面 EFG より上の正三角錐を切り取って，立体をつくる。

このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) △EFG の面積を求めなさい。

図3



(2) この立体の体積を求めなさい。

(3) 図3は，図2の立体の辺 FC，GD 上にそれぞれ点 H，I を，線分 BH，HI，IB の長さの和が最も小さくなるようにとり，3 点 B，H，I を結ぶ線分をひいて，側面を 2 色にぬり分けたものである。このとき，BH＋HI＋IB を求めなさい。

解答欄

<table>
<tr><td>問1</td><td colspan="2">直線</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問2</td><td>(1)</td><td>cm^2</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>cm^3</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>cm</td></tr>
</table>

解答
問1　直線AD
問2
(1)　$\sqrt{3}$ cm^2
(2)　$\dfrac{26\sqrt{23}}{3}$ cm^3
(3)　$\dfrac{46}{3}$ cm
解説
問1
2直線の位置を見たとき同じ平面上にないものをねじれの位置にあるという。
よって直線AD
問2
(1)
側面の3つの三角形において面BCDと面EFGが平行なので
EF // BC, GF // CD, GE // BDとなるから△BCD∽△EFG
また, △ABC∽△AEFとなるから相似比はEF:BC＝AE:AB＝3:9＝1:3で
△BCDと△EFGの相似比も1:3になる。
よって△BCDと△EFGの面積比は$1^2:3^2=1:9$
ここで△BCDは1辺が6 cmの正三角形だから高さは$3\sqrt{3}$ cmとなり $\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ cm^2
よって△EFG＝$\dfrac{1}{9}\times 9\sqrt{3}=\sqrt{3}$ cm^2
(2)
求める立体の体積は
三角錐ABCDの体積から三角錐AEFGの体積を引いたものなのでそれぞれの体積を求める。
点Aから辺BCへ垂線をひきその交点をPとし
△APDにおいて点Aから辺PDに垂線をひきその交点をQとする。
このとき$AP^2=AB^2-BP^2=81-9=72$
AP＞0より
AP=$6\sqrt{2}$ cm
ここで△APDにおいてPQ＝x cmとおくとQD＝$3\sqrt{3}-x$ cmと表せるから
三平方の定理より
AQの長さについて$AQ^2=AP^2-PQ^2$, $AQ^2=AD^2-QD^2$の2通りの表し方ができる。
よって$AP^2-PQ^2=AD^2-QD^2$より
$\left(6\sqrt{2}\right)^2-x^2=9^2-(3\sqrt{3}-x)^2$
整理すると
$x=\sqrt{3}$
したがって$AQ^2=69$
AQ＞0より
AQ＝$\sqrt{69}$ cmとなるから
求める体積は$\dfrac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times\sqrt{69}-\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{69}\times\dfrac{1}{3}=9\sqrt{23}-\dfrac{\sqrt{23}}{3}=\dfrac{26\sqrt{23}}{3}$ cm

解説

(3)

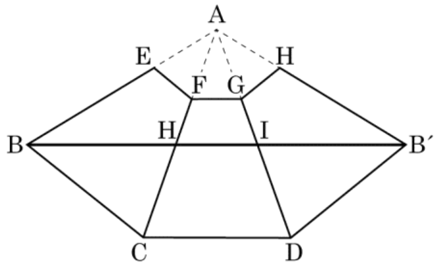


図3の側面の展開図 (色は省略) は右のようになり

BH＋HI＋IB の値が最も短くなるためには

点 B ともう一方の点 B を一直線で結んだときである

(区別がつくように一方の B をB′とする)。

△ABB′は AB＝AB′の二等辺三角形

△ACD も AC＝AD の二等辺三角形だから

点 A から辺 BB′に引いた垂線は辺 CD とも垂直に交わるので

BB′// CD となることがわかる。

平行線の同位角は等しいので∠HCD＝∠FHI

対頂角は等しいので∠FHI＝∠BHC

また△ABC≡△ACD≡△ADB′より∠HCD＝∠EBC

△ABC は二等辺三角形だから∠EBC＝∠HCB

よって∠HCB＝∠BHC となるので△BCH は二等辺三角形で BH＝BC＝6 cm

同様に IB′＝6 cm

ここで△ABC∽△BCH なので

BC : CH＝AB : BC で

6 : CH＝9 : 6 となり

CH＝4

AH＝9－4＝5 cm　だから

AH : HI＝AC : CD で

5 : HI＝9 : 6

HI＝$\frac{10}{3}$

したがって BH＋HI＋IB＝6＋$\frac{10}{3}$＋6＝$\frac{46}{3}$ cm

【問 31】

図1は，立方体の 1 つの頂点に集まる 3 つの辺の中点 A, B, C をふくむ平面で切ったときの大きい方の立体である。図2は，立方体のすべての頂点について図1と同じように，平面で切ったときの立体である。

このとき，次の各問いに答えなさい。

（沖縄県　2017 年度）

図1

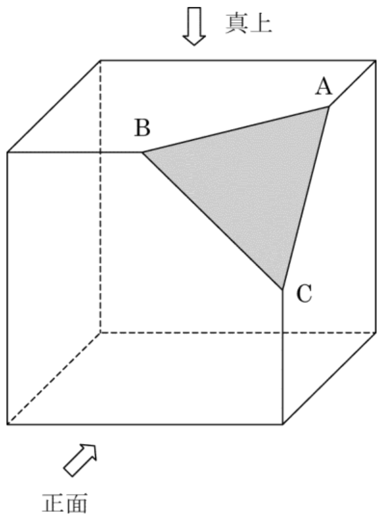
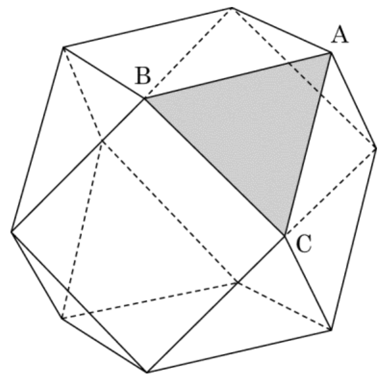
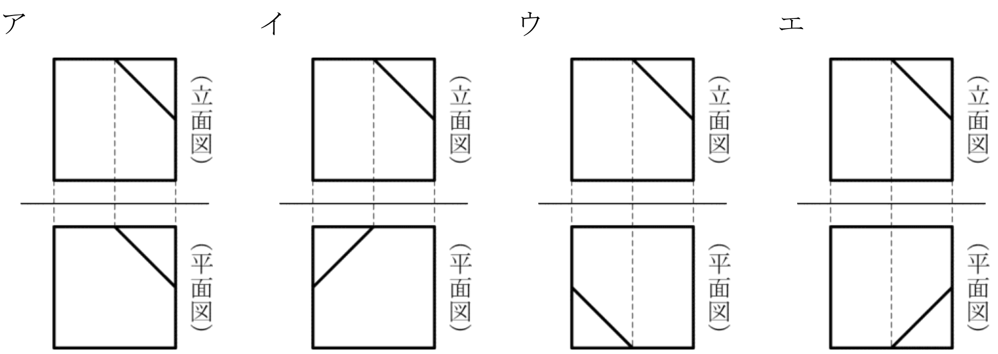


図2



問1 図1の立体の投影図を，次のア～エの中から1 つ選び，記号で答えなさい。



問2 図2の立体の面の数を答えなさい。

問3 図2の立体の各辺を延長した直線について，直線 AB とねじれの位置にある直線は何本あるか答えなさい。

問4 図2の立体の表面積は，切る前の立方体の表面積の何倍になるか求めなさい。

解答欄

問1	
問2	
問3	本
問4	倍

解答

問1　エ

問2　14

問3　12 本

問4　$\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ 倍

解説

問1

立面図は立体を真正面から見た図。

平面図は立体を真上から見た図で立体を正面から見たときに見える面が下側にあるように見える。

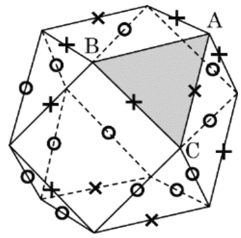
立面図と平面図をあわせて投影図という。

問2

正方形の面が 6，正三角形の面が 8 あるから

求める面の数は $6+8=14$

問3



右の図の○印は直線にしたときに直線 AB とねじれの位置にある辺を表す。

×印は直線にしたときに直線 AB とねじれの位置にない辺を表す。

○印をつけた辺は 12 本×印をつけた辺は 11 本となる。

問4

切る前の立方体の 1 辺の長さを a とすると

切る前の立方体の表面積は

$(a\times a)\times 6=6a^2$

△ABC は AB＝BC＝CA より正三角形であり

その 1 辺の長さは直角をはさむ 2 辺の長さがともに $\dfrac{a}{2}$ である直角二等辺三角形の斜辺の長さに等しいから

$\dfrac{a}{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$

点 A から辺 BC に垂線をひきその交点を D とおくと

△ABD と△ACD は 3 つの角が 90°，30°，60° の直角三角形となる。

また△ABD≡△ACD だから

$\mathrm{BD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$

$\mathrm{AD}=\sqrt{3}\,\mathrm{BD}=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}a}{4}=\dfrac{\sqrt{6}a}{4}$

よって△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}a}{4}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}$

問2より図2の立体は正方形の面が 6，正三角形の面が 8 あるから

図2の立体の表面積は $\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)\times 6+\dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}\times 8=3a^2+\sqrt{3}a^2$

したがって $(3a^2+\sqrt{3}a^2)\div 6a^2=\dfrac{3a^2+\sqrt{3}a^2}{6a^2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ 倍